Alexander Ziwet

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BAND I.

GEOMETRIE DER KRÄFTE

VON

H. E. TIMERDING
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG

MIT 27 TEXTFIGUREN

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

THEODOR REYE

ZU SEINEM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGE

IN VEREHRUNG

DARGEBOTEN

Vorwort.

Die Geometrie der Kräfte hat ihren Namen von Pluecker empfangen. Ihrem Inhalte nach ist sie zum Teil älter, wenn wir ihr Wesen dahin auffassen, daß sie in einer theoretischen Abklärung der Mechanik besteht, die aus dieser empirischen Wissenschaft eine mathematische Disziplin macht. Sie ist dann schon in Varignons Nouvelle Mécanique vorgebildet, in Poinsots Elementen der Statik angebahnt und in Moebius' Lehrbuch der Statik bewußt ausgeführt. Eine gewisse Vollendung hat sie durch Sir Robert Stawell Balls Schraubentheorie erfahren. Diese Theorie bringt das Charakteristische an der Mechanik des starren Körpers auf einen einfachen, prägnanten Ausdruck. Sie umfaßt im Gegensatz zu ihren Vorläufern Statik und Kinetik zugleich. Mag manches an ihr geändert, manches hinzugefügt und manches beseitigt werden müssen, in ihrem Ganzen bedeutet sie einen bleibenden Besitz der Wissenschaft. Als Ausfluß des britischen Geistes zeigt sie auch in den Partien, die sich scheinbar von aller praktischen Verwendbarkeit weit entfernen, ein feines Gefühl für das Wesen und die Ansprüche der Wirklichkeit. Dagegen sucht sie in keiner Weise die methodische Einheit und Reinheit zu erreichen, die wir Deutschen als das Endziel aller wissenschaftlichen Arbeit anzusehen gewohnt sind. Sie wird mehr wie eine geometrische Illustration der Mechanik gegeben, als daß sie aus sich heraus die Mechanik in einer besonderen Gestalt organisch erzeugt.

Dies letztere aber erscheint uns als der eigentliche Zweck, den eine Geometrie der Kräfte zu verfolgen hat. Sie muß, so meinen wir, als eine Disziplin auftreten, die sich um den einzigen Begriff der Kraft als ihren Angelpunkt dreht und diesen Begriff in einer mathematischen Entwickelung zu erfassen trachtet. Sie hat den Begriff der Kraft zu befreien von den physiologischen, physikalischen und metaphysischen Merkmalen, die ihm ursprünglich anhaften, ja sein Wesen ausmachen. Sie löst sich damit los von dem empirischen Grunde, auf dem sie erwachsen ist, und hat von der Erfahrung nicht mehr ihre Bestätigung, sondern nur ihre Wertung zu empfangen.

Die Geometrie der Kräfte geht so denselben Weg wie die ihr verschwisterten Disziplinen, die ebenfalls auf einem ursprünglich physikalischen Begriffe aufgebaut sind: die Geometrie der Bewegung und die Geometrie der Massen. Die prinzipielle Bedeutung dieser drei Disziplinen liegt eben darin, daß sie den Übergang von der Geometrie zur Mechanik vermitteln, ohne daß sie an sich einen zwitterhaften Charakter zeigen. Im Gegenteil, indem sie selbst in sich geschlossen und einheitlich auftreten, verbinden sie auch Geometrie und Mechanik zu einem großen Ganzen. In ihrer allgemeinsten Form ist diese Auffassung durch Hertz' berühmtes Buch über die Prinzipien der Mechanik glänzend zur Geltung gebracht worden.

Die fast selbstverständlich klingende Forderung, das, was an der Mechanik rein mathematischer Natur ist, auch rein mathematisch darzustellen, ist aber noch weit von einer allgemeinen Anerkennung und Durchführung entfernt. Zu einer vollen Ausgestaltung ist nur die Geometrie der Bewegung gelangt. In der Geometrie der Massen harrt das reichlich aufgehäufte Material noch der Sichtung und Durcharbeitung, und in der Geometrie der Kräfte sind zu einer systematischen Darstellung nur einzelne Ansätze gemacht. Einen sehr bemerkenswerten Versuch bildet die „Theorie der Streckensysteme" von Mohr im Zivilingenieur 1888, die in seinen gesammelten „Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik" reproduziert ist; eine ausführlichere Darstellung hat Budde in seiner „Allgemeinen Mechanik der Punkte und starren Systeme" gegeben.

Beide Autoren vermeiden, um den geometrischen Charakter des Gegenstandes hervortreten zu lassen, den Gebrauch des Wortes „Kraft" und ersetzen es durch „Strecke" oder „Vektor". Hierin liegt wohl keine Zurückweisung, sondern nur eine Zurückschiebung der kardinalen Frage nach der mathematischen Natur des Kraftbegriffes. Denn um überhaupt die Möglichkeit zu gewinnen, den mathematisch eingeführten Kraftbegriff in seiner physikalischen Bedeutung zu erfassen, ist es notwendig, über die Statik des starren Körpers, auf die Mohr und Budde ihre Betrachtung beschränken, hinauszugehen und einerseits die Kinetik des starren Körpers, anderseits die Statik der deformierbaren Körper heranzuziehen, denn so erst gelangt man zu den Erscheinungsformen der mechanischen Energie, der kinetischen Energie der Bewegung und der potentiellen Energie des Spannungszustandes.

Auf diese Weise ist der Mindestbereich festgelegt, den wir umspannen müssen, wenn wir eine wirkliche Geometrie der Kräfte geben wollen. Es ist damit auch gesagt, daß eine solche Darstellung über die Ballsche Schraubentheorie hinausgehen muß, denn in dieser findet die Statik der deformierbaren Körper keinen Platz. Zum Glück hat die Theorie der letzteren schon vor Ball W. Thomson in einer Form entwickelt, die zu der Schraubentheorie einen merkwürdigen Parallelismus zeigt. Es lag also das Material, das zu dem Aufbau einer Geometrie der Kräfte gehört, gesammelt vor. Aber bei diesem Aufbau schien es gut, bescheiden zu sein und das Gebäude nicht größer zu machen, als es zur Aufnahme des prinzipiellen Gehaltes, der darin untergebracht werden soll, notwendig ist. Denn ein derartiges Buch hat der Natur der Sache nach immer einen propädeutischen Charakter, es hat deshalb einerseits nicht die Berechtigung, einen übergroßen Umfang in Anspruch zu nehmen, und es ist anderseits auch darauf angewiesen, in den Anforderungen an die Vorkenntnisse des Lesers nicht zu weit zu gehen. Dazu kommt noch ein methodischer Gesichtspunkt. Innerhalb gewisser Grenzen erweisen sich die Hilfsmittel der elementaren analytischen Geometrie als ausreichend. Geht man darüber hinaus, so ist man gezwungen, anders geartete Methoden heranzuziehen, und die Darstellung büßt so, abgesehen von der zunehmenden Schwierigkeit, ihren einheitlichen Charakter ein.

Dies sind in Kürze die Gesichtspunkte, die bei der Abfassung des vorliegenden Bandes maßgebend waren. Er ist aus einem kurzen Referate des Verfassers herausgewachsen, das unter dem Titel „Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers“ in Band IV 1 der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (Seite 125 bis 189) enthalten ist. Dieses Referat war zunächst der Ballschen Schraubentheorie gewidmet und fügte hinzu, was dieser wesensverwandt oder zu ihrer Grundlegung passend schien. Es brauchte als Glied eines größeren Ganzen nicht in sich selbst abgeschlossen zu sein. Es hatte weder eine eigene Ansicht darzubieten noch eigene Untersuchungen darzustellen, sondern nur die vorhandenen Forschungen in einem kurzem Resümee zu vereinigen. Andere Rechte und Pflichten erwachsen aber einem selbständigen Buche. Die Einengung durch angrenzende Artikel verschwindet, dafür entsteht die Forderung der Einheitlichkeit und Abrundung.

Es gab, um diese zu erreichen, zwei Wege. Der nächstliegende wäre gewesen, sich auf die Schraubentheorie zu beschränken und somit eine Bearbeitung oder Umgestaltung des zusammenfassenden Werkes von Ball, der im Jahre 1900 erschienenen Theory of Screws, zu geben. Ein derartiges Unternehmen wäre an sich gewiß nicht verdienstlos gewesen, denn das Ballsche Werk ist mehr eine Sammlung von Abhandlungen als ein Lehrbuch, es liefert nicht eine fortlaufende, konsequent durchgeführte Darstellung, sondern in buntem Wechsel der Methoden und Hilfsmittel wird der Gegenstand von allen möglichen Gesichtspunkten beleuchtet, die Resultate werden aneinandergereiht, wie sie gewonnen wurden, ohne daß eine einheitliche Auffassung durchdringt. Hierin soll gewiß kein Tadel liegen, es bezeichnet nur den Charakter des Ballschen Buches als eines Quellenwerkes, das noch der Sichtung und Klärung bedarf. Die Bearbeitung der Ballschen Theorie hätte sich in zwei Teile zerlegt, einen geometrischen und einen mechanischen. Die geometrische Seite ist aber durch das Erscheinen von Studys Geometrie der Dynamen (Leipzig 1903) in ein neues Licht gerückt worden. Eine erneute Darstellung hätte dieses an Fülle des originellen Inhaltes überreiche Buch in sich verarbeiten müssen, sie hätte ferner, wenn sie als vollwertig hätte auftreten wollen, tief in die Liniengeometrie eindringen müssen, im wesentlichen die allgemeinen projektiven Methoden weiter verfolgend, die F. Klein bereits in seinen ersten an Pluecker anschließenden Arbeiten entwickelt hat und die Balls Untersuchungen bis in seine neuesten Abhandlungen[1]) hinein durchziehen. Noch schwieriger und umfangreicher hätte sich die Bearbeitung der mechanischen Seite gestaltet. Eine solche wäre aber schon aus dem Grunde verfehlt gewesen, als von diesen Dingen gerade in der Sammlung, der auch dieser Band angehört, eine vorzügliche Darstellung von Websters Hand vorliegt. Die Theorie der Schraubenketten aber, in denen sich die dynamische Seite des Ballschen Werkes vollendet, würde meines Erachtens nur in einer voluminösen Neubearbeitung der gesamten Mechanik, in welcher der starre Körper als das erste Element erscheint, Platz finden können.

So galt es, sich mit einer bescheideneren Aufgabe zu begnügen und auf dem anderen möglichen Wege die Ausgestaltung der in jenem Referate gegebenen Darstellung zu suchen. Dieser Weg führte dahin, auf ein Hinaus-

1) Nach der Theory of Screws in den Transactions of the Royal Irish Academy erschienen. Vol. XXXI, XXXII (1901—1904).

gehen über die Elemente zu verzichten, dafür aber den prinzipiellen Anforderungen, die man an eine geometrische Grundlegung der Mechanik stellen kann, nach Möglichkeit gerecht zu werden, mit anderen Worten, die Grundbegriffe der Mechanik oder eigentlich nur den einen Begriff, um den sich alles dreht, den Begriff der Kraft, in einer mathematischen Darstellung zu entwickeln.

Damit soll und kann nicht gesagt sein, daß hierbei der geometrischen Seite kein selbständiges Interesse zukommt. Im Gegenteil, der Reiz dieser Betrachtungsweise besteht eben darin, daß der Weg, der zur Einführung in die Mechanik unternommen wird, auch zu wertvollen geometrischen Resultaten führt. Dabei aber schien es geboten, durch eine gewisse Norm festzulegen, wie weit man diesen geometrischen Betrachtungen Raum geben will, die zu weit geführt die leitenden dynamischen Zielpunkte verwischen würden.

Dies regulative Prinzip habe ich in der Liniengeometrie erblickt, deren Zusammenhänge mit den in Rücksicht auf die Mechanik eingeführten Grundbegriffen den eigentlichen mathematischen Gehalt dieses Buches bilden. Die Liniengeometrie erscheint hier in einer besonderen Beleuchtung, sie wird nicht in ihrem ganzen Umfange gewonnen, aber gerade in den Partien, die in metrischer Hinsicht die einfachsten und charakteristischsten scheinen. So ist die vorliegende Darstellung zwar nicht imstande, ein Lehrbuch der Liniengeometrie zu ersetzen, denn sie gibt aus dieser nur einen Ausschnitt, aber sie gibt den Ausschnitt, der sich zur Einführung am besten eignet, weil er die allgemeinen Begriffe an den anschaulichsten Beispielen erläutert. Erscheint hierbei die Liniengeometrie nicht als eine willkürliche Erfindung des Menschengeistes, sondern als der Ausfluß einer auf empirischen Grundlagen ruhenden Wissenschaft, so ist das gewiß kein Schade.

Es ist, wenn man in diesen Grenzen bleibt, möglich, alle Betrachtungen auf die gewöhnlichen cartesischen Punktkoordinaten zu stützen und mit den elementarsten Vorkenntnissen, außer den einfachsten Formeln der analytischen Geometrie den ersten Sätzen der projektiven Geometrie, auszukommen. Ja, ein großer Teil der Entwickelungen erscheint wie eine Wiederaufnahme des in den gewöhnlichen Lehrbüchern der analytischen Geometrie Gegebenen, in einer veränderten und durch eine neue Bedeutung belebten Form.

Die Beschränkung auf das metrisch Einfache und Bedeutsame ist aber nicht allein durch äußere Rücksichten geboten, sondern sie erscheint auch innerlich gerechtfertigt, wenn man physikalischen Prinzipien zustrebt, die an sich einen metrischen Charakter tragen. Ich kann dies nicht besser erläutern als dadurch, daß z. B. die Schraubentheorie in ihrer allgemeinen projektiven Ausgestaltung, die lediglich dem geometrischen Interesse folgt, zu den allgemeinen quadratischen Strahlenkomplexen hinführt und eine ungemein einfache und elegante Behandlung derselben gestattet, während in der folgenden Darstellung nur spezielle quadratische Komplexe auftreten, die durch besondere metrische Eigentümlichkeiten ausgezeichnet sind und so, was ihnen an Allgemeinheit fehlt, durch Anschaulichkeit ersetzen. Zu ihnen tritt hinzu die merkwürdige, nach Cayley als Zylindroid bezeichnete Regelfläche dritten Grades und eine Strahlenkongruenz, welche das einfachste Beispiel zu sein scheint, an dem sich die allgemeinen von Kummer entdeckten Eigenschaften erläutern lassen. So ergibt sich hier eine Art Mustersammlung für die Gebilde der Liniengeometrie, an der sich deren allgemeiner Charakter wenn nicht entwickeln, so doch erläutern läßt.

Es möge aber erlaubt sein, an dieser Stelle auf ein paar Werke hinzuweisen, in welchen der Leser eine Darstellung der allgemeinen Liniengeometrie findet. Zunächst ist das immer noch lesenswerte, grundlegende Werk von Pluecker zu nennen: „Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement" (nach des Verfassers Tode herausgegeben von Clebsch u. Klein, Leipzig 1868, 1869).

Unter den neueren Büchern habe ich zuerst das ausführliche Werk von R. Sturm „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung" anzuführen. Dieses ist in drei Teilen erschienen, von denen der erste den linearen und den tetraedralen Komplex, der zweite die Strahlenkongruenzen und der dritte die quadratischen Komplexe behandelt. Der Verfasser hat sich die große und verdienstvolle Aufgabe gestellt, das ganze Gebiet anschaulich zu durchdringen, und es ist die Energie zu bewundern, mit der er den überwältigend reichen Stoff durch die rein geometrische Betrachtung bewältigt hat, trotz der erheblichen Schwierigkeiten, welche die Allgemeinheit der behandelten Gebilde diesen einfachen Methoden entgegenstellte. Endlich sei auf das in der Sammlung Schubert erschienene Lehrbuch von Zindler hingewiesen, das seinen Gegenstand auf die gesamte Liniengeometrie ausdehnt und sich analytischer Methoden bedient.

Im übrigen sind die Nachweisungen, die den Leser über die Quellen des in diesem Buche Vorgetragenen orientieren, und ihm die zusammenfassenden Darstellungen der berührten Disziplinen nennen, in den Fußnoten unter den Seiten des Textes gegeben. Diese Literaturnachweise erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sie sollen vor allen Dingen zweckmäßig sein und den Interessen aller derer dienen, die sich in dem hier durchstreiften Gebiete weiter umsehen wollen. Nach Möglichkeit ist eine Wiederholung desselben Zitates vermieden worden, ohne daß deshalb, wie ich glaube, die Bedeutung der einzelnen Arbeiten einer Verkennung ausgesetzt wird und ich in den Verdacht kommen könnte, fremde Resultate für eigene ausgeben zu wollen. Eine lehrbuchartige Darstellung begibt sich ja von vornherein des Ehrgeizes, mit eigenen wissenschaftlichen Entdeckungen hervorzutreten. Sie hat nur soviel aus Eigenem hinzuzutun, als in den Rahmen der Aufgabe paßt und zur Abrundung und Ergänzung dienlich ist. Aber gerade in dieser Beschränkung liegt ein gewisser Reiz, zumal wenn, wie hier, kaum an einer Stelle etwas fertig Vorliegendes unverändert reproduziert werden kann, sondern fast alles so umgestaltet und vervollständigt werden muß, daß es sich in den Plan des Ganzen einfügt.

Was diesen Plan selbst betrifft, so wird man vielleicht manches vermissen und anderes entbehrlich finden. Es sei mir deshalb gestattet noch einige Worte zur Rechtfertigung der Grenzen, die ich mir gesteckt habe, zu sagen. Zunächst sind zwei Kapitel nur darum weggeblieben, weil sie den Umfang des Buches noch mehr vergrößert hätten und sie anderseits durch den Zusammenhang nicht unmittelbar erfordert schienen. Diese Kapitel hätten das Virial und das Laplacesche Prinzip der unveränderlichen Ebene behandelt. Sie konnten ausgelassen werden, wenn die freien Massensysteme prinzipiell unerörtert blieben. Immerhin bedeuten sie eine direkte Fortsetzung des in diesem Buche verfolgten Gedankenganges. Vielleicht ist es mir vergönnt, die Lücke, die so bleibt, an einem anderen Orte auszufüllen.

Besser zu verteidigen scheint es mir, daß alle Betrachtungen sich auf den Raum beschränken und die Ebene fast ganz unberücksichtigt bleibt, trotzdem die Mechanik ebener Systeme sowohl theoretisch von großem Interesse als auch praktisch von hervorragender Bedeutung ist. So ist auf die Vereinigung der Kräfte, die in einer Ebene wirken, nicht näher eingegangen, die hübschen Untersuchungen von Moebius über den Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte in einer Ebene sind mit keinem Worte erwähnt usw. Der Grund ist dieser. Die Mechanik ebener Systeme zeigt einen völlig anderen methodischen Charakter wie die Mechanik räumlich ausgebreiteter Massen. Für jene bildet das Hervortreten des graphischen Elementes, die Betonung der geometrischen Konstruktion das entscheidende Merkmal, während in der dreidimensionalen Mechanik die analytische Behandlung das nächstliegende ist. Was sich auf einem Blatt Papier darstellen läßt, fordert zur Zeichnung heraus, während die Darstellung räumlicher Dinge von Willkürlichkeiten und Umständlichkeiten nie frei ist. Zudem hat jene graphische Mechanik wesentlich ihrer Wichtigkeit für die Technik wegen eine solche Ausdehnung gewonnen, daß jeder Versuch, sie als Nebensache mit zu behandeln, ein verfehlter sein müßte. Auch hier bleibt mir nur die Möglichkeit, mich mit einer späteren Veröffentlichung zu trösten.

Befremden wird vielleicht manchen die Einleitung, in welcher wesentlich auf Grund der Graßmannschen Methoden eine Analyse der Raumgrößen gegeben ist, ohne daß in den übrigen Teilen des Buches von den Formeln und Bezeichnungen der Ausdehnungslehre oder Vektoranalysis Gebrauch gemacht wird. Das letztere geschah wesentlich deswegen, um mit der herkömmlichen Darstellung in Übereinstimmung zu bleiben und von den allgemein verbreiteten analytisch geometrischen Methoden möglichst wenig abzuweichen. Dadurch wird, wie ich glaube, die Lektüre des Buches für die meisten bedeutend erleichtert, und dies Verfahren bedarf so wohl kaum einer Rechtfertigung. Was soll dann aber die vorangestellte Einleitung? Ich habe sie in einer doppelten Absicht gegeben. Der erste Grund war der, daß es galt, die Hauptbegriffe aus streng systematischen Gesichtspunkten heraus zu entwickeln, damit sie nicht bloß durch die Rücksicht auf eine spätere praktische Verwendbarkeit geboten, sondern auch vom geometrischen Standpunkte aus in einem organischen Zusammenhange erscheinen und sich in gewissem Sinne als notwendig erkennen lassen. Der zweite Grund war der, daß sich bei dieser Gelegenheit eine Reihe von Begriffen und Formeln entwickeln ließ, die für das Folgende nötig waren, aber nicht gerade in den einleitenden mathematischen Vorlesungen und Lehrbüchern gegeben zu werden pflegen. Der erfahrene Leser möge diese einleitenden

Kapitel mit Nachsicht aufnehmen. Sie sollen nur erklären und erläutern und nicht eine strenge erschöpfende Darstellung des Gegenstandes liefern. Sie sind mit Rücksicht auf den Anfänger geschrieben, für den Kundigen habe ich sie durch einige kurze Bemerkungen am Ende des Buches zu ergänzen gesucht.

Das gewählte Verfahren, die Begriffsbildungen der Mechanik auf rein geometrischem Wege herzuleiten, kann sich auf die gewichtige Autorität von Gauß stützen, der mit Beziehung auf Moebius' Barycentrischen Calcul bemerkt hat: „Der barycentrische Calcul findet sein Gegenstück in einem anderen (vermuthlich noch umfassendern) Calcul, den man den Resultantencalcul nennen könnte. So wie der erste sich mit Punkten beschäftigt, in denen man schwere Massen voraussetzt, so würde der letztere zum Gegenstande haben Linien, in welchen Kräfte wirken. Sind a, b, c, d usw. solche Linien, in denen — in jeder in bestimmtem Sinn — Kräfte wirken, die den Zahlen α, β, γ, δ usw. proportional sind, so würde die Gleichung $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d +$ usw. $= 0$ bedeuten, daß diese Kräfte einander das Gleichgewicht halten." (Gauß' Werke Bd. VIII, S. 298.) Der Resultantencalcul, von dem Gauß hier spricht, ist es, mit dem die folgenden Blätter sich beschäftigen.

In der vorliegenden Darstellung möge man kleine Fehler und Ungenauigkeiten milde beurteilen. Wer auf noch wenig betretenen Pfaden einen Berg hinaufzuklimmen sucht, kann wohl einmal über eine Baumwurzel straucheln. Ich habe mich bemüht, die Hauptgedanken so faßlich und klar wie mir möglich war auszudrücken, im einzelnen mag ich wohl manchmal des Guten zu viel oder zu wenig getan haben.

Es bleibt mir zum Schlusse noch die angenehme Pflicht, der Verlagsfirma für die Sorgfalt zu danken, die sie auf Druck und Ausstattung des Buches verwendet, und für das freundliche Entgegenkommen, das sie mir hierbei gezeigt hat.

Straßburg, den 18. Juni 1908.

H. E. Timerding.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Vektoren und Punktgrößen.

Das erste Element der Geometrie ist der Punkt. Er ist definiert als die bestimmt bezeichnete Stelle im Raume. Man legt einen Punkt fest durch seine Koordinaten. Unter Voraussetzung gewisser fest angenommener räumlicher Größen, des Bezugssystems, lassen sich nämlich drei Zahlwerte von bestimmter geometrischer Bedeutung angeben, welche dem festzulegenden Punkte und keinem anderen Punkte zukommen. Gewöhnlich nimmt man hierfür die Abstände des Punktes von drei zueinander rechtwinkligen Ebenen, welche Abstände man in einem bestimmten Sinne positiv und im entgegengesetzten Sinne negativ zu rechnen hat. Es ist nun von Wichtigkeit, nicht bloß den Begriff der (absoluten) Lage eines Punktes, sondern auch den der gegenseitigen oder relativen Lage zweier Punkte einzuführen. Man trifft die Verabredung, zwei Punktepaaren dieselbe gegenseitige Lage zuzuschreiben, wenn ihre geradlinigen Verbindungsstrecken gleich lang und gleich gerichtet sind, wenn also die vier Punkte zusammen die Ecken eines Parallelogramms bilden. Die Lage eines Punktes B gegen einen anderen Punkt A wird demnach durch die Länge und Richtung der Strecke AB fixiert, die von dem Punkte A nach dem Punkte B hinführt. Eine solche der Länge und Richtung nach gegebene Strecke bezeichnet man als einen Vektor. Die Strecke ist vollkommen festgelegt, wenn außerdem ihr Anfangspunkt bestimmt wird. Diesen Anfangspunkt wollen wir den Angriffspunkt des Vektors nennen. Will man den Vektor darstellen, so genügt es nicht, die einfache Strecke in irgendeiner Lage zu geben, da hierdurch ihre Richtung noch nicht in eindeutiger Weise gekennzeichnet ist. Vielmehr hat man dann noch, je nachdem man den einen oder anderen Begrenzungspunkt der Strecke als ihren Anfangspunkt ansieht, die Wahl zwischen zwei einander entgegengesetzten Richtungen. Man muß daher noch durch einen Pfeil den Sinn bezeichnen, in dem die Strecke, von ihrem Anfangspunkte ausgehend, durchlaufen werden soll. Die Vektoren, die durch zwei gleich lange, aber entgegengesetzt gerichtete Strecken repräsentiert werden, nennen wir entgegengesetzte Vektoren.

Die Bezeichnung Vektor, die eine Abkürzung des alten Ausdruckes Radiusvektor ist, rührt von Hamilton her, der auf diesem Begriffe seine Theorie der Quaternionen aufbaute. Er gab eine ausführliche Darstellung dieser Theorie in seinen „Lectures on Quaternions“, die 1853 gedruckt wurden[1]), nachdem er seine neuen Methoden vorher in einer Reihe von Abhandlungen entwickelt hatte, die vom Jahre 1844 an in dem Philosophical Magazine erschienen sind.[2]) In dem gleichen Jahre, 1844, veröffentlichte Graßmann seine „Lineale Ausdehnungslehre“.[3]) In diesem merkwürdigen Buche, das später, 1862, eine völlige Neubearbeitung erfuhr[4]), entwickelte der Verfasser ebenfalls den Vektorbegriff unter der Bezeichnung als Strecke, und zwar in einer abstrakten Verallgemeinerung auf einen Raum von beliebig viel Dimensionen. Die Darstellung ist bei beiden Autoren ebenso verschieden wie der Ausgangspunkt. Hamilton geht von dem einfachen Gedanken aus, ein möglichst handliches Werkzeug zur Behandlung geometrischer und physikalischer Probleme zu gewinnen, indem er die längst bekannte Deutung der komplexen Zahlen durch die Punkte einer Ebene und die daraus fließenden geometrischen Ergebnisse auf den Raum auszudehnen sucht und damit den Weg weiter verfolgt, den vor ihm Bellavitis in seiner Theorie der Äquipollenzen gegangen ist.[5]) Graßmann hingegen geht von dem allgemeinen und völlig abstrakt gefaßten Begriffe der Ausdehnung aus. Indem er die „lineale“ als die einfachste Form der Ausdehnung herausgreift, stellt er sich die Aufgabe, die Gesetze dieser Ausdehnungsform zu erforschen. In der Weite des Gesichtskreises und der Tiefe der Konzeption ist er so Hamilton überlegen, aber die philosophisch gefärbte Grundlegung der Theorie gibt Graßmanns Darstellung eine Abstraktheit, welche den Zusammenhang mit den bisherigen Wegen und Zielen der Mathematik mehr verhüllt als klarlegt. Erst in späteren Zeiten hat er die Ausbeutung seiner Lehre für vertrautere Aufgaben der

1) Gehalten hat er diese Vorlesungen vom Jahre 1848 an.

2) Die erste Mitteilung, die bereits das Wesentliche seiner Theorie enthält, machte er am 13. November 1843 der irischen Akademie. Sie ist veröffentlicht in Proceedings of the Roy. Irish Acad. 2 (1844) und im Philosophical Magazine (2) 25 (1844) S. 10. Historische Einzelheiten findet man in Graves, Life of Sir William Rowan Hamilton, vol. II, S. 432 seq.

3) Eine neue, kritische Ausgabe in Bd. 1, Teil 1 von Graßmanns gesammelten math. u. phys. Werken. Hinzugefügt ist hier die „Geometrische Analyse“, welche eine gedrängte Darstellung der Ausdehnungslehre mit Beschränkung auf den Raum der Anschauung gibt.

4) Werke, Bd. 1, Teil 2 (1896).

5) Zuerst Annali di Scienze del Regno Lombardo Veneto 5 (1835) und ebenda 7 (1837).

Geometrie, Analysis und Physik angebahnt. Die Anwendung auf den anschaulichen Raum von drei Dimensionen bleibt indes eine Beschränkung seiner Theorie. Innerhalb dieser Beschränkung aber ist eine organische Verschmelzung der Hamiltonschen und der Graßmannschen Betrachtungsweise möglich und trotz einseitiger Parteigänger heute im wesentlichen erreicht, wenngleich in der Bezeichnungsweise eine erschreckende Vielgestaltigkeit herrscht.

Vielleicht das Hauptverdienst Hamiltons ist die zweckmäßige Festsetzung von Differentialoperationen an räumlich ausgedehnten Größen, die für die mathematische Physik eine entscheidende Bedeutung gewonnen haben. In der Grundlegung der Theorie aber ist Graßmanns Scheidung von inneren und äußeren Produkten einfacher und natürlicher als die Quaternionen, die Hamiltons Theorie den Namen gegeben haben. Diese bleiben auf besondere geometrische und kinematische Probleme beschränkt, denen sie ihrem Wesen nach angepaßt sind. Deshalb schließen sich auch die folgenden Entwicklungen zunächst an Graßmann an.

Der Anfang der Hamiltonschen wie der Graßmannschen Lehre ist übereinstimmend die schon von Bellavitis gefundene Addition und Subtraktion der Vektoren.

Sind zwei Vektoren von beliebiger Länge aber gleicher Richtung gegeben, so liegt es nahe, eine Regel aufzustellen, nach der diese Vektoren sich durch Addition zu einem einzigen Vektor vereinigen lassen. Dieser durch Addition entstehende Vektor soll die gleiche Richtung haben wie die beiden gegebenen Vektoren, seine Länge muß dann die Summe von den Längen dieser Vektoren sein. Sind die Vektoren entgegengesetzt statt gleich gerichtet, so muß man ihre Längen subtrahieren statt sie zu addieren. Zwei entgegengesetzte Vektoren ergeben so als Summe einen verschwindenden Vektor, und man kann die Subtraktion gleich oder entgegengesetzt gerichteter Vektoren auf deren Addition zurückführen, indem man die Regel gibt, daß man statt einen Vektor zu subtrahieren den entgegengesetzten Vektor zu addieren hat.

Die Regel für die Addition gleichgerichteter Vektoren kann man nun auf eine solche Form bringen, daß sie sich sofort auf beliebig gerichtete Vektoren übertragen läßt. Man kann nämlich sagen: Um einen Vektor zu einem anderen zu addieren, lege man ihn ohne Änderung seiner Richtung so an diesen Vektor, daß sein Anfangspunkt mit dessen Endpunkt zusammenfällt, dann ist der Vektor, der von dem Anfangspunkte des letzteren Vektors nach dem Endpunkte des ersteren, zum anderen hinzugefügten Vektors hinführt, der gesuchte Summenvektor.

Sind die zu addierenden Vektoren ungleich gerichtet, so schließen sie sich mit dem Summenvektor zu einem Dreiecke zusammen. Sind

A, B, C die Ecken dieses Dreiecks, bezeichnet man ferner mit AB den Vektor, der von A nach B hinführt usw., so ist zu setzen:

$$AB + BC = AC. \tag{1}$$

Dies ist die erste Grundgleichung der Vektorenrechnung.

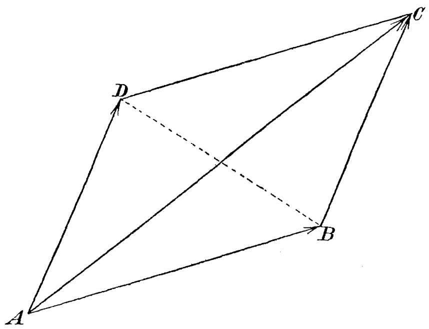

Fig. 1.

Vervollständigt man das Dreieck ABC durch Hinzufügung eines kongruenten Dreiecks CDA zu einem Parallelogramm $ABCD$, so ergibt die nochmalige Anwendung der Additionsregel auch:

$$AD + DC = AC. \tag{2}$$

Es sind aber die in den Gleichungen (1) und (2) addierten Vektoren paarweise einander gleich, weil die Gegenseiten des Parallelogramms gleich lang und gleich gerichtet sind. Es wird so:

$$AB = DC, \quad BC = AD,$$

und setzen wir mit kürzerer Bezeichnung[1]):

$$AB = \mathbf{a}, \quad BC = \mathbf{b},$$

so folgt aus den Gleichungen (1) und (2):

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \tag{3}$$

Bei der Addition der Vektoren sind also die Summanden vertauschbar, es gilt für sie das kommutative Gesetz.

Statt die zu addierenden Vektoren aneinander zu legen, kann man sie auch von demselben Punkt A ausgehen lassen. Sie bestimmen dann als die Seiten AB und AD das Parallelogramm $ABCD$ und die Diagonale AC desselben, die mit den zueinander addierten Vektoren den Ausgangspunkt gemein hat, repräsentiert dann den Summenvektor.

---

1) Was die typographische Charakterisierung der Vektoren betrifft, so nahm Graßmann dafür kleine lateinische Buchstaben, Hamilton griechische Minuskeln. Maxwell bezeichnete die in der Elektrizitätslehre vorkommenden Vektoren mit den Frakturbuchstaben 𝔄 bis 𝔎. Heaviside, dem wir folgen, adoptierte (Electromagnetic theory) mit ausführlicher Begründung Minuskeln in fetter Antiqua (Clarendon type), während Gibbs (Vector analysis) die Majuskeln derselben Schriftart wählte.

Sind drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu vereinigen, so lasse man sie als Strecken AB, AD, AE von einem Punkte A ausgehen. Diese Strecken bestimmen dann, wenn sie nicht einer Ebene angehören, als Kanten ein Parallelepipedon, dessen weitere Ecken C, F, G, H heißen mögen, und zwar sollen $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$ die Ecken je einer Seitenfläche dieses Parallelepipedons sein. Nach der Grundregel der Addition findet man dann zunächst, weil sowohl $ABCD$ wie $ACGE$ ein Parallelogramm bilden:

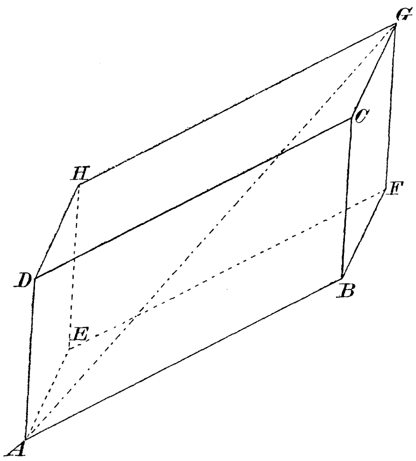

Fig. 2.

$$AB + AD = AC,$$

$$AC + AE = AG,$$

und diese beiden Gleichungen kann man in die eine:

$$(4) \qquad (AB + AD) + AE = AG$$

zusammenziehen. Anderseits wird nach derselben Regel:

$$AD + AE = AH, \quad AB + AH = AG$$

oder:

$$(5) \qquad AB + (AD + AE) = AG.$$

Führt man die kürzere Bezeichnung der Vektoren durch einen Buchstaben ein ($AE = \mathfrak{c}$), so folgt aus den Gleichungen (4) und (5):

$$(6) \qquad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}).$$

Die Summe dreier Vektoren ist sonach davon unabhängig, welche zwei von diesen drei Vektoren man zuerst vereinigt, es gilt für die Addition das assoziative Gesetz, das sich auch für den Fall dreier in einer Ebene liegenden Vektoren leicht nachweisen läßt.

Die Summe der drei Vektoren wird geometrisch durch die Diagonale AG des Parallelepipedons dargestellt, das sie als drei in einem Punkte A zusammenstoßende Kanten bestimmen.

Gehen wir nun auf das Parallelogramm $ABCD$ zurück und ziehen in ihm noch die zweite Diagonale BD, so folgt aus der Grundregel der Vektoraddition:

$$AB + BD = AD,$$

woraus wir die andere Gleichung:

$$AD - AB = BD \tag{7}$$

ableiten, indem wir definitionsweise unter der Differenz der Vektoren AD und AB den Vektor verstehen, der zu AB addiert den Vektor AD liefert. Die Differenz zweier Vektoren mit demselben Anfangspunkte ist also durch den Vektor gegeben, der von dem Endpunkte des Subtrahenden nach dem Endpunkte des Minuenden hinführt.

Anderseits aber wird:

$$BD = BC + CD.$$

Der Vektor BC ist hierin gleich dem Vektor AD der vorigen Gleichung, der Vektor CD ist dem Vektor AB entgegengesetzt. Man findet also die Differenz zweier Vektoren, indem man zu dem Minuenden den dem Subtrahenden entgegengesetzten Vektor addiert, in Übereinstimmung mit der für die Subtraktion gleichgerichteter Vektoren gegebenen Vorschrift. Nach dieser Regel ist es gestattet, den zu einem Vektor $\mathbf{a}$ entgegengesetzten Vektor durch das Symbol $-\mathbf{a}$ zu bezeichnen. Dies läßt sich auch durch die Gleichung:

$$BA = -AB \tag{8}$$

ausdrücken.

Addiert man einen Vektor $\mathbf{a}$ wiederholt zu sich selbst, so erhält man einen gleichgerichteten Vektor, dessen Länge ein Vielfaches des vorgelegten Vektors ist, etwa das m-fache. Dann wollen wir auch den gewonnenen Vektor als das m-fache des ursprünglichen Vektors ansehen und mit $m \cdot \mathbf{a}$ bezeichnen. Der Vektor $\mathbf{a}$ selbst ist der m^{te} Teil oder, wenn man will, das $\frac{1}{m}$fache des Vektors $m \cdot \mathbf{a}$. Man teilt also einen Vektor durch eine ganze Zahl, indem man seine Länge durch diese Zahl teilt und seine Richtung ungeändert läßt. Daraus ist weiter zu sehen, wie ein Vektor mit irgendeiner, zunächst rationalen Zahl zu multiplizieren ist. Man multipliziere seine Länge mit dieser Zahl und lasse seine Richtung ungeändert.

Nach den aufgestellten Regeln läßt sich ein beliebiger Vektor $\mathbf{a}$ auf drei Vektoreinheiten $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$[1]) in folgender Weise zurückführen: In einem gewöhnlichen, rechtwinkligen Koordinatensystem seien x, y, z die Koordinaten des Anfangspunktes A, x', y', z' die Koordinaten des Endpunktes B einer den Vektor $\mathbf{a}$ repräsentierenden Strecke AB. Dann läßt sich der Vektor $\mathbf{a}$ als die Summe dreier Vektoren auffassen, welche mit den Koordinatenachsen gleichgerichtet sind und der Reihe nach die Längen:

1) Diese Bezeichnung ist die Hamiltonsche. Graßmann schreibt e_1, e_2, e_3.

$$(9) \qquad \mathfrak{x} = x' - x, \quad \mathfrak{y} = y' - y, \quad \mathfrak{z} = z' - z$$

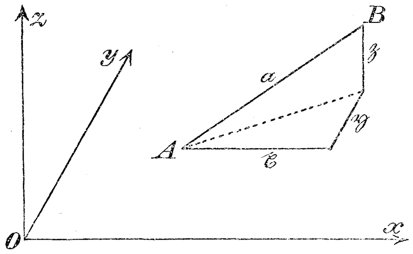

Fig. 3.

haben. Diese Größen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ heißen die Komponenten des Vektors nach den Koordinatenachsen. Führen wir nun drei Vektoren $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ von der Länge Eins ein, welche mit den Koordinatenachsen gleichgerichtet sind, indem $\mathbf{i}$ nach der positiven Seite der x-Achse hinweist usw., dann läßt sich der Vektor $\mathbf{a}$ schreiben in der Form:

$$(10) \qquad \mathbf{a} = \mathfrak{x}\mathbf{i} + \mathfrak{y}\mathbf{j} + \mathfrak{z}\mathbf{k}.$$

Die Länge des Vektors $\mathbf{a}$ bezeichnen wir mit $|\mathbf{a}|$. Es wird dann

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}.$$

Sind λ, μ, ν die Winkel, welche die Richtung dieses Vektors mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen einschließt, so wird

$$\mathfrak{x} = |\mathbf{a}| \cos\lambda, \quad \mathfrak{y} = |\mathbf{a}| \cos\mu, \quad \mathfrak{z} = |\mathbf{a}| \cos\nu.$$

Es sei $\mathfrak{b}$ ein zweiter Vektor, und zwar:

$$(10\text{a}) \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{x}'\mathbf{i} + \mathfrak{y}'\mathbf{j} + \mathfrak{z}'\mathbf{k}.$$

Soll nun der Anfangspunkt dieses Vektors $\mathfrak{b}$ mit dem Endpunkte des ersten Vektors $\mathbf{a}$, welcher die Koordinaten x', y', z' hatte, zusammenfallen, so werden die Koordinaten des Endpunktes von $\mathfrak{b}$:

$$x'' = x' + \mathfrak{x}', \quad y'' = y' + \mathfrak{y}', \quad z'' = z' + \mathfrak{z}'.$$

Der Summenvektor von $\mathbf{a}$ und $\mathfrak{b}$ muß aber nach der Grundregel diesen Punkt zum Endpunkt und den Punkt A mit den Koordinaten x, y, z zum Anfangspunkte haben, seine Komponenten werden also:

$$x'' - x = x' + \mathfrak{x}' - x, \quad y'' - y = y' + \mathfrak{y}' - y, \quad z'' - z = z' + \mathfrak{z}' - z$$

und mit Rücksicht auf die Beziehungen (9) können wir somit diesen Vektor schreiben:

$$(11) \qquad \mathbf{a} + \mathfrak{b} = (\mathfrak{x} + \mathfrak{x}')\mathbf{i} + (\mathfrak{y} + \mathfrak{y}')\mathbf{j} + (\mathfrak{z} + \mathfrak{z}')\mathbf{k}.$$

Vergleichen wir dies mit den Ausdrücken (10) für $\mathbf{a}$ und $\mathfrak{b}$, so sehen wir, daß zwei Vektoren addiert werden, indem man ihre Komponenten addiert.

Vertauscht man Anfangs- und Endpunkt des ersten Vektors $\mathbf{a}$, so erhält man den entgegengesetzten Vektor $-\mathbf{a}$ und für dessen Komponenten die Werte:

$$x - x' = -\mathfrak{x}, \quad y - y' = -\mathfrak{y}, \quad z - z' = -\mathfrak{z},$$

d. h. die entgegengesetzten Werte von den Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$. Addiert man den Vektor $-\mathfrak{a}$ zu dem Vektor $\mathfrak{b}$, so findet man:

$$(12) \qquad \mathfrak{b}-\mathfrak{a}=(\mathfrak{x}'-\mathfrak{x})\,\mathbf{i}+(\mathfrak{y}'-\mathfrak{y})\,\mathbf{j}+(\mathfrak{z}'-\mathfrak{z})\,\mathbf{k}.$$

Zwei Vektoren werden also subtrahiert, indem man ihre Komponenten subtrahiert.

Ein Vektor läßt sich symbolisch als die Differenz zweier Punkte deuten, indem man definitionsweise schreibt[1]):

$$(13) \qquad AB=\mathbf{B}-\mathbf{A}.$$

In der Tat zeigt die Gleichung:

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}-\mathbf{A})=\mathbf{B},$$

die aus der allgemeinen Definition der Differenz folgt, daß sich der Ausdruck $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ als eine Operation deuten läßt, die, an dem Punkte $\mathbf{A}$ ausgeführt, ihn in $\mathbf{B}$ überführt, und diese Operation wird anderseits geometrisch durch die Strecke verbildlicht, die von dem Punkte A nach dem Punkte B hinführt.

Die grundlegende Gleichung (1) schreibt sich in dieser neuen Symbolik:

$$(\mathbf{B}-\mathbf{A})+(\mathbf{C}-\mathbf{B})=\mathbf{C}-\mathbf{A}$$

übereinstimmend mit den Regeln der Subtraktion.

Wir denken uns nun m Vektoren, die, alle von demselben Punkte P ausgehend, nach den Punkten $P_1, P_2, \ldots P_m$ hinlaufen. Die Summe aller dieser Vektoren sei durch einen Vektor PS repräsentiert. Von diesem Vektor nehmen wir den m^{ten} Teil, und dieser sei durch einen Vektor PR gegeben, so daß $PS=m\cdot PR$ wird. Die sich so ergebende Gleichung:

$$(14) \qquad PP_1+PP_2+\cdots+PP_m=m\cdot PR$$

läßt sich in der neuen Symbolik schreiben:

$$(14\text{a}) \qquad (\mathbf{P}_1-\mathbf{P})+(\mathbf{P}_2-\mathbf{P})+\cdots+(\mathbf{P}_m-\mathbf{P})=m(\mathbf{R}-\mathbf{P}).$$

Hieraus folgt, wenn man, die Punkte wie algebraische Größen behandelnd, auf beiden Seiten der Gleichung $m\cdot\mathbf{P}$ addiert, die weitere Gleichung:

$$(15) \qquad \mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\cdots+\mathbf{P}_m=m\cdot\mathbf{R},$$

die von der Lage des Punktes P unabhängig ist.

Wenn man statt dieser noch nicht gerechtfertigten Operation mit Punkten zu der Gleichung (14) die identische Vektorgleichung:

---

1) Man vergleiche die klaren, ausführlichen Auseinandersetzungen in der ersten Vorlesung von Hamiltons Lectures on Quaternions. Wir adoptieren die dort gebrauchte Bezeichnung durch halbfette Antiqua für Punkte, die als Gegenstand einer symbolischen Rechnung dienen, während wir für Punkte in rein geometrischem Sinne die gewöhnlich gebrauchte Kursive beibehalten.

$$QP + QP + \cdots + QP = m \cdot QP,$$

wobei Q ein beliebiger Punkt ist, addiert, so erhält man die Gleichung:

$$QP_1 + QP_2 + \cdots + QP_m = m \cdot QR,$$

die zeigt, daß die Gültigkeit der Gleichung (14) von der Wahl des Punktes P unabhängig ist und somit die Lage des Punktes R lediglich von der Lage der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ abhängt. Dadurch erscheint auch die Gleichung (15) als Ersatz der Gleichung (14) bei beliebig gelassenem P gerechtfertigt. Der Punkt R heißt das Zentrum der mittleren Entfernungen für das Punktsystem $P_1, P_2, \ldots P_n$.[1])

Wählen wir in der Gleichung (14) für den willkürlichen Punkt P den Koordinatenursprung O, so wird sie:

$$OP_1 + OP_2 + \cdots + OP_m = m \cdot OR.$$

Sind aber x_i, y_i, z_i die Koordinaten des Punktes P_i, x, y, z die Koordinaten von R, so ist:

$$OP_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}, \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$
$$OR = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

Setzt man diese Werte in die vorhergehende Gleichung ein, so liefert sie die folgenden Werte für die Komponenten des Vektors $m \cdot OR$:

$$(16) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_m = m \cdot x, \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_m = m \cdot y, \\ z_1 + z_2 + \cdots + z_m = m \cdot z \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen uns, daß die Koordinaten des Zentrums der mittleren Entfernungen die arithmetischen Mittel aus den Koordinaten der Punkte des Punktsystems sind.

Die Gleichung (15) enthält auf ihrer linken Seite die Summe einer Anzahl beliebiger Punkte. Sie läßt erkennen, daß zwei Systeme von Punkten nur dann dieselbe Summe liefern können, wenn sie an Anzahl gleich sind. Außerdem muß das Zentrum der mittleren Entfernungen für beide Punktsysteme dasselbe sein. Man kann alle Punkte des Systems sich in diesem Zentrum vereinigt denken, ohne daß die Summe sich ändert, und so erscheint als Resultat der Addition ein vielfacher Punkt. Wenn man solche vielfache Punkte einmal in Betracht zieht, so kann man auch die Punkte des Systems in beliebigen Gruppen sich zu vielfachen Punkten vereinigen lassen und erhält dann statt der Gleichung (15) eine Gleichung:

$$(17) \qquad m_1 \mathbf{P}_1 + m_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + m_\nu \mathbf{P}_\nu = m \cdot \mathbf{R},$$

wobei:

$$(18) \qquad m = m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu$$

1) Carnot, Géométrie de Position (1803) S. 315.

anzunehmen ist. Die Gleichungen (16) gehen gleichzeitig über in die folgenden:

$$(19)\qquad \begin{cases} m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + \cdots + m_\nu\, x_\nu = m \cdot x, \\ m_1\, y_1 + m_2\, y_2 + \cdots + m_\nu\, y_\nu = m \cdot y, \\ m_1\, z_1 + m_2\, z_2 + \cdots + m_\nu\, z_\nu = m \cdot z. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben zunächst nur einen Sinn, wenn alle m ganze Zahlen bedeuten. Es liegt aber nahe, sie auch auf den Fall zu erweitern, wo die m beliebige Zahlen sind. Was wir zunächst als einfache Punkte angesehen haben, können wir nämlich wieder als Konglomerate einer bestimmten Zahl, sagen wir n, Teilpunkte auffassen, oder ausführlicher ausgedrückt, wir sehen auch jeden einfachen Punkt als Zentrum der mittleren Entfernungen für ein System von n Punkten an, die wir schließlich einander und damit dem Zentrum unendlich nahe rücken lassen. Dann aber können wir für die Größen m_i statt ganzer Zahlen gebrochene Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner n nehmen. Da nun die Zahl n an und für sich ganz beliebig wählbar ist, so können die Größen m auch beliebige rationale Zahlen bedeuten. Sie bleiben aber einstweilen auf positive Werte beschränkt.

Wir sind so auf Punkte gekommen, die mit einem beliebigen positiven Zahlfaktor behaftet sind. Wir nennen dieselben nach Graßmann P u n k t g r ö ß e n. Sie sind in der Physik als Massenpunkte bekannt. In die reine Geometrie sind sie 1827 durch Moebius, in seinem Baryzentrischen Calcul[1]), eingeführt und zur Grundlage einer geometrischen Rechnung gemacht worden. Wir wollen gelegentlich der Einfachheit halber den Ausdruck M a s s e für den Zahlfaktor m der Punktgröße beibehalten. Er ist, wie die Gleichung (17) zeigt, als ein wirklicher Faktor anzusehen, mit dem der gleichliegende einfache Punkt multipliziert erscheint. Die einfachen Punkte selbst lassen sich als Punktgrößen von der Masse Eins auffassen. Die Formeln (19), zu denen die Gleichung:

$$(18)\qquad m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu = m$$

hinzuzunehmen ist, liefern die Regel für die Addition der Punktgrößen. Es liegt nahe, die Zahlwerte:

$$m_i\, x_i,\ m_i\, y_i,\ m_i\, z_i,\ m_i$$

als die K o o r d i n a t e n d e r P u n k t g r ö ß e n anzusehen, dann gestatten die Gleichungen (19) und (18) die einfache Ausdeutung: P u n k t g r ö ß e n w e r d e n a d d i e r t, i n d e m m a n i h r e K o o r d i n a t e n a d d i e r t. Um in Übereinstimmung mit längst bekannten Dingen zu bleiben,

1) Neudruck in Bd. 1 von Moebius' Werken, hsg. v. R. Baltzer (1885). Man vergleiche dort auch (S. 613) die Bemerkungen Moebius' zu der von Graßmann in seiner Geometrischen Analyse entwickelten Punktrechnung.

nennen wir die durch die Gleichung (18) festgelegte Größe m die Gesamtmasse des Systems von Punktgrößen und den Punkt, dessen Koordinaten x, y, z durch (19) bestimmt werden, den Schwerpunkt dieses Systems. Die Summe des Systems von Punktgrößen ist dann eine Punktgröße, deren Masse die Gesamtmasse des Systems ist und deren Lage durch dessen Schwerpunkt gegeben wird.

Sind $p_1, p_2 \cdots$ die Abstände der Systempunkte von einer beliebigen Ebene π, so nennen wir die Summe:

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 + \cdots + m_\nu p_\nu$$

das statische Moment des Punktsystems für die Ebene π. Um den analytischen Ausdruck für dieses statische Moment zu finden, denken wir uns die Gleichung der Ebene π in der Normalform:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = \theta$$

gegeben, in der wir:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

voraussetzen, indem ξ, η, ζ die Richtungskosinus und θ die Länge des aus dem Koordinatenursprung auf die Ebene gefällten Lotes bezeichnen. Dann wird der Abstand des Punktes mit den Koordinaten x_i, y_i, z_i von dieser Ebene einfach:

$$p_i = \xi x_i + \eta y_i + \zeta z_i - \theta$$

und somit das statische Moment:

$$\Sigma m_i p_i = \xi \cdot \Sigma m_i x_i + \eta \cdot \Sigma m_i y_i + \zeta \cdot \Sigma m_i z_i - \theta \cdot \Sigma m_i$$

oder nach (19) und (18):

$$(19) \qquad \Sigma m_i p_i = m(\xi x + \eta y + \zeta z - \theta) = m \cdot p,$$

wenn p den Abstand des Schwerpunktes von der Ebene π bezeichnet. Daraus folgt, daß, wenn zwei Systeme von Punktgrößen dieselbe Summe ergeben, ihre statischen Momente für alle Ebenen des Raumes übereinstimmen. Sie lassen sich auf die statischen Momente einer einzigen Punktgröße reduzieren, und dies ist die durch die Addition resultierende Punktgröße.

Beschränken wir die Addition auf nur zwei Punktgrößen, $m_1 P_1$ und $m_2 P_2$, so wird die Lage des Summenpunktes durch die Koordinaten:

$$(20) \qquad x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

bestimmt. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$x - x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(z_2 - z_1).$$

Diese Formeln zeigen aber, daß der in Rede stehende Schwerpunkt auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2 liegt und seine Abstände von diesen Punkten sich umgekehrt verhalten wie die Massen, mit denen sie behaftet sind. Dies ist das Archimedische Hebelgesetz.

Schreibt man die Formeln, welche die Addition zweier Punktgrößen ausdrücken, in der Gestalt:

$$m\,\mathbf{P} + m_1\,\mathbf{P}_1 = m_2\,\mathbf{P}_2, \quad m + m_1 = m_2,$$

so folgen aus ihnen die Formeln für die Subtraktion zweier Punktgrößen:

$$(21) \qquad m_2\,\mathbf{P}_2 - m_1\,\mathbf{P}_1 = m\,\mathbf{P}, \quad m_2 - m_1 = m,$$

von denen die erste als Ersatz für die drei nicht symbolischen Gleichungen dient:

$$(22) \quad m_2 x_2 - m_1 x_1 = m x, \quad m_2 y_2 - m_1 y_1 = m y, \quad m_2 z_2 - m_1 z_1 = m z,$$

zu denen:

$$m_2 - m_1 = m$$

hinzuzunehmen ist. Zwei Punktgrößen werden also auch subtrahiert, indem man ihre Koordinaten subtrahiert.

Die Formeln (21) versagen, wenn $m_2 = m_1$, also $m = 0$ wird. Setzen wir dann:

$$m_2\,\mathbf{P}_2 - m_1\,\mathbf{P}_1 = m_1\,(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = m_1 \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{v},$$

so wird nach Früherem $\mathfrak{p} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$ ein Vektor, nämlich der Vektor, der von P_1 nach P_2 hinführt. Die gesuchte Differenz $\mathfrak{v}$ ist das m_1-fache dieses Vektors, also wieder ein Vektor. Die Differenz zweier Punktgrößen von gleicher Masse m_1 ist also ein Vektor, den man findet, indem man die Länge der Verbindungsstrecke beider Punktgrößen im Verhältnisse $m_1 : 1$ vergrößert.

Daraus folgt weiter, daß, wenn man zu einer Punktgröße von der Masse m_1 einen Vektor $\mathfrak{v}$ addiert, das Resultat wieder eine Punktgröße von der Masse m_1 ist, deren Lage gegen die erste durch den Vektor $\frac{1}{m_1} \cdot \mathfrak{v}$ bestimmt ist.

Um nun schließlich zu einer analytischen Darstellung einer Punktgröße $\mathfrak{P}$, deren Masse m ist und deren Lage durch die Koordinaten x, y, z gegeben, zu gelangen, legen wir in den Koordinatenursprung O die gleiche Masse m, dann wird:

$$\mathfrak{P} - m\,\mathbf{O} = m\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

und hieraus:

$$(23) \qquad \mathfrak{P} = m \cdot \mathbf{O} + m\,x \cdot \mathbf{i} + m\,y \cdot \mathbf{j} + m\,z \cdot \mathbf{k}.$$

So läßt sich jede Punktgröße symbolisch darstellen, und was wir oben als ihre Koordinaten bezeichnet haben, sind die Koeffizienten in diesem symbolischen Ausdrucke.

Zweites Kapitel.

Vektorprodukte.

Bis jetzt ist nur von der Addition und Subtraktion der Fundamentalgrößen die Rede gewesen. Unsere nächste Aufgabe wird sein, auch ihre Multiplikation und Division in Betracht zu ziehen. Wir wollen mit der Multiplikation der Vektoren beginnen. Diese Multiplikation bezeichnet den Punkt, wo die originale Leistung Hamiltons und Graßmanns anhebt, aber hierbei tritt auch schon die Verschiedenheit ihrer Anschauungen zutage.[1])

Die Multiplikation gewöhnlicher Zahlen a, b, $c \ldots$ gehorcht drei Gesetzen, die als das kommutative, distributive und assoziative Gesetz bezeichnet werden. Das kommutative Gesetz fordert die Vertauschbarkeit der Faktoren und drückt sich in der Formel:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

aus. Das distributive Gesetz betrifft die Multiplikation einer Zahl mit einer Summe und lautet in einer Formel geschrieben:

$$(a + b)\ \ c = a \cdot c + b \cdot c,$$

woraus die andere Formel:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$$

unmittelbar folgt, die in Worten ausgesprochen lautet: Zwei Summen werden multipliziert, indem man jedes Glied der einen mit jedem Glied der anderen multipliziert und die herauskommenden Produkte addiert.

Das assoziative Gesetz endlich bezieht sich auf die wiederholte Multiplikation und besagt, daß das Resultat derselben nicht von der Ordnung, in der die zur Verwendung kommenden Faktoren miteinander multipliziert werden, abhängt. Es drückt sich in der Formel aus:

$$(a \cdot b)\, c = a \cdot (b \cdot c).$$

Dieses letzte Gesetz stützt sich auf die selbstverständlich klingende Tatsache, daß das Produkt zweier Zahlen wieder eine Zahl ist und also aufs neue mit einer Zahl multipliziert werden kann. Wenn wir aber eine der Zahlenmultiplikation analoge Operation mit Vektoren suchen, so können wir nicht von vornherein sagen, daß das Produkt zweier Vektoren wieder ein Vektor sei, vielmehr müssen wir erwarten,

---

1) Was Graßmann betrifft, so vergleiche man auch seine Arbeit Sur les différents genres de multiplication im Journal für Math. 49 (1855) S. 125, wiederabgedruckt in seinen Werken II[1] S. 199.

auf diese Weise zu einer neuen Art räumlicher Größen zu gelangen. Wir können also von der Geltung des assoziativen Gesetzes zunächst absehen. Ebensowenig ist ein Grund vorhanden, an dem kommutativen Gesetze unbedingt festzuhalten. Dagegen soll das distributive Gesetz in allen Fällen gelten, weil auf diese Weise sich die Möglichkeit eröffnet, aus der Multiplikation der Einheitsvektoren mit sich selbst und miteinander die Multiplikation zweier beliebiger Vektoren abzuleiten.

Sind also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ irgendwelche Vektoren und drücken wir auch die Multiplikation der Vektoren durch einen zwischengesetzten Punkt aus, so soll allgemein:

$$(1) \qquad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}$$

sein, welche Regel sich sofort auf die Multiplikation von zwei Summen mit beliebig vielen Gliedern überträgt. Setzen wir in jeder der beiden Summen die Glieder alle einander gleich, so ergibt sich für irgendwelche ganze Zahlen m, n die Relation:

$$(2) \qquad (m\,\mathfrak{a}) \cdot (n\,\mathfrak{b}) = m\,n\,(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Hieraus folgt aber weiter, daß auch:

$$(3) \qquad \frac{\mathfrak{a}}{m'} \cdot \frac{\mathfrak{b}}{n'} = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{m' \cdot n'}$$

ist, wenn wieder m' und n' ganze Zahlen bedeuten. Denn aus dieser Gleichung folgt, wenn man ihre beiden Seiten mit $m' \cdot n'$ multipliziert:

$$m' \cdot n' \cdot \left(\frac{\mathfrak{a}}{m'} \cdot \frac{\mathfrak{b}}{n'}\right) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber nach (2) in der Tat:

$$= m' \frac{\mathfrak{a}}{m'} \cdot n' \frac{\mathfrak{b}}{n'} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b},$$

womit die Gleichung (3) bewiesen ist. Indem wir (2) und (3) zusammenfassen, können wir allgemein setzen:

$$(4) \qquad p\,\mathfrak{a} \cdot q\,\mathfrak{b} = p\,q\,(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}),$$

wenn p, q irgendwelche rationale Zahlen bedeuten.

Wenn nun zwei Vektoren in der Form:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{a} &= \mathfrak{x}\,\mathfrak{i} + \mathfrak{y}\,\mathfrak{j} + \mathfrak{z}\,\mathfrak{k}, \\ \mathfrak{b} &= \mathfrak{x}'\mathfrak{i} + \mathfrak{y}'\mathfrak{j} + \mathfrak{z}'\mathfrak{k} \end{aligned}$$

gegeben sind, so ergibt sich aus der Anwendung der Regeln (1) und (4) für das Produkt dieser beiden Vektoren sofort der Ausdruck:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = {} & \mathfrak{x}\mathfrak{x}'(\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i}) + \mathfrak{x}\mathfrak{y}'(\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j}) + \mathfrak{x}\mathfrak{z}'(\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k}) \\ & + \mathfrak{y}\mathfrak{x}'(\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{i}) + \mathfrak{y}\mathfrak{y}'(\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j}) + \mathfrak{y}\mathfrak{z}'(\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k}) \\ & + \mathfrak{z}\mathfrak{x}'(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{i}) + \mathfrak{z}\mathfrak{y}'(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{j}) + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}). \end{aligned}$$

Dieses ist also die allgemeinste Form für das Produkt zweier Vektoren. Dasselbe läßt sich mithin als lineare Funktion von 9 Einheiten, nämlich den Produkten der Einheitsvektoren $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$ usw., darstellen und bezeichnet so in der Tat eine Größe höherer Ordnung, als es die Vektoren selbst sind.

Das durch die Formel (6) gegebene Vektorenprodukt ist aber abhängig von der Wahl des zugrunde gelegten Koordinatensystems oder, was dasselbe heißt, von der Lage der Einheitsvektoren. Wir wollen es deshalb das *analytische Produkt* der Vektoren nennen[1]), indem es seinem Wesen nach in einem durch die analytischen Ausdrücke der Vektoren mitbestimmten höheren analytischen Ausdrucke besteht. Dagegen ist es auf der anderen Seite eine natürliche Forderung, daß sich dem Vektorprodukte auch eine geometrische Bedeutung geben lassen soll, die nun ihrerseits nicht von der Wahl der Einheitsvektoren, sondern lediglich von den multiplizierten Vektoren abhängt. Ein solches Produkt soll dann ein *geometrisches Produkt* heißen.

Um zu derartigen Produkten zu gelangen, überlegen wir, daß sich, da die geometrische Bedeutung des Produktes von der Wahl des Koordinatensystems nicht abhängen soll, dem letzteren eine besondere Lage gegen die zu multiplizierenden Vektoren geben läßt, ohne daß das Produkt seine geometrische Bedeutung verändern kann. Wir legen deshalb den Koordinatenursprung in den gemeinsamen Ausgangspunkt der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die x-Achse lassen wir mit dem Vektor $\mathfrak{a}$ zusammen- und den Vektor $\mathfrak{b}$ in die xy-Ebene fallen. Sind dann noch a und b die Längen der beiden Vektoren, φ der Winkel, den sie bilden, so ist zu setzen:

$$\mathfrak{x} = a, \qquad \mathfrak{y} = 0, \qquad \mathfrak{z} = 0,$$
$$\mathfrak{x}' = b \cos \varphi, \quad \mathfrak{y}' = b \sin \varphi, \quad \mathfrak{z}' = 0,$$

und der Ausdruck (6) für das Produkt reduziert sich somit auf:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a b \cos \varphi \, (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + a b \sin \varphi \, (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}).$$

Setzen wir bei dieser besonderen Wahl der Einheitsvektoren:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathfrak{o}, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathfrak{u},$$

so daß $\mathfrak{o}$ nur von der Richtung des ersten Vektors, $\mathfrak{u}$ von dieser Richtung und der Stellung der Verbindungsebene beider Vektoren abhängen kann, dann wird das Produkt:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a b \cos \varphi \, \mathfrak{o} + a b \sin \varphi \, \mathfrak{u}. \tag{7}$$

1) Gibbs bezeichnet es als Dyade.

Wir drücken nun die in dem Produkte auftretenden Zahlgrößen $ab\cos\varphi$ und $ab\sin\varphi$ durch die Komponenten der beiden Vektoren in einem beliebigen Koordinatensystem aus. Der Einfachheit halber können wir den Ursprung auch dieses Koordinatensystems mit dem gemeinsamen Angriffspunkte der beiden Vektoren zusammenfallen lassen, deren Komponenten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ sind dann die Koordinaten ihrer Endpunkte, und nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie haben wir:

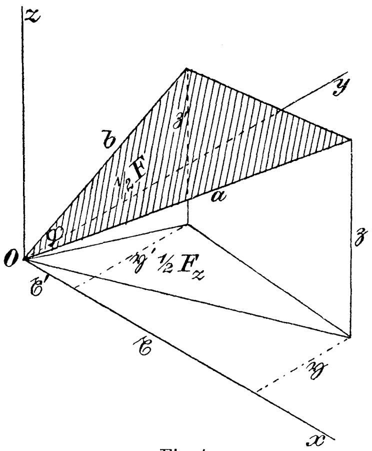

Fig. 4.

$$a = \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}\,,$$
$$b = \sqrt{\mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2 + \mathfrak{z}'^2}$$

und:

$$(8)\qquad \begin{cases} ab\cos\varphi = \mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}', \\ ab\sin\varphi = \sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\mathfrak{y}')^2 + (\mathfrak{z}\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}\mathfrak{z}')^2 + (\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}')^2}. \end{cases}$$

Der letztere Ausdruck bedeutet die Fläche F des durch die Vektoren als zwei Seiten bestimmten Parallelogramms (oder die doppelte Fläche des von den beiden Vektoren gebildeten Dreiecks). Die Projektionen F_x, F_y, F_z dieser Fläche auf die Koordinatenebenen sind:

$$(9)\qquad \begin{cases} F_x = \mathfrak{y}\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\mathfrak{y}', \\ F_y = \mathfrak{z}\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}\mathfrak{z}', \\ F_z = \mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}', \end{cases}$$

demnach wird:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

und bezeichnen wir mit λ, μ, ν die Winkel, welche die Richtung einer Normalen auf der Verbindungsebene der beiden Vektoren mit den Koordinatenachsen bildet, so ist:

$$(10)\qquad \cos\lambda = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\mu = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\nu = \frac{F_z}{F}.$$

Setzen wir nun, was erlaubt ist:

$$(11)\qquad \mathfrak{u} = \cos\lambda \cdot \mathfrak{i} + \cos\mu \cdot \mathfrak{j} + \cos\nu \cdot \mathfrak{k},$$

wo $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ neue, noch zu bestimmende Symbole sind, die wieder nur von der Stellung der Verbindungsebene beider Vektoren und der Richtung des ersten Vektors abhängen können, so wird die Gleichung (7), indem man mittelst (8), (9), (10), (11) die Werte auf den rechten Seiten durch die allgemeinen Komponenten der Vektoren ausdrückt:

$$(12) \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}')\,\mathfrak{o} \\ + (\mathfrak{y}\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\mathfrak{y}')\,\mathfrak{i} + (\mathfrak{z}\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}\mathfrak{z}')\,\mathfrak{j} + (\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}')\,\mathfrak{k}.$$

Wir haben so das Produkt wieder auf einen Ausdruck gebracht, der in den Komponenten der beiden Vektoren bilinear ist. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem allgemeinen (6), so sieht man, daß beide in Übereinstimmung gebracht werden, wenn

$$(13) \qquad \begin{gathered} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathfrak{o}, \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathfrak{i}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathfrak{j}, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathfrak{k} \end{gathered}$$

gesetzt wird.

Es zeigt sich auf diese Weise, daß das Symbol $\mathfrak{o}$, das nach seiner ursprünglichen Einführung von der Richtung des ersten Vektors $\mathbf{a}$ abhängen kann, von dieser Richtung unabhängig ist. Lassen wir die beiden Vektoren zusammenfallen, setzen wir also in der Gleichung (7) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{e}$, indem $\mathbf{e}$ einen Vektor bezeichnet, dem wir die Länge 1 geben wollen, so daß auf der rechten Seite der Gleichung $a = b = 1$ und ferner wegen des Zusammenfallens der Vektoren $\varphi = 0$ wird, dann finden wir:

$$(14) \qquad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \mathfrak{o},$$

d. h. jeder Vektor von der Länge Eins ergibt mit sich selbst multipliziert den Wert $\mathfrak{o}$. Ein beliebiger Vektor $\mathbf{a}$ von der Länge a ergibt dann mit sich selbst multipliziert den Wert:

$$(15) \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2\,\mathfrak{o}.$$

Das Symbol $\mathfrak{u}$ wird jetzt nach (11) und (13):

$$\mathfrak{u} = \cos\lambda\,(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) + \cos\mu\,(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + \cos\nu\,(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}),$$

es hängt also nur von der Stellung der Verbindungsebene der beiden Vektoren, nicht aber von der Richtung des ersten Vektors ab und kann direkt als die symbolische Darstellung dieser Ebenenstellung angesehen werden.

Die Gleichung (7) zeigt dann, daß das geometrische Produkt zweier Vektoren ungeändert bleibt, erstlich wenn man beide Vektoren in ihrer Verbindungsebene mit Beibehaltung des Winkels zwischen ihnen beliebig herumdreht, zweitens wenn man den einen Vektor in demselben Verhältnisse verkleinert, wie man den anderen vergrößert, so daß das Produkt $a \cdot b$ ungeändert bleibt.

In dem Ausdrucke:

$$(7) \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\varphi\,\mathfrak{o} + ab\sin\varphi\,\mathfrak{u}$$

ist der Winkel φ von dem ersten Vektor nach dem zweiten hin gerechnet. Wenn man nun die beiden Vektoren vertauscht, so ändert der Winkel seinen Sinn, wird also $-\varphi$, während a, b und $\mathfrak{u}$ ungeändert bleiben. Wir finden also:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = ab \cos\varphi\, \mathfrak{o} - ab \sin\varphi\, \mathfrak{u}. \tag{7a}$$

Es ist mithin im allgemeinen nicht $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, d. h. das kommutative Gesetz nicht erfüllt. Die Gleichung (7) läßt aber erkennen, daß das geometrische Produkt in zwei Teile zerfällt, von denen der erste, $ab \cos\varphi\, \mathfrak{o}$, eine reine Zahl, mit einer unabhängigen Einheit $\mathfrak{o}$ behaftet, der zweite, $ab \sin\varphi\, \mathfrak{u}$, dagegen von der Stellung der Verbindungsebene beider Vektoren abhängig ist. Diese beiden Teile können wir trennen und einzeln als zwei verschiedene Vektorenprodukte ansehen. Den ersten Teil schreiben wir, mit Fortlassung der dann überflüssigen Einheit $\mathfrak{o}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a\, b \cos\varphi, \tag{16}$$

er heißt nach Graßmann das innere Produkt der beiden Vektoren. Den zweiten Teil drücken wir wie folgt aus:

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}] = ab \sin\varphi\ \mathfrak{u}, \tag{17}$$

Graßmann nennt ihn das äußere Produkt der beiden Vektoren.[1]) Das innere Produkt verschwindet, wenn die beiden Vektoren zueinander normal, das äußere, wenn sie einander gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Im ersteren Falle ist nämlich $\varphi = 90^0$, also $\cos\varphi = 0$, im letzteren Falle $\varphi = 0$ oder $\varphi = 180^0$, also $\sin\varphi = 0$. Insbesondere verschwindet also das äußere Produkt eines Vektors mit sich selbst, d. h. es ist allgemein:

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{a}] = 0, \tag{18}$$

während $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = a^2$ oder $|\mathbf{a}|^2$ wird.

Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ die Komponenten zweier Vektoren, so sind diese zueinander normal, wenn:

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}\,\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}\,\mathfrak{z}' = 0,$$

und zueinander parallel, wenn:

$$\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} = \mathfrak{x}' : \mathfrak{y}' : \mathfrak{z}'.$$

1) Das innere Produkt wird auch, namentlich von englischen Physikern, als skalares, das äußere als Vektorprodukt bezeichnet. Die Schreibweise der Multiplikation ist bei den einzelnen Autoren folgende:

	inneres Produkt	äußeres Produkt
Graßmann	$[\mathbf{a} \mid \mathbf{b}]$	$[\mathbf{a}\mathbf{b}]$
Hamilton	$\mathbf{S}\mathbf{a}\mathbf{b}$	$\mathbf{V}\mathbf{a}\mathbf{b}$
Heaviside	$\mathbf{a}\mathbf{b}$	$\mathbf{V}\mathbf{a}\mathbf{b}$
Gibbs	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
Lorentz	$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$	$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]$

Das allgemeine geometrische Produkt hat Graßmann (Math. Ann. 12, S. 375, Werke II[2], S. 268) *mittleres Produkt* genannt.

Ist $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$ die Gleichung einer Ebene, so ist ein Vektor mit den Komponenten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zu dieser Ebene normal, wenn:

$$\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} = \xi : \eta : \zeta,$$

und zu der Ebene parallel, wenn:

$$\xi \mathfrak{x} + \eta \mathfrak{y} + \zeta \mathfrak{z} = 0.$$

Denn ξ, η, ζ sind den Richtungskosinus einer Normalen der Ebene proportional.

Aus den allgemeinen geometrischen Produkten (7) und (7a) lassen sich das innere und das äußere Produkt wie folgt herleiten:

$$(19) \qquad \begin{aligned} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{v} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}), \\ [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sofort erkennen, daß bei Vertauschung der Faktoren für das innere Produkt:

$$(20) \qquad \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$$

wird, also das kommutative Gesetz gilt, für das äußere Produkt dagegen:

$$(21) \qquad [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = -[\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}]$$

ist. Wir wollen das Zeichen $\times$ immer anwenden, wenn die Vertauschung der durch dasselbe verbundenen Faktoren keine Änderung auf den Wert des Produktes ausübt. Dagegen wollen wir die eckige Klammer nur dann fortlassen, wenn das Produkt eine reine Zahl ist, so daß die eckige Klammer den geometrischen Charakter des Resultates der Multiplikation anzeigt.

Der Wert des inneren Produktes wird nach (16) gefunden, indem man das Produkt der Längen beider Vektoren mit dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels oder, was dasselbe heißt, die Länge des einen Vektors mit der Projektion des anderen Vektors auf ihn multipliziert. Den Faktor von $\mathfrak{u}$, nämlich $F = ab \sin\varphi$, in dem Ausdrucke für das äußere Produkt wollen wir seinen absoluten Wert nennen. Er wird geometrisch durch die Fläche des Parallelogramms repräsentiert, das die beiden Vektoren als zwei Seiten bestimmen. Setzen wir in dem Ausdrucke für das äußere Produkt aus (11) und (10) den Wert von $\mathfrak{u}$ ein, so wird es:

$$(22) \qquad [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = F_x \mathfrak{i} + F_y \mathfrak{j} + F_z \mathfrak{k}.$$

Hierin bedeuten F_x, F_y, F_z die Projektionen der Parallelogrammfläche auf die Koordinatenebenen. Wir wollen diese Projektionen als die Komponenten des äußeren Produktes bezeichnen. Die drei Komponenten ändern ihr Vorzeichen, wenn die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vertauscht werden. Diese Vorzeichen hängen so davon ab, welcher der beiden Vektoren bei der Produktbildung als der erste und welcher als der zweite angesehen wird, sie werden mithin durch den Sinn der Drehung bestimmt, die auf dem kürzesten Wege von dem ersten Vektor zu dem zweiten hinführt. Dieser Drehsinn ist gleichbedeutend mit dem Umlaufssinne des durch die Vektoren bestimmten Parallelogramms, bei welchem der in dem Produkte voranstehende Vektor in seinem richtigen Sinne durchlaufen wird. Dieser Umlaufssinn gehört so, neben dem Flächeninhalte des Parallelogramms und der Stellung seiner Ebene, zur geometrischen Darstellung des Vektorproduktes hinzu, und wir können dieses Produkt interpretieren als eine Fläche von bestimmtem Inhalte und bestimmtem Umlaufssinne in einer Ebene von bestimmter Stellung. Eine solche Größe ist dem Vektor in gewisser Weise analog: die Länge des Vektors wird durch den Inhalt der Fläche, die Linienrichtung des Vektors durch die Ebenenstellung und der Richtungssinn des Vektors durch den Umlaufssinn der Fläche ersetzt. Wir wollen deshalb die das äußere Produkt zweier Vektoren repräsentierende geometrische Größe einen *Flächenvektor* nennen und die ursprünglichen Vektoren, wo es not tut, als *Linienvektoren* davon unterscheiden.[1])

Lange Zeit sind die beiden Vektoren überhaupt nicht unterschieden worden.[2]) Man ersetzte unmittelbar den Flächenvektor (22) durch den Linienvektor:

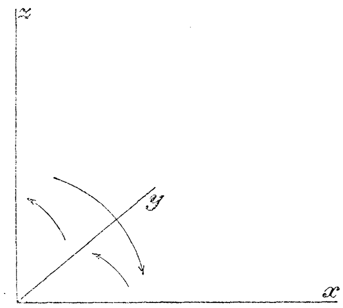

Fig. 5.

$$(23) \qquad f = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k},$$

indem man:

$$(24) \qquad \mathfrak{i} = \mathbf{i}, \quad \mathfrak{j} = \mathbf{j}, \quad \mathfrak{k} = \mathbf{k}$$

annahm. Dieser Vektor mißt durch seine Länge den Flächenvektor (22), er steht zu dessen Ebene senkrecht und sein Sinn ist durch den Charakter des zugrunde gelegten Koordinatensystems bestimmt. Ist dieses Koordinatensystem, wie wir es immer annehmen wollen, ein Rechtsschraubensystem, geht die positive Seite der x-Achse nach rechts,

1) Maxwell nennt (Lond. Math. Soc. Proceedings 3 (1871) S. 224 = Papers 2, S. 257 und Treatise on electricity and magnetism) die Linienvektoren translatorische, die Flächenvektoren rotatorische Vektoren. Voigt sagt (Kompendium d. theoret. Physik) „polare und axiale Vektoren". Hamilton macht überhaupt keinen Unterschied zwischen den beiden Größenarten. Graßmann hat für den Flächenvektor nur die Bezeichnung „Parallelogramm", die sein Sohn (Schraubenbewegung u. Nullsystem, Halle 1899) durch das kurze, prägnante Wort „Blatt" ersetzt.

2) Unabhängig von Graßmann hat de Saint Venant das äußere Produkt zweier Vektoren gefunden und als „geometrisches Produkt" bezeichnet [Comptes rendus 21 (1845) 620]. Er unterscheidet scharf zwischen diesem Produkt als einer Flächengröße und den Vektoren als Liniengrößen. An ihn knüpfte Cauchy mit seiner Theorie der „algebraischen Schlüssel" an [Comptes rendus 36 (1853) 70].

die positive y-Achse nach vorn, die positive z-Achse nach oben[1]), so erfolgt für einen Beobachter, der sich aufrecht in den Sinn des Linienvektors stellt, der Umlauf der Fläche des Flächenvektors entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Diese Zuordnung von Richtungssinn und Umlaufssinn bedeutet eine bloße Konvention, die sich in ihr Gegenteil verkehrt, wenn man statt des Linienvektors und Flächenvektors ihre Spiegelbilder für irgendeine Ebene betrachtet.

Diese Ersetzung des Flächenvektors durch einen Linienvektor auf Grund zweier konventioneller Festlegungen, die erste über das Verhältnis von Linienmaß und Flächenmaß, die zweite über das Verhältnis von Richtungssinn und Drehsinn, liegt auch den **Quaternionen Hamiltons** zugrunde. Setzen wir in dem allgemeinen geometrischen Produkte zunächst $\mathfrak{o} = -1$ und weiter $\mathfrak{i} = \mathbf{i}$, $\mathfrak{j} = \mathbf{j}$, $\mathfrak{k} = \mathbf{k}$[2]), so wird es, wenn wir zur Unterscheidung dieses Produktes den Punkt zwischen den Faktoren $\boldsymbol{\mathfrak{a}}$ und $\boldsymbol{\mathfrak{b}}$ auslassen:

$$(25\text{a})\quad \boldsymbol{\mathfrak{a}}\boldsymbol{\mathfrak{b}} = -(\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}') + (\mathfrak{y}\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\mathfrak{y}')\mathbf{i} + (\mathfrak{z}\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}\mathfrak{z}')\mathbf{j} + (\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}')\mathbf{k},$$

also ein Ausdruck von folgender Form:

$$(25)\qquad q = K + L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k},$$

und einen solchen Ausdruck bezeichnet Hamilton wegen der Vierzahl der Terme als eine Quaternion. Die beiden Teile dieser Quaternionen, die dem inneren und äußeren Produkte Graßmanns entsprechen, scheidet auch Hamilton, indem er den ersten Teil K, der eine reine Zahl bedeutet, den **skalaren** Teil Sq, den zweiten Teil $L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, der einen Vektor darstellt, den **vektoriellen** Teil Vq der Quaternion q nennt.

Der Hamiltonsche Ansatz hat den Vorteil, daß er sofort die Ausdehnung der Produktbildung auf beliebig viele Faktoren gestattet.[3]) Es gelten nämlich jetzt nach (13) und (24), wenn $\mathfrak{o} = -1$, die folgenden Regeln für die Multiplikation der Einheiten:

$$(26)\qquad \begin{cases} \mathbf{i}\mathbf{i} = \mathbf{j}\mathbf{j} = \mathbf{k}\mathbf{k} = -1, \\ \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}. \end{cases}$$

Aus ihnen folgt sofort, daß, da die Geltung des distributiven Gesetzes immer vorausgesetzt wird, durch Ausmultiplizieren der formalen Summen, die sie darstellen, das Produkt zweier Quaternionen:

$$q_1 = K_1 + L_1\mathbf{i} + M_1\mathbf{j} + N_1\mathbf{k},$$
$$q_2 = K_2 + L_2\mathbf{i} + M_2\mathbf{j} + N_2\mathbf{k}$$

---

1) Daraus folgt, daß, wenn man von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse, von dieser zur positiven z-Achse und darauf wieder zur positiven x-Achse übergeht, wie die Pfeile der Figur 5 es angeben, man das Gebiet, in dem alle Koordinatenwerte positiv sind, zur Linken hat.

2) Vgl. W. K. Clifford, American Journ. of Math. 1 (1878) S. 350, Papers S. 266.

3) Vom rein arithmetischen Standpunkte aus hat zuerst H. Hankel die Quaternionen behandelt in seiner Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867.

wieder eine Quaternion q wird, nämlich die folgende:

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} q = q_1 q_2 = &(K_1 K_2 - L_1 L_2 - M_1 M_2 - N_1 N_2) \\ &+ (K_1 L_2 + L_1 K_2 + M_1 N_2 - N_1 M_2)\,\mathbf{i}, \\ &+ (K_1 M_2 + M_1 K_2 + N_1 L_2 - L_1 N_2)\,\mathbf{j}, \\ &+ (K_1 N_2 + N_1 K_2 + L_1 M_2 - M_1 L_2)\,\mathbf{k}. \end{aligned}\right.$$

Man kann durch direkte Ausrechnung leicht nachweisen, daß auf Grund dieser Rechenregeln für drei Quaternionen q_1, q_2, q_3 das assoziative Gesetz:

$$(28)\qquad (q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3) = q_1 (q_2 q_3)$$

erfüllt ist.

Ist:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = q = Sq + Vq,$$

so wird [vgl. (7a) und (7b)]:

$$\mathbf{b}\,\mathbf{a} = \bar{q} = Sq - Vq.$$

Die so definierte Quaternion $\bar{q}$ heißt die konjugierte zu q. Ist $q = K + L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, so wird:

$$\bar{q} = K - L\mathbf{i} - M\mathbf{j} - N\mathbf{k}.$$

Im Gegensatze zu den Quaternionen lassen sich die Graßmannschen Multiplikationsarten nicht ohne weiteres beliebig fortsetzen. So ist das innere Produkt immer auf zwei Faktoren beschränkt, weil es eine reine Zahl ergibt, deren weitere Multiplikation man nicht mehr als innere Produktbildung bezeichnen kann. Dagegen kann man das äußere Produkt auf drei Vektoren erweitern, indem man die unbeschränkte Geltung des assoziativen Gesetzes, das sich jetzt in der Form schreibt:

$$\big[[\mathbf{a}\,\mathbf{b}]\,\mathbf{c}\big] = \big[\mathbf{a}\,[\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\big] = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}],$$

annimmt. Da die Einheitsvektoren bei der äußeren Multiplikation den Rechenregeln:

$$(29)\qquad \begin{gathered} [\mathbf{i}\,\mathbf{i}] = 0, \quad [\mathbf{j}\,\mathbf{j}] = 0, \quad [\mathbf{k}\,\mathbf{k}] = 0 \\ [\mathbf{j}\,\mathbf{k}] = -[\mathbf{k}\,\mathbf{j}] = \mathbf{i}, \quad [\mathbf{k}\,\mathbf{i}] = -[\mathbf{i}\,\mathbf{k}] = \mathbf{j}, \quad [\mathbf{i}\,\mathbf{j}] = -[\mathbf{j}\,\mathbf{i}] = \mathbf{k} \end{gathered}$$

unterworfen sind, ergibt sich:

$$[\mathbf{i}\,\mathbf{i}] = \big[[\mathbf{j}\mathbf{k}]\mathbf{i}\big] = \big[\mathbf{j}\,[\mathbf{k}\,\mathbf{i}]\big] = -\big[\mathbf{j}\,[\mathbf{i}\,\mathbf{k}]\big] = -\big[[\mathbf{j}\,\mathbf{i}]\,\mathbf{k}\big] = \big[[\mathbf{i}\,\mathbf{j}]\,\mathbf{k}\big] = [\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k}],$$

ferner:

$$[\mathbf{i}\,\mathbf{j}] = \big[[\mathbf{j}\,\mathbf{k}]\,\mathbf{j}\big] = -\big[[\mathbf{k}\,\mathbf{j}]\,\mathbf{j}\big] = -\big[\mathbf{k}\,[\mathbf{j}\,\mathbf{j}]\big] = 0.$$

Ebenso wird:

$$[\mathbf{i}\,\mathbf{k}] = 0, \quad [\mathbf{j}\,\mathbf{j}] = [\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}], \quad [\mathbf{j}\,\mathbf{i}] = 0, \quad [\mathbf{j}\,\mathbf{k}] = 0 \text{ usw.}$$

Wenn man also das äußere Produkt eines Flächenvektors:

$$\boldsymbol{\varphi} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$$

und eines Linienvektors:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{x}'' \mathfrak{i} + \mathfrak{y}'' \mathfrak{j} + \mathfrak{z}'' \mathfrak{k}$$

bildet, so wird dasselbe:

$$(30) \qquad [\varphi\,\mathfrak{c}] = (F_x \mathfrak{x}'' + F_y \mathfrak{y}'' + F_z \mathfrak{z}'')\,\Omega,$$

wenn wir $[\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}] = \Omega$ machen. Setzt man hierin:

$$\varphi = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$$

und entsprechend für F_x, F_y, F_z die Werte (9) ein, so läßt sich der Faktor von $[\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}]$ auf der rechten Seite als Determinante schreiben, und wir erhalten:

$$(31) \qquad [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ \mathfrak{x}' & \mathfrak{y}' & \mathfrak{z}' \\ \mathfrak{x}'' & \mathfrak{y}'' & \mathfrak{z}'' \end{vmatrix} \Omega.$$

Die Determinante hat hierin eine einfache geometrische Bedeutung, sie gibt nämlich, dem absoluten Werte nach genommen, das Volumen des Parallelepipedons an, welches die drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ als drei Kanten bestimmen. Um auch das Vorzeichen festzulegen, das sich bei Vertauschung zweier der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ umkehrt, beachte man, daß, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{j}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{k}$ gewählt wird, die Determinante $= +1$ werden muß. Daraus ist zu sehen, daß die Determinante allgemein einen positiven Wert annimmt, wenn die Vektoren, in der richtigen Reihenfolge genommen, wie die Koordinatenachsen ein Rechtsschraubensystem bilden, d. h. stellt man sich nach der Seite des Vektors $\mathfrak{c}$ aufrecht auf die Ebene der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so muß die Drehung vom ersteren nach dem letzteren hin entgegen dem Sinne des Uhrzeigers erfolgen. Hat sie den entgegengesetzten Sinn, so wird die Determinante negativ.

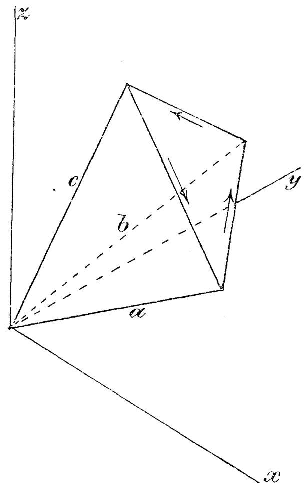

Fig. 6.

Das Produkt der drei Vektoren verschwindet dann und nur dann, wenn zwei der Vektoren einander oder die drei Vektoren einer Ebene parallel sind, denn dann fällt das von ihnen bestimmte Parallelepipedon in eine Ebene zusammen. Aus der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ \mathfrak{x}' & \mathfrak{y}' & \mathfrak{z}' \\ \mathfrak{x}'' & \mathfrak{y}'' & \mathfrak{z}'' \end{vmatrix} = 0$$

folgt aber, daß drei Relationen von der Form:

$$(32)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}'' = \lambda\,\mathfrak{x} + \lambda'\,\mathfrak{x}', \\ \mathfrak{y}'' = \lambda\,\mathfrak{y} + \lambda'\,\mathfrak{y}', \\ \mathfrak{z}'' = \lambda\,\mathfrak{z} + \lambda'\,\mathfrak{z}' \end{cases}$$

zusammen bestehen, die sich in der einen Vektorgleichung:

$$(33)\qquad \mathfrak{c} = \lambda\,\mathfrak{a} + \lambda'\,\mathfrak{b}$$

ausdrücken lassen, und in dieser Form ist sonach jeder Vektor darstellbar, der mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ derselben Ebene parallel ist.

Aus dieser Gleichung folgt weiter, daß sich ein beliebiger Vektor $\mathfrak{d}$ durch drei gegebene, nicht einer Ebene parallele Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ linear ausdrücken läßt in der Form:

$$(34)\qquad \mathfrak{d} = \lambda\,\mathfrak{a} + \lambda'\,\mathfrak{b} + \lambda''\,\mathfrak{c}.$$

Haben die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Länge Eins, so heißen λ, λ', λ'' die Komponenten des Vektors $\mathfrak{d}$ nach den durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichneten Richtungen. Um die Gleichung (34) zu beweisen, denken wir uns die Vektoren von einem Punkte ausgehend und setzen voraus, daß die Verbindungsebene von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Verbindungsebene von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ nicht parallel ist (wäre sie das, so würden wir $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ vertauschen). Dann können wir einen Vektor $\mathfrak{e}$ nehmen, der beiden Ebenen zugleich angehört.

Nach der Formel (33) muß dieser Vektor von der Form:

$$\mathfrak{e} = \mu\,\mathfrak{a} + \mu'\,\mathfrak{b}$$

und weiter nach derselben Formel:

$$\mathfrak{d} = \lambda_0\,\mathfrak{e} + \lambda''\,\mathfrak{c}$$

sein. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber, indem man $\lambda_0\,\mu = \lambda$, $\lambda_0\,\mu' = \lambda'$ setzt, in der Tat die zu beweisende Gleichung (34). Aus derselben läßt sich leicht folgern, daß das äußere Produkt von vier Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ immer verschwindet. Denn da $\mathfrak{d}$ notwendig von der Form (34) ist, so wird:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}] &= [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,(\lambda\,\mathfrak{a} + \lambda'\,\mathfrak{b} + \lambda''\,\mathfrak{c})] \\ &= \lambda\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}] + \lambda'\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}] + \lambda''\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}]. \end{aligned}$$

Die drei hier auftretenden äußeren Produkte verschwinden aber einzeln, da jedes von ihnen zwei gleiche Faktoren enthält. Es wird z. B.:

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}] = \big[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]\,\mathfrak{a}\big] = \big[[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{a}\big] = \big[\mathfrak{b}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}]\big] = 0,$$

da $[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}] = \big[\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}]\big] = 0$ wird.

Bei allen Multiplikationsarten, mit denen wir es zu tun haben, gilt die Regel, daß das Produkt verschwindet, wenn ein Faktor verschwindet. Während aber ein gewöhnliches Zahlenprodukt n u r dann verschwindet, wenn wenigstens einer seiner Faktoren gleich Null ist, können unsere geometrischen Produkte auch verschwinden, ohne daß eine der multiplizierten Größen verschwindet. Das Nullsetzen eines geometrischen Produktes drückt daher eine bestimmte Lagenbeziehung zwischen der in dem Produktausdrucke vereinigten geometrischen Gebilden aus, von der die durch das Verschwinden eines Faktors in dem Produkte gegebene Beziehung nur einen besonderen Fall bildet.

Drittes Kapitel.

Vektorquotienten.

Der Quotient $\mathfrak{q}$ zweier Zahlen a und b ist dadurch definiert, daß die eine der Zahlen a mit ihm multipliziert die andere b ergeben soll, er wird also durch die Gleichung:

$$b = \mathfrak{q}\, a$$

festgelegt. Stellen wir die analoge Definitionsgleichung für den Quotienten $\mathfrak{q}$ zweier Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auf:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{q}\,\mathfrak{a}, \tag{1}$$

so ist die Multiplikation mit $\mathfrak{q}$ auf der rechten Seite allgemeiner zu deuten als eine Operation, die mit dem Vektor $\mathfrak{a}$ ausgeführt diesen in den Vektor $\mathfrak{b}$ überführt. Wir bezeichnen deshalb das Symbol $\mathfrak{q}$ als einen Operator.

Auch für die symbolische Multiplikation mit einem solchen Operator soll das distributive Gesetz gelten, es muß also:

$$\mathfrak{q}\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}' + \cdots) = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}' + \cdots \tag{2}$$

werden, wenn

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{q}\,\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}' \ldots$$

ist. Hieraus folgt weiter, daß für jede ganze Zahl m:

$$\mathfrak{q}\,(m\,\mathfrak{a}) = m \cdot \mathfrak{q}\,\mathfrak{a} \tag{3}$$

wird, wie man sofort sieht, wenn man die Glieder der Summe alle einander gleichsetzt. Es ergibt sich dann auch, daß:

$$\mathfrak{q}\left(\frac{1}{m'}\,\mathfrak{a}\right) = \frac{1}{m'}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{a} \tag{4}$$

ist, wenn m' wieder eine ganze Zahl bedeutet. Denn multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit m', so entsteht rechts $\mathfrak{q}\,\mathfrak{a}$, links aber erhalten wir nach der vorigen Gleichung (3):

$$m'\,\mathfrak{q}\left(\frac{1}{m'}\,\mathfrak{a}\right) = \mathfrak{q}\left(m' \cdot \frac{1}{m'}\,\mathfrak{a}\right) = \mathfrak{q}\,\mathfrak{a},$$

womit die Gleichung (4) bewiesen ist. Indem wir aus der allgemeinen Regel, daß ein Produkt verschwindet, wenn ein Faktor 0 ist, folgern, daß, wenn in der Definitionsgleichung $\mathfrak{a}$ verschwindet, auch $\mathfrak{b}$ verschwindet, läßt sich leicht beweisen, daß:

$$(5) \qquad \mathfrak{q}(-\mathfrak{a}) = -\mathfrak{q}\,\mathfrak{a}$$

ist. Denn addiert man zu beiden Seiten der Gleichung $\mathfrak{q}\,\mathfrak{a}$, so wird die rechte Seite $= 0$, die linke aber auch, weil $\mathfrak{q}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{q}(-\mathfrak{a}) = \mathfrak{q}(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{q}\,0 = 0$ wird. Indem wir nun die Gleichungen (3), (4), (5) zusammenfassen, können wir sagen, daß:

$$(6) \qquad \mathfrak{q}(\lambda\,\mathfrak{a}) = \lambda \cdot \mathfrak{q}\,\mathfrak{a}$$

wird, welches auch die Zahl λ sei, und vereinigen wir diese Gleichung mit (2), so ergibt sich, daß auch:

$$(7) \qquad \mathfrak{q}(\lambda\,\mathfrak{a} + \lambda'\,\mathfrak{a}') = \lambda\,\mathfrak{b} + \lambda'\,\mathfrak{b}'$$

wird, wenn wie vorhin $\mathfrak{q}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{q}\,\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$ vorausgesetzt wird.

Aus dieser Gleichung folgt aber gemäß der Gleichung (33) des vorigen Kapitels, daß durch den Operator $\mathfrak{q}$ Vektoren, die einer Ebene parallel sind, immer in Vektoren übergeführt werden, die wieder einer Ebene parallel sind, oder, wenn wir die Vektoren alle von einem Punkte ausgehen lassen, daß Vektoren, die einer Ebene angehören, immer Vektoren entsprechen, die wieder einer Ebene angehören.

Legen wir den gemeinsamen Angriffspunkt der Vektoren in den Koordinatenursprung, so können wir die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in der Definitionsgleichung (1) durch die Koordinaten ihrer Endpunkte ausdrücken wie folgt:

$$\mathfrak{a} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{b} = x'\,\mathfrak{i} + y'\,\mathfrak{j} + z'\,\mathfrak{k}.$$

Die allgemeine Deutung der Definitionsgleichung besagt dann, daß x, y, z eindeutige Funktionen von x', y', z' werden. Wir fragen, welcher Art diese Funktionen sind.

Die Antwort finden wir sofort, wenn wir von der aus (7) unmittelbar folgenden Gleichung:

$$(8) \qquad \mathfrak{q}(\lambda\,\mathfrak{a} + \lambda'\,\mathfrak{a}' + \lambda''\,\mathfrak{a}'') = \lambda\,\mathfrak{b} + \lambda'\,\mathfrak{b}' + \lambda''\,\mathfrak{b}''$$

ausgehen, wobei außer $\mathfrak{q}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{q}\,\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$ auch $\mathfrak{q}\,\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b}''$ vorausgesetzt ist. Nehmen wir insbesondere:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{a}' = \mathfrak{j}, \quad \mathfrak{a}'' = \mathfrak{k}$$

und setzen entsprechend $\lambda = x'$, $\lambda' = y'$, $\lambda'' = z'$, so ergibt sich:

$$(9) \qquad \mathfrak{q}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{q}(x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}) = x\,\mathfrak{e}_1 + y\,\mathfrak{e}_2 + z\,\mathfrak{e}_3.$$

Hierin sind:

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{q}\,\mathbf{i}, \quad \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{q}\,\mathbf{j}, \quad \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{q}\,\mathbf{k}$$

die den Einheitsvektoren $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ entsprechenden Vektoren, also mit dem Operator $\mathfrak{q}$ gegeben und als Konstanten anzusehen. Wir wollen nun setzen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= a_{11}\,\mathbf{i} + a_{21}\,\mathbf{j} + a_{31}\,\mathbf{k}, \\ \mathfrak{e}_2 &= a_{12}\,\mathbf{i} + a_{22}\,\mathbf{j} + a_{32}\,\mathbf{k}, \\ \mathfrak{e}_3 &= a_{13}\,\mathbf{i} + a_{23}\,\mathbf{j} + a_{33}\,\mathbf{k}, \end{aligned}\right. \tag{9a}$$

dann folgt aus (9), da ja:

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k}$$

sein soll, indem wir die Koeffizienten von $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ auf der linken und rechten Seite der Gleichung (9) einzeln einander gleichsetzen:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z, \\ y' &= a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z, \\ z' &= a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Es sind also x', y', z' lineare Funktionen von x, y, z, und der Vektorquotient $\mathfrak{q}$ bedeutet eine lineare Vektortransformation.[1])

Setzen wir $\mathfrak{q} = 1$, so muß nach der allgemeinen Bedeutung der Einheit die Grundgleichung (1) ergeben:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a},$$

bei dieser durch $\mathfrak{q} = 1$ gegebenen Transformation bleiben also alle Vektoren ungeändert. Wir wollen dieselbe als die Identität bezeichnen, es ist somit 1 das Symbol für die Identität.

Der transformierte Vektor $\mathfrak{b}$ kann einer neuen Transformation $\mathfrak{q}'$ unterworfen werden. Ergibt sich hierbei:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{q}'\,\mathfrak{b},$$

so folgt durch Einsetzung des Wertes von $\mathfrak{a}$ aus (1):

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{a},$$

und setzen wir, da $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{a}$ wieder durch eine lineare Transformation hervorgeht:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{q}''\,\mathfrak{a},$$

so wird

$$\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}'\,\mathfrak{q} \tag{11}$$

zu setzen sein. Die aus zwei nacheinander ausgeführten Transformationen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ resultierende Transformation $\mathfrak{q}''$ wird also symbolisch durch ihr Produkt ausgedrückt.

---

1) Die Vektorquotienten erscheinen so als ein spezieller Fall der Größenarten, die in Sylvesters universeller Algebra ihre Behandlung gefunden haben. Vgl. J. J. Sylvester, Lectures on universal algebra, American Journ. of Math. 6 (1884) S. 270 und H. Taber, On the Theory of Matrices, ib. 20 (1890) S. 337.

Ist die Transformation $\mathfrak{q}'$ durch die Transformationsgleichungen gegeben:

$$x'' = a_{11}' x' + a_{12}' y' + a_{13}' z',$$
$$y'' = a_{21}' x' + a_{22}' y' + a_{23}' z',$$
$$z'' = a_{31}' x' + a_{32}' y' + a_{33}' z',$$

so findet man sofort, indem man die Werte für x', y', z' aus (10) einsetzt, daß die Koeffizienten in den resultierenden Transformationsgleichungen, die die Transformation $\mathfrak{q}''$ darstellen, die folgenden sind:

$$a_{11}'' = a_{11}' a_{11} + a_{12}' a_{21} + a_{13}' a_{31}, \qquad a_{12}'' = a_{11}' a_{12} + a_{12}' a_{22} + a_{13}' a_{32},$$
$$a_{21}'' = a_{21}' a_{11} + a_{22}' a_{21} + a_{23}' a_{31}, \qquad a_{22}'' = a_{21}' a_{12} + a_{22}' a_{22} + a_{23}' a_{32},$$
$$a_{31}'' = a_{31}' a_{11} + a_{32}' a_{21} + a_{33}' a_{31}, \qquad a_{32}'' = a_{31}' a_{12} + a_{32}' a_{22} + a_{33}' a_{32},$$
$$a_{13}'' = a_{11}' a_{13} + a_{12}' a_{23} + a_{13}' a_{33},$$
$$a_{23}'' = a_{21}' a_{13} + a_{22}' a_{23} + a_{23}' a_{33},$$
$$a_{33}'' = a_{31}' a_{13} + a_{32}' a_{23} + a_{33}' a_{33}.$$

Insbesondere kann aus der Aufeinanderfolge zweier Transformationen die Identität resultieren, dann heißt die eine von ihnen, die wir mit $\bar{\mathfrak{q}}$ bezeichnen, die reziproke der anderen $\mathfrak{q}$. Die in diesem Falle bestehende Gleichung:

$$\bar{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{q} = 1 \tag{12}$$

wird, mit Hinzuziehung eines beliebigen Vektors $\mathfrak{a}$ geschrieben:

$$\bar{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}. \tag{12a}$$

Multiplizieren wir diese letzere Gleichung mit $\mathfrak{q}$, so ergibt sie, indem wir $\mathfrak{q}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ setzen:

$$\mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}, \tag{13a}$$

d. h. es wird auch:

$$\mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{q}} = 1. \tag{13}$$

Multiplizieren wir aber die Gleichung:

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$$

mit $\bar{\mathfrak{q}}$, so ergibt sich wegen (12a):

$$\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{b}.$$

Es bedeutet also $\bar{\mathfrak{q}}$ die Umkehrung der Transformation $\mathfrak{q}$. Die analytische Darstellung dieser Umkehrung finden wir, indem wir die Gleichungen (10) nach x, y, z auflösen. Es ergibt sich hierbei, indem wir mit $\varDelta$ die Determinante der Koeffizienten in diesen Gleichungen bezeichnen:

$$\left\{\begin{aligned} \varDelta\cdot x &= (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})x' + (a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33})y' + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})z', \\ \varDelta\cdot y &= (a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21})x' + (a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31})y' + (a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11})z', \\ \varDelta\cdot z &= (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})x' + (a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32})y' + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})z'. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Diese Gleichungen wollen wir kürzer schreiben:

$$(15)\qquad \begin{cases} \Delta x = A_{11} x' + A_{21} y' + A_{31} z', \\ \Delta y = A_{12} x' + A_{22} y' + A_{32} z', \\ \Delta z = A_{13} x' + A_{23} y' + A_{33} z'. \end{cases}$$

Wir wollen nun untersuchen, wie durch die lineare Vektortransformation $\mathfrak{q}$ die Flächenvektoren transformiert werden. Geht ein solcher Flächenvektor $\boldsymbol{\varphi}$ durch die äußere Multiplikation aus zwei Linienvektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ hervor, so entsteht der transformierte Flächenvektor durch Multiplikation der transformierten Linienvektoren $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$. Unterscheiden wir die Koordinaten der Endpunkte dieser Vektoren durch angehängte Indices 1, 2 und denken uns diese Indices auch in die Gleichungen (10) eingeführt, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1' z_2' - z_1' y_2' &= (a_{21} x_1 + a_{22} y_1 + a_{23} z_1)(a_{31} x_2 + a_{32} y_2 + a_{33} z_2) \\ &\quad - (a_{31} x_1 + a_{32} y_1 + a_{33} z_1)(a_{21} x_2 + a_{22} y_2 + a_{23} z_2) \\ &= (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23})(y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ &\quad + (a_{23} a_{31} - a_{33} a_{21})(z_1 x_2 - x_1 z_2) \\ &\quad + (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})(x_1 y_2 - y_1 x_2), \end{aligned}$$

mit noch zwei entsprechenden Gleichungen. Führen wir nun die Komponenten $F_x = y_1 z_2 - z_1 y_2$, $F_y = z_1 x_2 - x_1 z_2$, $F_z = x_1 y_2 - y_1 x_2$ des Flächenvektors $\boldsymbol{\varphi}$ (vgl. Gl. (9) des vor. Kap.) und die Komponenten:

$$F_x' = y_1' z_2' - z_1' y_2', \quad F_y' = z_1' x_2' - x_1' z_2', \quad F_z' = x_1' y_2' - y_1' x_2'$$

des transformierten Flächenvektors $\boldsymbol{\varphi}'$ ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Bedeutung der durch die Gleichungen (15) eingeführten Koeffizienten A_{ij}:

$$(16)\qquad \begin{cases} F_x' = A_{11} F_x + A_{12} F_y + A_{13} F_z, \\ F_y' = A_{21} F_x + A_{22} F_y + A_{23} F_z, \\ F_z' = A_{31} F_x + A_{32} F_y + A_{33} F_z. \end{cases}$$

Die Flächenvektoren erfahren also ebenfalls eine lineare Transformation.

Die Bedeutung der Determinante Δ geht aus den Gleichungen (9a) hervor. Bilden wir nämlich das äußere Produkt der drei Vektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, so ergibt sich:

$$(17)\qquad [\mathfrak{e}_1\, \mathfrak{e}_2\, \mathfrak{e}_3] = \Delta\, [\mathfrak{i}\, \mathfrak{j}\, \mathfrak{k}].$$

Nehmen wir nun drei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ samt den zugehörigen transformierten Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$, indem wir setzen (vgl. (9)):

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = x_1 \mathfrak{i} + y_1 \mathfrak{j} + z_1 \mathfrak{k}, & \mathfrak{b}_1 = x_1 \mathfrak{e}_1 + y_1 \mathfrak{e}_2 + z_1 \mathfrak{e}_3, \\ \mathfrak{a}_2 = x_2 \mathfrak{i} + y_2 \mathfrak{j} + z_2 \mathfrak{k}, & \mathfrak{b}_2 = x_2 \mathfrak{e}_1 + y_2 \mathfrak{e}_2 + z_2 \mathfrak{e}_3, \\ \mathfrak{a}_3 = x_3 \mathfrak{i} + y_3 \mathfrak{j} + z_3 \mathfrak{k}, & \mathfrak{b}_3 = x_3 \mathfrak{e}_1 + y_3 \mathfrak{e}_2 + z_3 \mathfrak{e}_3, \end{cases}$$

und bilden die äußeren Produkte dieser beiden Vektoren, so wird zunächst:

$$[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3] = V\,[\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}], \tag{19}$$

indem wir:

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

annehmen. Weiter aber wird:

$$[\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3] = V\,[\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_3]. \tag{19a}$$

Denn bei dem Ausmultiplizieren der Summen, die $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ darstellen, wird, da jedes äußere Produkt bei Vertauschung zweier nebeneinander stehender Faktoren sein Zeichen ändert:

$$[\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_3] = -[\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_3\,\mathfrak{e}_2] = [\mathfrak{e}_3\,\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2] = -[\mathfrak{e}_3\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_1] = [\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_3\,\mathfrak{e}_1] = -[\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_3]$$

und alle anderen $\mathfrak{e}$-Produkte $= 0$, da sie zwei gleiche Faktoren enthalten müssen. Der Faktor von $[\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_3]$ wird aber so die vorher eingeführte Determinante Δ. Hält man nun die Gleichungen (19) und (19a) mit (17) zusammen, so zeigt sich, daß:

$$[\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3] = \Delta\,[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3] \tag{20}$$

wird. Diese Gleichung läßt erkennen, daß das Volumen des Parallelepipedons und damit auch des Tetraeders, das drei Vektoren als drei Kanten bestimmen, durch die Transformation im Verhältnisse $\Delta : 1$ vergrößert wird. Sieht man die Transformation als eine Transformation der Endpunkte der Vektoren, also des Punktraumes an, so läßt sich daraus unmittelbar ableiten, daß ein beliebiger allseitig begrenzter Teil des Raumes in einen solchen Raumteil übergeht, dessen Volumen zu dem des ersteren in dem konstanten Verhältnisse $\Delta : 1$ steht. Man kann nämlich die Begrenzungsfläche des Raumteiles sich mit einem Netze sehr kleiner Dreiecke überzogen denken und diese Dreiecke als die Grundflächen von Tetraedern ansehen, deren Spitze immer im Koordinatenursprunge liegt. Das Volumen, das von der Fläche eingeschlossen wird, läßt sich dann erhalten, indem man die Volumina eines bestimmten Teiles der Elementar-Tetraeder addiert und den Rest davon subtrahiert. Zu addieren sind alle Tetraeder, bei denen die nach dem Äußeren der geschlossenen Fläche gerichtete Normale auf der Tetraeder-Grundfläche mit den durch den Koordinatenursprung gehenden Tetraederkanten einen stumpfen Winkel bildet, und zu subtrahieren die Tetraeder, für die dieser Winkel spitz wird. Da nun alle einzelnen Tetraedervolumina sich bei der Transformation im Verhältnisse $\Delta : 1$ vergrößern, gilt das gleiche auch von ihrem Aggregate, dem Volumen der allgemeinen Raumfigur.

Aus dem Ansatze (18) ergibt sich sofort, vorausgesetzt, daß die drei Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ nicht einer Ebene angehören, daß also nicht $V = 0$ ist, zu dem Vektor:

$$\lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \lambda_3 \mathfrak{a}_3$$

als entsprechender Vektor:

$$\lambda_1 \mathfrak{b}_1 + \lambda_2 \mathfrak{b}_2 + \lambda_3 \mathfrak{b}_3,$$

und daraus ist zu sehen, daß die Transformation bestimmt ist, sowie zu drei nicht einer Ebene angehörenden Vektoren die entsprechenden Vektoren bekannt sind.

Wir fragen nun: Kommt es vor und wie oft, daß der transformierte Vektor der Richtung nach mit dem ursprünglichen Vektor zusammenfällt? In diesem Falle muß, wenn wieder $\mathfrak{a} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{b} = x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k}$ die beiden Vektoren sind,

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z \tag{21}$$

sein. Setzen wir diese Werte in die Gleichungen (10) ein, so werden sie:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z = 0, \\ a_{21}\, x + (a_{22} - \lambda)\, y + a_{23}\, z = 0, \\ a_{31}\, x + a_{32}\, y + (a_{33} - \lambda)\, z = 0, \end{cases} \tag{22}$$

und hieraus ergibt sich durch Elimination von x, y, z für λ die Gleichung dritten Grades:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{23}$$

die wir schreiben wollen:

$$\lambda^3 - F\lambda^2 + G\lambda - H = 0. \tag{23a}$$

Den drei Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dieser Gleichung entsprechen drei Vektoren, deren Richtung durch die Transformation nicht geändert wird, und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind dann die Werte des Verhältnisses, in dem ihre Längen vergrößert werden.[1]) Die Richtungen dieser Vektoren wollen wir als die Hauptachsen der Transformation benennen, und drei Vektoren von der Länge Eins, die in sie fallen, mit $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ bezeichnen. Ist nun ein beliebiger Vektor $\mathfrak{a}$ in der Form gegeben:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{x}_2 \mathfrak{l}_2 + \mathfrak{x}_3 \mathfrak{l}_3, \tag{24}$$

so wird [vgl. (8)] der transformierte Vektor:

$$\mathfrak{b} = \lambda_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{l}_1 + \lambda_2 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{l}_2 + \lambda_3 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{l}_3. \tag{24a}$$

---

1) Negatives Vorzeichen bedeutet hierbei Umkehrung des Sinnes. Eine bestimmte Linienrichtung mit einem beigeschriebenen positiven oder negativen Längenverhältnis bezeichnet W. Voigt als Tensor und behandelt diese Tensoren als den Vektoren koordinierte Größen, deren abweichender Charakter bei einer Koordinatentransformation deutlich zutage tritt. Die von uns behandelten Vektorquotienten werden dann durch Voigts Tensortripel gegeben. (W. Voigt, Die fundamentalen Eigenschaften der Krystalle, Leipzig 1898, und Göttinger Nachrichten 1900, S. 117, 1904, S. 495.)

Dies können wir als die einfachste Darstellung der Transformation ansehen. Dieselbe ist aber nur dann reell und in endlicher Form ausführbar, wenn die Wurzeln der Gleichung dritten Grades reell und voneinander verschieden sind.

Es kann eine Transformation auch unendlich viele Hauptachsen haben, wie an dem folgenden einfachen Beispiel zu sehen ist:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = z.$$

Hier ist außer der z-Achse jeder Strahl durch den Koordinatenursprung, der in der xy-Ebene liegt, als Hauptachse anzusehen. Eine solche Transformation soll eine *planare* heißen. Bei der Transformation:

$$x' = c\,x, \quad y' = c\,y, \quad z' = c\,z$$

ist *jeder* Strahl durch den Koordinatenursprung eine Hauptachse. Eine solche Transformation soll eine *radiale* genannt werden. Für eine planare Transformation fallen zwei Wurzeln und für eine radiale alle drei Wurzeln der Gleichung (23) zusammen. Aber das Umgekehrte gilt keineswegs. So fallen für die Transformation:

$$x' = c\,x, \quad y' = x + c\,y, \quad z' = y + c\,z$$

alle Wurzeln der Hauptachsengleichung in die eine $\lambda = c$ zusammen. Die Transformation besitzt aber nur eine oder vielmehr drei zusammenfallende Hauptachsen, die durch die z-Achse gegeben werden.

Wir suchen die Bedingungen dafür, daß zwei lineare Vektortransformationen oder Vektorquotienten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ vertauschbar sind. Es muß dann die Gleichung bestehen:

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}, \tag{25}$$

d. h. für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{q}\,(\mathfrak{q}'\,\mathfrak{a}) = \mathfrak{q}'\,(\mathfrak{q}\,\mathfrak{a})$$

oder, wenn $\mathfrak{q}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{q}'\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}'$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{q}'\,\mathfrak{b}$$

sein. Nehmen wir nun den Vektor $\mathfrak{a}$ in einer Hauptachse von $\mathfrak{q}$ an, so wird $\mathfrak{b} = \lambda \cdot \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{q}'\mathfrak{b} = \lambda \cdot \mathfrak{q}'\mathfrak{a} = \lambda \cdot \mathfrak{b}'$, und somit verwandelt sich die vorstehende Gleichung in:

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{b}' = \lambda \cdot \mathfrak{b}',$$

d. h. auch der Vektor $\mathfrak{b}'$ fällt in eine Hauptachse von $\mathfrak{q}$, und zwar gehört diese Hauptachse zu demselben Werte λ wie die erst angenommene, sie muß also mit der letzteren identisch sein, wenn die Hauptachsengleichung (23) drei voneinander verschiedene Wurzeln hat, und ist dann auch eine Hauptachse von $\mathfrak{q}'$, da der Vektor $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}'$ in den der Richtung nach mit ihm zusammenfallenden Vektor $\mathfrak{b}'$ übergeht. Transformationen, welche drei voneinander verschiedene Hauptachsen besitzen, können also nur dann vertauschbar sein, wenn sie die Hauptachsen gemein haben.

Man kann, wie man die Aufeinanderfolge zweier Transformationen als die Multiplikation der zugehörigen Vektorquotienten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ anzusehen hat, auch für die lineare Kombination:

$$\mathfrak{q}'' = \alpha\,\mathfrak{q} + \alpha'\,\mathfrak{q}'$$

zweier Vektorquotienten eine naheliegende Definition geben. Sind nämlich $a_{\varrho\sigma}$ (für $\varrho, \sigma = 1, 2, 3$) die Koeffizienten in den zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Transformationsgleichungen, $a'_{\varrho\sigma}$ ebenso die Koeffizienten für $\mathfrak{q}'$, so sollen die Koeffizienten für $\mathfrak{q}''$:

$$\alpha\, a_{\varrho\sigma} + \alpha'\, a'_{\varrho\sigma}$$

sein. So ergeben sich insbesondere für die Summe $\mathfrak{q}_s = \mathfrak{q} + \mathfrak{q}'$ der beiden Vektorquotienten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ die Koeffizienten $a_{\varrho\sigma} + a'_{\varrho\sigma}$. Dann ist aber für irgendeinen Vektor $\mathbf{a}$:

$$\mathfrak{q}_s\,\mathbf{a} = \mathfrak{q}\,\mathbf{a} + \mathfrak{q}'\mathbf{a},$$

und diese Gleichung bedeutet, daß der Vektor, in den ein beliebiger Vektor $\mathbf{a}$ durch $\mathfrak{q}_s$ übergeht, die Summe der Vektoren ist, in die $\mathbf{a}$ durch $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ übergeht. Auf diese Weise wird die Bildung der Summe zweier Vektorquotienten auf die Addition von Vektoren zurückgeführt.

Fügt man noch die Regel hinzu, daß man, statt einen Vektorquotienten durch einen anderen zu dividieren, mit dem reziproken Vektorquotienten des letzteren multiplizieren muß, so sieht man, wie man mit Vektorquotienten rechnen kann wie mit Zahlen.

Wir wollen nun nachweisen, daß jeder Vektorquotient einer symbolischen Gleichung dritten Grades genügt. Diese Gleichung ist von Hamilton aufgestellt worden, der die Vektorquotienten als „lineare Vektorfunktionen" behandelt.[1])

Die Gleichungen (9a) können wir nämlich mit Rücksicht auf die ihnen unmittelbar voraufgehenden Gleichungen schreiben:

$$(26)\qquad \begin{cases} \mathfrak{q}\,\mathbf{i} = a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k}, \\ \mathfrak{q}\,\mathbf{j} = a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k}, \\ \mathfrak{q}\,\mathbf{k} = a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}. \end{cases}$$

Eliminieren wir hieraus $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, als ob es Zahlen wären, so ergibt sich

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \mathfrak{q} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - \mathfrak{q} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \mathfrak{q} \end{vmatrix} = 0$$

1) Elements of Quaternions, B. III, Chap. II, Sect. 6. Vgl. auch Tait, An elementary treatise on Quaternions, Chap. V, und Gibbs, Vector Analysis, Chap. V. Eine eigenartige Theorie, welche an die doppeltquadratischen Binärformen anknüpft, hat E. Waelsch gegeben, Berichte d. Wiener Akad. Abt. IIa, Bd. 113, S. 1089, in zusammenfassender Darstellung Monatshefte für Math. 17 (1906) S. 241.

oder mit Rücksicht darauf, daß die Gleichung (23) mit der Gleichung (23a) identisch angenommen wurde:

$$\mathfrak{q}^3 - F\mathfrak{q}^2 + G\mathfrak{q} - H = 0. \tag{28}$$

Hierbei ist H die Determinante $\varDelta$ (S. 28), die wir $\neq 0$ voraussetzen.

Die allgemeinen Vektorquotienten, von denen bis jetzt die Rede war, sind analog den analytischen Vektorprodukten. Wir wollen sie deshalb als analytische Vektorquotienten bezeichnen. Sie sind wieder nicht durch zwei Vektoren bestimmt, sondern, wie wir gesehen haben, erst durch drei Paare entsprechender Vektoren.

Wir wollen nun nach solchen besonderen Vektorquotienten forschen, die durch ein Paar einander zugeordneter Vektoren völlig bestimmt sind. Wir nennen diese Quotienten analog der bei den Vektorprodukten angewendeten Bezeichnung geometrische Vektorquotienten.

Um sie zu finden, gehen wir folgenden Weg.[1] Wir stellen sie zunächst für zwei besondere Fälle auf, um sie daraus für den allgemeinen Fall abzuleiten. Der eine dieser besonderen Fälle ist der, wo die einander zugeordneten Vektoren dieselbe Richtung, aber verschiedene Größe haben, der zweite Fall der, wo sie gleiche Größe, aber divergierende Richtungen haben, wobei wir wie oben die Vektoren immer von einem festen Punkte, dem Koordinatenursprung, ausgehen lassen.

Im ersten Falle können wir eine lineare Transformation, welche den ersten der beiden gegebenen Vektoren in den zweiten überführt und durch die beiden Vektoren allein bestimmt ist, sofort angeben. Sie besteht in einer Ähnlichkeitstransformation, bei welcher alle Koordinaten im Verhältnis der Längen beider Vektoren vergrößert werden. Sind a und b diese Längen, so können wir die Transformation durch die Gleichungen:

$$x' = \frac{b}{a}x, \quad y' = \frac{b}{a}y, \quad z' = \frac{b}{a}z \tag{29}$$

dargestellt denken.

Im zweiten Falle nehmen wir für die Transformation, welche den ersten Vektor $\mathfrak{a}$ in den zweiten $\mathfrak{b}$ überführt, die Drehung um ihre gemeinsame Normale, durch welche der erste Vektor in den zweiten übergeht.

Indem wir die Länge der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} = 1$ annehmen, können wir diese Drehung mit den Hamiltonschen Quaternionen in Beziehung bringen. Zunächst wollen wir zeigen, daß wir die Drehung ersetzen können durch zwei halbe Umdrehungen um den ersten Vektor $\mathfrak{a}$ und die Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden Vektoren. Daß aus diesen beiden halben Umdrehungen eine Rotation um den gemeinsamen Angriffspunkt O der Vektoren resultiert, ist sofort einleuchtend, da bei beiden sich der Abstand eines beliebigen Punktes von dem

[1] Man vergleiche für das Folgende auch Study, Die Hauptsätze der Quaternionentheorie, Mittlgn. des naturw. Vereins f. Neuvorpommern u. Rügen, 1899.

festen Punkte O nicht ändert. Nehmen wir aber einen Punkt auf der gemeinsamen Normale der beiden Vektoren an, die auch auf der Halbierungslinie senkrecht steht, so geht dieser durch die erste halbe Umdrehung in sein Spiegelbild bezüglich der Verbindungsebene der beiden Vektoren über und gelangt durch die zweite halbe Umdrehung in die alte Lage zurück. Diese gemeinsame Normale ist also die Achse der resultierenden Rotation. Bei der ersten halben Umdrehung bleibt endlich der erste Vektor $\mathfrak{a}$, der die Achse dieser Drehung bildet, ungeändert und geht bei der halben Umdrehung um die Halbierungslinie in den zweiten Vektor $\mathfrak{b}$ über, womit die Behauptung vollständig bewiesen ist.[1]

Wir wollen nun auch auf der Halbierungslinie einen Vektor von der Länge 1 annehmen und mit $\mathfrak{c}$ bezeichnen. Bedeutet dann $\mathfrak{p}$ einen beliebigen, wieder von O ausgehenden Vektor, der die Länge 1 hat, und $\mathfrak{p}_1$ den Vektor, in den er durch die halbe Umdrehung um $\mathfrak{a}$ übergeht, so folgt daraus, daß zwei Paar Vektoren von der Länge 1 dasselbe Quaternionenprodukt liefern, wenn sie in derselben Ebene liegen und gleiche Winkel miteinander bilden, sofort, daß:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_1$$

wird. Da aber der Vektor $\mathfrak{a}$ die Länge 1 hat, so wird:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a} = -1.$$

Multiplizieren wir daher die vorige Gleichung mit $\mathfrak{a}$, so ergibt sie:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{a} = -\mathfrak{p}_1.$$

Führen wir nun die halbe Umdrehung um die Halbierungslinie aus und sei $\mathfrak{p}'$ der Vektor, in den $\mathfrak{p}_1$ hierbei übergeht, so wird ebenso:

$$\mathfrak{c}\mathfrak{p}_1\mathfrak{c} = -\mathfrak{p}',$$

und indem wir die beiden letzten Gleichungen zusammenfassen:

$$\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{p}'.$$

Setzen wir nun das Quaternionprodukt:

(30) $$\mathfrak{a}\mathfrak{c} = q,$$

so wird:

(30a) $$\mathfrak{c}\mathfrak{a} = \bar{q}$$

die konjugierte Quaternion, und wir haben:

(31) $$\bar{q}\,\mathfrak{p}\,q = \mathfrak{p}'$$

als Darstellung der Rotation, die den Vektor $\mathfrak{a}$ in den Vektor $\mathfrak{b}$ überführt.

Bezeichnen wir den Winkel zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit ω, also den Winkel zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ mit $\frac{\omega}{2}$ und nennen die Winkel, welche die

1) Vgl. H. Wiener, Ber. d. Sächs. Akad., Math. Kl. 42 (1890) S. 19.

gemeinsame Normale der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ mit den Koordinatenachsen bildet, λ, μ, ν, so wird die Quaternion:

$$q = K + L\,\mathbf{i} + M\,\mathbf{j} + N\,\mathbf{k}$$

für:

$$(32)\quad K = -\cos\frac{\omega}{2},\ \ L = \sin\frac{\omega}{2}\cos\lambda,\ \ M = \sin\frac{\omega}{2}\cos\mu,\ \ N = \sin\frac{\omega}{2}\cos\nu,$$

und die konjugierte Quaternion:

$$\bar{q} = K - L\,\mathbf{i} - M\,\mathbf{j} - N\,\mathbf{k}.$$

Wir nehmen ferner:

$$\mathfrak{p} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

und führen das Produkt auf der linken Seite von (31) aus. Es ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned}\bar{q}\,\mathfrak{p} = (Lx + My + Nz) &+ (Kx + Ny - Mz)\,\mathbf{i}\\ + (Ky + Lz - Nx)\,\mathbf{j} &+ (Kz + Mx - Ly)\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

und wenn wir noch diesen Ausdruck mit q multiplizieren, so wird zunächst der skalare Teil:

$$\begin{aligned}&(Lx + My + Nz)\,K - (Kx + Ny - Mz)\,L\\ -&(Ky + Lz - Nx)\,M - (Kz + Mx - Ly)\,N = 0.\end{aligned}$$

Indem wir den übrigbleibenden vektoriellen Teil der Gleichung (31) gemäß dem Vektor:

$$\mathfrak{p}' = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k}$$

gleichsetzen, erhalten wir:

$$(33)\quad \begin{cases} x' = (K^2 + L^2 - M^2 - N^2)\,x + 2\,(LM + KN)\,y + 2\,(LN - KM)\,z,\\ y' = 2\,(LM - KN)\,x + (K^2 - L^2 + M^2 - N^2)\,y + 2\,(MN + KL)\,z,\\ z' = 2\,(LN + KM)\,x + 2\,(MN - KL)\,y + (K^2 - L^2 - M^2 + N^2)\,z.\end{cases}$$

Hierbei sind K, L, M, N durch die Gleichungen (32) bestimmt, aus denen die Relation:

$$(34)\qquad K^2 + L^2 + M^2 + N^2 = 1$$

folgt.[1] Die so gefundenen Formeln geben die Transformation der Punktkoordinaten, welche einer Drehung des wie ein starrer Körper beweglich gedachten Raumes um den Koordinatenursprung entspricht.

Es ist leicht, nachdem die Gleichungen (33) einmal gewonnen sind, ihre Richtigkeit zu prüfen und so noch einen Beweis a posteriori für sie zu erbringen. Erstlich kann man nämlich nachweisen, daß aus den Transformationsgleichungen (33) die identische Beziehung:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

folgt. Zweitens findet man, daß, wenn man in ihnen:

$$x : y : z = L : M : N$$

annimmt, sich:

$$x' = x,\quad y' = y,\quad z' = z$$

1) Die Formel (33), die mit der von Euler (Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, ed. II., § 1009) in engem Zusammenhang steht, gab samt der auf S. 39 folgenden Formel (39) Ol. Rodrigues [Journ. de Math. 5 (1840), S. 380]. In Verbindung mit den Quaternionen brachte sie Cayley, Philos. Magaz. 26 (1845) S. 141, 28 (1848) S. 196, Collected Papers I, S. 123 und 405.

ergibt. Daraus ist bereits zu schließen, daß die Formeln eine Drehung um eine durch den Koordinatenursprung gehende Achse darstellen. Um endlich nachzuweisen, daß der Rotationswinkel in der Tat die den Gleichungen (32) entsprechende Größe ω hat, beachte man, daß, wenn r die Länge des aus einem Punkte P auf die Rotationsachse gefällten Lotes ist, der Punkt P', in den der Punkt P übergeht, von diesem die Entfernung $PP' = 2r \sin\frac{\omega}{2}$ hat. Wählt man den Punkt P insbesondere auf der x-Achse im Abstande 1 vom Ursprung, so wird $r = \sin\lambda$, also:

$$\begin{aligned}\overline{PP'}^2 &= 4 \sin\lambda^2 \sin\frac{\omega}{2}^2 = 4(1 - \cos\lambda^2)\sin\frac{\omega}{2}^2 \\ &= 4(\cos\mu^2 + \cos\nu^2)\sin\frac{\omega}{2}^2 = 4(M^2 + N^2),\end{aligned}$$

und dieser Wert für

$$\overline{PP'}^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

geht in der Tat aus (33) hervor, wenn man $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ macht.

Daß jede Drehung um einen Punkt eine Drehung um eine durch den Punkt gehende Achse bedeutet, hat schon Euler durch eine einfache geometrische Überlegung gezeigt.[1]) Denken wir uns die Drehung als die Verschiebung einer Kugel in sich, so ist diese völlig festgelegt, wenn man die Punkte P', Q' kennt, in die zwei gegebene Punkte P, Q übergehen. Dabei muß der Hauptkreisbogen $P'Q'$ gleich dem Bogen PQ werden. Zeichnet man nun die Hauptkreise, von denen der eine die Mittelsenkrechte des Bogens PP', der andere die des Bogens QQ' bildet, und nennt S, S' ihre Schnittpunkte, so wird:

$$SP = SP', \quad SQ = SQ',$$

außerdem folgt aus der Kongruenz der Dreiecke PSQ und $P'SQ'$, daß der Winkel PSQ gleich dem Winkel $P'SQ'$, also auch der Winkel PSP' gleich dem Winkel QSQ' ist, und gleiches gilt auch für den zweiten Schnittpunkt S'. Die ganze Verschiebung der Kugel in sich läßt sich mithin durch eine Drehung um ihren Durchmesser SS' herstellen, worin der zu beweisende Satz liegt.

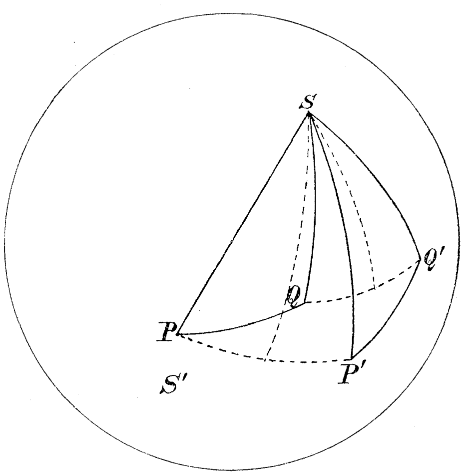

Fig. 7.

Wenn wir nun die zu Anfang unterschiedenen zwei besonderen Fälle zu dem all-

1) Theoria motus § 979 seq.

gemeinen Falle vereinigen und entsprechend die durch die Gleichungen (29) und (33) gegebenen Transformationen zu einer einzigen allgemeineren Transformation verschmelzen, so erhalten die Gleichungen derselben wieder genau die Form (33), indem wir nur jetzt allgemeiner setzen:

$$(35)\qquad \begin{cases} K = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}\cos\dfrac{\omega}{2}, & L = \sqrt{\dfrac{b}{a}}\sin\dfrac{\omega}{2}\cos\lambda, \\ M = \sqrt{\dfrac{b}{a}}\sin\dfrac{\omega}{2}\cos\mu, & N = \sqrt{\dfrac{b}{a}}\sin\dfrac{\omega}{2}\cos\nu, \end{cases}$$

so daß an die Stelle von (34) die Gleichung:

$$(35\text{a})\qquad K^2 + L^2 + M^2 + N^2 = \frac{b}{a}$$

tritt. Die in diesem Sinne durch (33) dargestellte Transformation können wir als eine Drehstreckung bezeichnen, sie besteht in einer Drehung um die durch den Koordinatenursprung O gehende und durch die Richtungswinkel λ, μ, ν festgelegte Achse durch den Drehungswinkel ω und einer gleichzeitigen Vergrößerung aller Entfernungen im Verhältnisse $\frac{b}{a}\cdot$ Diese Transformation soll den geometrischen Quotienten $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ repräsentieren.

Wir wollen noch die Formeln für die Zusammensetzung zweier Drehungen um O zu einer einzigen Drehung aufstellen. Zu dem Zwecke bemerken wir zunächst, daß wir die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, um welche wir die halben Umdrehungen ausgeführt haben, ohne die aus den letzteren resultierende Drehung zu ändern, mit Beibehaltung des Winkels zwischen ihnen beliebig in ihrer Verbindungsebene verschieben können. Setzen wir also zwei Drehungen um den Punkt O, deren Achsen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ nicht identisch sind, aus je zwei halben Umdrehungen zusammen, so können wir von den vier Achsen der letzteren zwei zusammenfallen lassen, und zwar in die gemeinsame Normale $\mathfrak{e}$ der Rotationsachsen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$. Sind dann $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ die Achsen der beiden übrigbleibenden halben Umdrehungen, so besteht die insgesamt resultierende Rotation aus zwei halben Umdrehungen um $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, denn die zwei halben Umdrehungen um $\mathfrak{e}$ setzen sich zu einer vollen Umdrehung, bei der jeder Punkt in seine alte Lage zurückkommt, zusammen.

Sehen wir wieder $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{c}$ als Vektoren von der Länge 1 an, die der Lage nach mit den betreffenden Achsen zusammenfallen, und setzen die Quaternionprodukte:

$$(36)\qquad \mathfrak{a}\mathfrak{e} = q_1,\quad \mathfrak{e}\mathfrak{c} = q_2,\quad \mathfrak{a}\mathfrak{c} = q,$$

woraus:

$$\mathfrak{e}\mathfrak{a} = \bar{q}_1,\quad \mathfrak{c}\mathfrak{e} = \bar{q}_2,\quad \mathfrak{c}\mathfrak{a} = \bar{q},$$

so können wir die den Gleichungen (32) entsprechenden Größen, die wir für die Teildrehungen mit K_1, L_1, M_1, N_1 und K_2, L_2, M_2, N_2 bezeichnen, aus diesen Quaternionen gewinnen, indem:

$$(37)\qquad \begin{cases} q_1 = K_1 + L_1\mathbf{i} + M_1\mathbf{j} + N_1\mathbf{k}, \\ q_2 = K_2 + L_2\mathbf{i} + M_2\mathbf{j} + N_2\mathbf{k}, \\ q\ = K\ + L\ \mathbf{i} + M\ \mathbf{j} + N\ \mathbf{k} \end{cases}$$

wird. Führen wir nun wieder einen beliebigen Vektor $\mathfrak{p}$ ein, nennen $\mathfrak{p}'$ den Vektor, in der er durch die erste Teildrehung übergeht, $\mathfrak{p}''$ den Vektor, in den $\mathfrak{p}'$ durch die zweite Teildrehung, also $\mathfrak{p}$ durch die resultierende Drehung übergeht, so muß nach dem Vorigen:

$$(38)\qquad \bar{q}_1\,\mathfrak{p}\,q_1 = \mathfrak{p}',\quad \bar{q}_2\,\mathfrak{p}'\,q_2 = \mathfrak{p}'',\quad \bar{q}\,\mathfrak{p}\,q = \mathfrak{p}''$$

werden, und von diesen drei Gleichungen muß die dritte, da q durch q_1 und q_2 bestimmt ist, eine Folge der beiden ersten sein. Setzen wir in die zweite Gleichung den Wert für $\mathfrak{p}'$ aus der ersten ein, so wird sie:

$$(38\text{a})\qquad \bar{q}_2\,\bar{q}_1\,\mathfrak{p}\,q_1\,q_2 = \mathfrak{p}''.$$

Da aber $\mathfrak{e}\,\mathfrak{e} = -1$, wird nach (36):

$$q_1\,q_2 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{c} = -\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} = -\,q,$$

und

$$\bar{q}_2\,\bar{q}_1 = \mathfrak{c}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{a} = -\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a} = -\,\bar{q}.$$

Die Gleichung, in die so die vorstehende (38a) übergeht, ist von der dritten Gleichung (38) nicht wesentlich verschieden, da das doppelte Minuszeichen sich heraushebt. Mit Rücksicht auf die obigen Ausdrücke (37) der vorkommenden Quaternionen ergibt die Formel (27) des zweiten Kapitels, wenn man den rechts stehenden Ausdruck mit $-K - L\mathbf{i} - M\mathbf{j} - N\mathbf{k}$ identifiziert:

$$(39)\qquad \begin{cases} -K = K_1\,K_2 - L_1\,L_2 - M_1 M_2 - N_1\,N_2, \\ -L\ = K_1\,L_2 + L_1\,K_2 + M_1\,N_2 - N_1\,M_2, \\ -M = K_1 M_2 + M_1 K_2 + N_1\,L_2 - L_1\,N_2, \\ -N = K_1\,N_2 + N_1\,K_2 + L_1\,M_2 - M_1\,L_2, \end{cases}$$

und diese Gleichungen zeigen, wie sich aus den bestimmenden Größen K_1, L_1, M_1, N_1 und K_2, L_2, M_2, N_2 zweier Drehungen die bestimmenden Größen K, L, M, N der resultierenden Drehung ergeben.

Viertes Kapitel.

Produkte von Punktgrößen.

An die Produkte und Quotienten der Vektoren reihen sich naturgemäß die Produkte und Quotienten der Punktgrößen. Für unsere Zwecke sind aber nur die Produkte dieser Größen von Bedeutung, ihre Quotienten würden uns über unseren Gegenstand hinaus in das Gebiet der sogenannten projektiven Geometrie führen. Wir wollen auch nur von den äußeren Produkten der Punktgrößen reden, so daß fortan immer die Regel der äußeren Multiplikation:

$$(1) \qquad [\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}] = -[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}],$$

aus der insbesondere:

$$(2) \qquad [\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}] = 0$$

folgt, als gültig angesehen wird.

Wir nehmen nun an, zwei Punktgrößen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ seien in der Form [vgl. Gleichung (23) im ersten Kapitel]:

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = m_1\,(\mathbf{0} + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}), \\ \mathfrak{B} = m_2\,(\mathbf{0} + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \end{cases}$$

gegeben und bilden das äußere Produkt von ihnen; dann gelten beim Ausmultiplizieren der Klammern nach dem distributiven Gesetz gemäß (1) und (2) die Regeln:

$$(4) \qquad \begin{cases} [\mathbf{0}\,\mathbf{i}] = -[\mathbf{i}\,\mathbf{0}] = \boldsymbol{\mathfrak{i}}, & [\mathbf{0}\,\mathbf{j}] = -[\mathbf{j}\,\mathbf{0}] = \boldsymbol{\mathfrak{j}}, & [\mathbf{0}\,\mathbf{k}] = -[\mathbf{k}\,\mathbf{0}] = \boldsymbol{\mathfrak{k}}, \\ [\mathbf{j}\,\mathbf{k}] = -[\mathbf{k}\,\mathbf{j}] = \mathfrak{i}, & [\mathbf{k}\,\mathbf{i}] = -[\mathbf{i}\,\mathbf{k}] = \mathfrak{j}, & [\mathbf{i}\,\mathbf{j}] = -[\mathbf{j}\,\mathbf{i}] = \mathfrak{k}. \end{cases}$$

Die Symbole $\boldsymbol{\mathfrak{i}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{j}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{k}}$ sind hier neu eingeführt, die Symbole $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ sind schon im zweiten Kapitel [s. Formel (13)] benutzt worden. Durch Ausführung der Multiplikation ergibt sich nun:

$$(5) \qquad \begin{aligned} [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = m_1 m_2\, \{&(x_2 - x_1)\,\boldsymbol{\mathfrak{i}} + (y_2 - y_1)\,\boldsymbol{\mathfrak{j}} + (z_2 - z_1)\,\boldsymbol{\mathfrak{k}} \\ &+ (y_1 z_2 - z_1 y_2)\,\mathfrak{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\,\mathfrak{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\,\mathfrak{k}\}. \end{aligned}$$

Wir wollen insbesondere für die Punktgrößen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, deren Produkt wir bilden, einfache Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ nehmen, also $m_1 = 1$ und $m_2 = 1$ setzen, und schreiben dann die vorige Formel:

$$(6) \qquad \mathfrak{l} = [\mathbf{A}\,\mathbf{B}] = \mathrm{X}\,\boldsymbol{\mathfrak{i}} + \mathrm{Y}\,\boldsymbol{\mathfrak{j}} + \mathrm{Z}\,\boldsymbol{\mathfrak{k}} + \mathrm{L}\,\mathfrak{i} + \mathrm{M}\,\mathfrak{j} + \mathrm{N}\,\mathfrak{k},$$

indem wir setzen:

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = x_2 - x_1, & \mathrm{L} = y_1 z_2 - z_1 y_2 = y_1 \mathrm{Z} - z_1 \mathrm{Y}, \\ \mathrm{Y} = y_2 - y_1, & \mathrm{M} = z_1 x_2 - x_1 z_2 = z_1 \mathrm{X} - x_1 \mathrm{Z}, \\ \mathrm{Z} = z_2 - z_1, & \mathrm{N} = x_1 y_2 - y_1 x_2 = x_1 \mathrm{Y} - y_1 \mathrm{X}. \end{cases}$$

Zwischen diesen sechs Zahlwerten besteht dann die identische Relation:

$$(8) \qquad \mathrm{X\,L} + \mathrm{Y\,M} + \mathrm{Z\,N} = 0.$$

Die geometrische Bedeutung eines solchen äußeren Produktes zweier Punkte können wir leicht auf folgende Art erkennen. Die Differenz der beiden Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ist ein Vektor:

$$\mathfrak{a} = \mathbf{B} - \mathbf{A}.$$

Bilden wir das äußere Produkt dieses Vektors mit dem Punkte $\mathbf{A}$, so ergibt sich nach den Grundregeln der äußeren Multiplikation:

$$(9) \qquad [\mathbf{A}\,\mathfrak{a}] = [\mathbf{A}\,(\mathbf{B} - \mathbf{A})] = [\mathbf{A}\,\mathbf{B}] - [\mathbf{A}\,\mathbf{A}] = [\mathbf{A}\,\mathbf{B}] = \mathfrak{l}.$$

Wenn wir weiter mit k einen beliebigen Zahlfaktor bezeichnen, so wird:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + k\,\mathbf{a}$$

ein beliebiger Punkt auf der Verbindungslinie der Punkte A und B. Denn $k\,\mathbf{a} = k\,(\mathbf{B} - \mathbf{A})$ ist ein Vektor von beliebiger Länge, welcher der Richtung nach mit jener Verbindungslinie zusammenfällt. P aber ist ein Punkt, dessen Lage gegen A durch den Vektor $\mathbf{P} - \mathbf{A} = k\,\mathbf{a}$ bestimmt wird, also ein Punkt, der von A aus in der Richtung des Punktes B liegt, d. h. ein Punkt der Verbindungslinie von A und B. Bilden wir nun das äußere Produkt von $\mathbf{P}$ und $\mathbf{a}$, so ergibt sich:

$$(10) \qquad [\mathbf{P}\,\mathbf{a}] = [(\mathbf{A} + k\,\mathbf{a})\,\mathbf{a}] = [\mathbf{A}\,\mathbf{a}] + k\,[\mathbf{a}\,\mathbf{a}] = [\mathbf{A}\,\mathbf{a}] = \mathfrak{l}.$$

Wir erhalten also dasselbe äußere Produkt, welches wir aus den beiden Punkten $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gewinnen, auch aus einem beliebigen Punkte der Verbindungslinie von A und B und dem Vektor $\mathbf{a}$, welcher der Größe und Richtung nach durch die Verbindungsstrecke der Punkte A und B dargestellt wird. Die Produktgröße $\mathfrak{l}$ ist sonach völlig bestimmt, wenn die gerade Linie AB und eine Strecke von bestimmter Länge und bestimmtem Richtungssinn, die den Vektor $\mathbf{a}$ liefert, auf ihr gegeben sind. Die Größe $\mathfrak{l}$ läßt sich mithin deuten als eine Strecke von bestimmter Länge und bestimmtem Sinne auf einer bestimmten geraden Linie, und wir wollen sie deshalb als eine Liniengröße bezeichnen.[1]) Sie ist in der Tat der Punktgröße analog, denn wie diese einen Punkt behaftet mit einem bestimmten Zahlwert, so bedeutet die Liniengröße eine Linie, behaftet mit einem bestimmten Zahlwert, nämlich der Länge der auf ihr abgetragenen Strecke. Nur kommt bei der Liniengröße noch der Sinn dieser Strecke in Betracht, während bei dem Zahlfaktor der Punktgröße nur von einem algebraischen Vorzeichen die Rede sein kann. Die sechs Zahlwerte X, Y, Z, L, M, N bezeichnen wir als die Koordinaten der Liniengröße. Sie sind nicht voneinander unabhängig, sondern durch die Relation (8) verknüpft. Sie haben einzeln folgende Bedeutung: X, Y, Z sind die Projektionen der auf der Linie abgetragenen Strecke auf die Koordinatenachsen, sie sind die Komponenten des in der Liniengröße steckenden Vektors $\mathbf{a}$. Die Länge R der abgetragenen Strecke wird gegeben durch:

$$(11) \qquad \mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}.$$

Ist die Linie der Liniengröße der durch die Gleichung:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = \theta$$

dargestellten Ebene parallel, so muß:

$$\xi\,\mathrm{X} + \eta\,\mathrm{Y} + \zeta\,\mathrm{Z} = 0$$

1) So hat sie Graßmann in der ersten Ausdehnungslehre (1844), § 114 eingeführt.

sein, steht sie dagegen auf der Ebene senkrecht, so muß:

$$\mathrm{X} : \mathrm{Y} : \mathrm{Z} = \xi : \eta : \zeta$$

werden.

L, M, N erhält man, indem man das Dreieck, welches die Strecke auf der Linie als Basis mit dem Koordinatenursprung als Spitze bestimmt, auf die Koordinatenebenen projiziert. Die doppelten Flächen dieser Projektionen sind L, M, N, und die doppelte Fläche des Dreiecks selbst wird:

$$\mathrm{F} = \sqrt{\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2}. \tag{12}$$

Statt zweier Punkte wollen wir nun drei Punkte **A**, **B**, **C** durch äußere Multiplikation verbinden. Jedes äußere Produkt dreier Faktoren verschwindet, wenn zwei Faktoren einander gleich sind, und für die Multiplikation dreier ungleicher Faktoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gilt die Regel:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = -[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = [\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}]. \tag{13}$$

Sind also die drei Punkte durch die Ausdrücke:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{0} + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \\ \mathbf{B} = \mathbf{0} + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}, \\ \mathbf{C} = \mathbf{0} + x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k} \end{cases} \tag{14}$$

gegeben, so ergibt sich beim Ausmultiplizieren dieser symbolischen Summen ein viergliedriger Ausdruck:

$$\Pi = [\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}] = \xi\,\mathbf{I} + \eta\,\mathbf{J} + \zeta\,\mathbf{K} + \theta\,\boldsymbol{\Omega}, \tag{15}$$

in dem **I**, **J**, **K**, $\boldsymbol{\Omega}$ für die allein von Null verschiedenen unter den auftretenden Einheitsprodukten gesetzt sind, nämlich:

$$\mathbf{I} = [\mathbf{j}\,\mathbf{k}\,\mathbf{0}],\quad \mathbf{J} = [\mathbf{k}\,\mathbf{i}\,\mathbf{0}],\quad \mathbf{K} = [\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{0}],\quad \boldsymbol{\Omega} = [\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}]. \tag{16}$$

Die Koeffizienten ξ, η, ζ, θ dieser Einheitsprodukte sind leicht in Determinantenform anzugeben. Gemäß der Multiplikationsregel (13) wird:

$$\xi = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\quad \eta = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix},\quad \zeta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},\quad \theta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Die Bedeutung dieser Determinanten ist aus der analytischen Geometrie bekannt. ξ, η, ζ bedeuten die doppelten Flächeninhalte der Projektionen des Dreiecks ABC auf die Koordinatenebenen, und die doppelte Fläche δ dieses Dreieckes selbst ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\delta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \tag{18}$$

θ ist das sechsfache Volumen des Tetraeders, welches die drei Punkte A, B, C zusammen mit dem Koordinatenursprung O bestimmen. Besondere Vorsicht verlangt wieder die Bestimmung der Vorzeichen. Die Determinante ξ läßt sich schreiben:

$$\xi = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1),$$

und wenn wir:

$$y_2 - y_1 = r \cos \varphi, \quad z_2 - z_1 = r \sin \varphi,$$
$$y_3 - y_1 = r' \cos \varphi', \quad z_3 - z_1 = r' \sin \varphi'$$

setzen, wird:

$$\xi = r r' \sin (\varphi' - \varphi),$$

also positiv, wenn $\varphi' > \varphi$ ist, d. h. wenn die Richtung, die von der Projektion des Punktes B zur Projektion von C fortschreitet, eine positive Umkreisung der Projektion von A bedeutet. Projizieren wir also das Dreieck ABC mit seinem Umlaufssinn, der durch diese Reihenfolge der Ecken gegeben ist, auf die yz-Ebene, so muß der Umlaufssinn in dieser Ebene positiv sein, d. h. um die positive Richtung der x-Achse entgegen dem Uhrzeiger erfolgen, damit ξ positiv ist. Denken wir uns auf der Fläche des Dreiecks ABC eine vom Koordinatenursprung weggewendete Normale errichtet und nennen λ, μ, ν die Winkel, die sie mit den positiven Koordinatenachsen bildet, nehmen wir ferner die doppelte Dreiecksfläche δ mit dem positiven Vorzeichen, wenn die Reihenfolge $A B C$ der Ecken eine positive Umkreisung der durch die Winkel λ, μ, ν bestimmten Flächennormale bedeutet, dann können wir durch die Gleichungen:

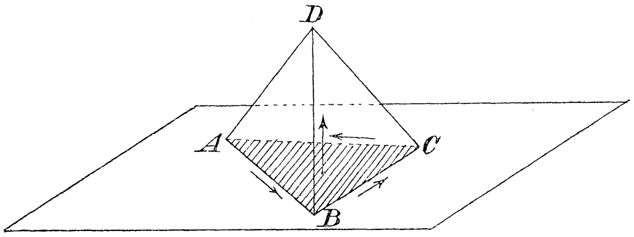

Fig. 8.

(19) $$\xi = \delta \cdot \cos \lambda, \quad \eta = \delta \cdot \cos \mu, \quad \zeta = \delta \cdot \cos \nu$$

die Werte ξ, η, ζ auch dem Vorzeichen nach festlegen. Im gleichen Sinne wird:

(19a) $$\theta = \delta \cdot p,$$

indem wir mit p die Länge des aus dem Koordinatenursprunge auf die Ebene des Dreiecks ABC gefällten Lotes bezeichnen. Diese Determinante ist nämlich nach dem im zweiten Kapitel Gesagten positiv, wenn der Übergang vom Vektor OB zum Vektor OC im Sinne einer positiven Umkreisung des Vektors OA erfolgt, so daß für einen in die Richtung dieses letzten Vektors gestellten Beobachter die Drehung entgegen dem Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Diese Festsetzung ist aber gleichbedeutend damit, daß der Sinn, in dem OA, OB, OC aufeinander folgen, einen positiven Umlauf bedeutet um alle Richtungen, die mit den durch diese Vektoren bestimmten spitze Winkel einschließen, wozu die in Betracht gezogene Normale der Dreiecksfläche $A B C$ immer gehört.

Wir können das äußere Produkt (15) der drei Punkte somit schreiben:

$$\Pi = \delta(\cos\lambda\,\mathrm{I} + \cos\mu\,\mathrm{J} + \cos\nu\,\mathrm{K} + p\,\Omega)$$

oder:

$$(20)\qquad \Pi = \delta\cdot\boldsymbol{\pi},$$

indem wir setzen:

$$(21)\qquad \boldsymbol{\pi} = \cos\lambda\,\mathrm{I} + \cos\mu\,\mathrm{J} + \cos\nu\,\mathrm{K} + p\,\Omega.$$

Diese Größe $\boldsymbol{\pi}$ hängt nur von der Lage der Ebene des Dreiecks ABC ab und kann als das analytische Symbol dieser Ebene gelten. Dieselbe ist, wenn $p \neq 0$, dadurch bestimmt, daß das auf sie vom Koordinatenursprung gefällte Lot die Länge p hat und mit den Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν bildet. Ihre Gleichung lautet in der sogenannten Normalform:

$$(22)\qquad \cos\lambda\,x + \cos\mu\,y + \cos\nu\,z - p = 0,$$

und wenn wir diese Gleichung mit δ multiplizieren, können wir sie schreiben:

$$(22\text{a})\qquad \xi x + \eta y + \zeta z - \theta = 0.$$

Der zu $\boldsymbol{\pi}$ hinzutretende Faktor δ hat die Bedeutung eines Flächeninhaltes, und die ganze Größe Π läßt sich somit geometrisch interpretieren als eine Fläche von bestimmtem Inhalte in einer bestimmten Ebene. Wir wollen sie deshalb eine Ebenengröße nennen.[1]) Sie ist der Punktgröße in gewisser Weise analog. Wie die letztere ein Punkt behaftet mit einem bestimmten Zahlfaktor, ist sie eine Ebene behaftet mit einem solchen Faktor. Daß dieser Faktor hier als eine Fläche gedeutet wird, bedingt aber einen gewissen Unterschied, indem mit der Fläche ein bestimmter Umlaufssinn zu verknüpfen ist. Man könnte diesen Umlaufssinn dadurch beseitigen, daß man an der Ebene ihre zwei Seiten unterscheidet und ob man die Fläche zu der einen oder anderen Seite rechnet, durch verschiedenes Vorzeichen ausdrückt. Bei einer geraden Linie ist ähnlich der doppelte Sinn zu unterscheiden, in dem diese Linie durchlaufen werden kann, und die Umkehrung dieses Sinnes gibt sich durch Vorzeichenwechsel an einer zu der Linie gehörigen Liniengröße zu erkennen. Bei der Punktgröße ist aber eine solche geometrische Unterscheidung unmöglich, es bleibt vielmehr die bloße algebraische Unterscheidung positiver und negativer Zahlfaktoren übrig. Die Punktgrößen nehmen so, als ungerichtete Größen, in dieser Analysis der Raumgrößen einen besonderen Platz ein.

Die Ebenengröße wird wie die Punktgröße analytisch durch einen Ausdruck mit vier Einheiten repräsentiert. Die Koeffizienten ξ, η,

1) Wort und Begriff stammen ebenfalls von Graßmann (Ausdehnungslehre von 1844, § 114).

ξ, θ dieser Einheiten $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{\Omega}$ wollen wir als die Koordinaten der Ebenengröße bezeichnen.

Wenn die drei Punkte A, B, C in einer geraden Linie liegen, so kann man in den Gleichungen (14) bei Einführung eines Parameters λ:

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

voraussetzen, denn von dieser Form sind die Koordinaten x, y, z eines Punktes auf der Verbindungslinie der Punkte mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2. Dann aber werden die vier Determinanten in (17) gleich Null, und da so die Koeffizienten in dem Ausdrucke (15) für das Produkt $[\mathbf{A\,B\,C}]$ verschwinden, wird dies Produkt selbst gleich Null. So können wir die einfache Gleichung:

$$(23) \qquad [\mathbf{A\,B\,C}] = 0$$

als die Bedingung dafür ansehen, daß die drei Punkte A, B, C in einer geraden Linie liegen.

Wir wollen nun nachweisen, daß, wenn die drei Punkte nicht in einer geraden Linie liegen, wir dieselbe Ebenengröße Π, die ihr Produkt darstellt, auch durch Multiplikation eines Punktes mit einem Flächenvektor erhalten können, ähnlich wie wir die Liniengröße durch Multiplikation eines Punktes mit einem Linienvektor gewannen. Führen wir nämlich die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{B} - \mathbf{A}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$$

ein, so entsteht durch ihre äußere Multiplikation ein Flächenvektor $\boldsymbol{\alpha} = [\mathbf{a\,b}]$. Bilden wir nun das Produkt von $\mathbf{A}$ und $\boldsymbol{\alpha}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}[\mathbf{A} \times \boldsymbol{\alpha}] &= [\mathbf{A\,a\,b}] = [\mathbf{A}\,(\mathbf{B}-\mathbf{A})\,(\mathbf{C}-\mathbf{A})] \\ &= [\mathbf{A\,B\,C}] - [\mathbf{A\,A\,C}] - [\mathbf{A\,B\,A}] + [\mathbf{A\,A\,A}] = [\mathbf{A\,B\,C}] = \Pi.\end{aligned}$$

Wir schreiben $[\mathbf{A} \times \boldsymbol{\alpha}]$, weil, wie man leicht sieht, $[\mathbf{A} \times \boldsymbol{\alpha}] = [\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{A}]$ wird, also dieses Produkt das kommutative Gesetz befolgt.

Ein beliebiger Punkt der Verbindungsebene von A, B, C läßt sich nun in der Form darstellen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{a} + \lambda'\,\mathbf{b},$$

und weiter läßt sich dem Flächenvektor die Form $\boldsymbol{\alpha} = [(\mathbf{Q}-\mathbf{P})\,(\mathbf{R}-\mathbf{P})]$ geben. Hierbei sind Q, R ebenfalls zwei Punkte der Verbindungsebene von A, B, C, sie lassen sich also in der folgenden Weise geben:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mu\,\mathbf{a} + \mu'\,\mathbf{b}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{P} + \nu\,\mathbf{a} + \nu'\,\mathbf{b}$$

und haben nur der Bedingung $\mu\,\nu' - \nu\,\mu' = 1$ zu genügen. Dann aber finden wir:

$$[\mathbf{P} \times \boldsymbol{\alpha}] = [(\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{a} + \lambda'\,\mathbf{b})\,\mathbf{a\,b}] = [\mathbf{A\,a\,b}] + \lambda\,[\mathbf{a\,a\,b}] + \lambda'[\mathbf{b\,a\,b}] = [\mathbf{A\,a\,b}] = \Pi$$

und anderseits:

$$[\mathbf{P} \times \boldsymbol{\alpha}] = [\mathbf{P}\,(\mathbf{Q}-\mathbf{P})\,(\mathbf{R}-\mathbf{P})] = [\mathbf{P\,Q\,R}].$$

So sehen wir, daß wir die Ebenengröße Π erhalten, indem wir einen beliebigen Punkt $\mathbf{P}$ ihrer Ebene mit dem Flächenvektor $\boldsymbol{\alpha}$ multiplizieren. Die Ebenengröße wird also gewonnen durch Multiplikation von irgend drei Punkten $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ einer bestimmten Ebene, die ein Dreieck von bestimmtem Inhalte und Umlaufssinn bilden. Führen wir die Multiplikation der Vektoren $\mathfrak{a} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ und $\mathfrak{b} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$, deren Komponenten:

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1 \quad \text{und} \quad x_3 - x_1, \quad y_3 - y_1, \quad z_3 - z_1$$

sind, aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = & \{(y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1)\}\,\mathfrak{i} \\ & + \{(z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)\}\,\mathfrak{j} \\ & + \{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\}\,\mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in diesem Ausdrucke sind aber nichts anderes als die durch die Gleichungen (17) eingeführten Größen ξ, η, ζ. Wir haben also:

$$\boldsymbol{\alpha} = \xi\,\mathfrak{i} + \eta\,\mathfrak{j} + \zeta\,\mathfrak{k}. \tag{24}$$

Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmen in der Ebene der Ebenengröße ein Parallelogramm, dessen Inhalt gleich dem durch (18) gegebenen δ wird, und der Flächenvektor $\boldsymbol{\alpha}$, der durch dieses Parallelogramm oder durch ein Dreieck, von dem $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei Seiten bilden, dargestellt wird, geht aus der Ebenengröße hervor, indem man deren Ebene die Freiheit gibt, sich parallel zu verschieben, also nur ihre Stellung, nicht aber ihre Lage im Raume festhält. Der Flächenvektor wird sonach durch Multiplikation mit einem Punkte an eine durch diesen Punkt gehende Ebene gebunden, ebenso wie ein Linienvektor durch Multiplikation mit einem Punkte an eine durch diesen Punkt gehende Linie gebunden wird.

Die Ebenengröße Π kann auch durch die äußere Multiplikation eines Punktes mit einer Liniengröße gewonnen werden. Dies sieht man sofort ein, wenn man in dem Ausdrucke $\Pi = [\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}]$ einsetzt:

$$[\mathbf{B}\,\mathbf{C}] = \mathfrak{a},$$

wo dann $\mathfrak{a}$ eine Liniengröße bedeutet So erhält man in der Tat:

$$\Pi = [\mathbf{A} \times \mathfrak{a}].$$

Nehmen wir allgemein $\Pi = [\mathbf{P} \times \mathfrak{p}]$, setzen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{0} + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

und dazu:

$$\mathfrak{p} = \mathrm{X}[\mathbf{0}\,\mathbf{i}] + \mathrm{Y}[\mathbf{0}\,\mathbf{j}] + \mathrm{Z}[\mathbf{0}\,\mathbf{k}] + \mathrm{L}[\mathbf{j}\,\mathbf{k}] + \mathrm{M}[\mathbf{k}\,\mathbf{i}] + \mathrm{N}[\mathbf{i}\,\mathbf{j}],$$

so sieht man leicht, daß, wenn der durch Ausmultiplizieren dieser Summen entstehende Ausdruck:

$$[\mathrm{P} \times \mathfrak{p}] = \Pi = \xi\,[\mathrm{j\,k\,0}] + \eta\,[\mathrm{k\,i\,0}] + \zeta\,[\mathrm{i\,j\,0}] + \theta\,[\mathrm{i\,j\,k}]$$

werden soll, wir zu setzen haben:

$$(25) \qquad \begin{cases} \xi = \mathrm{L} \quad - \mathrm{Z}\,y + \mathrm{Y}\,z, \\ \eta = \mathrm{M} \quad - \mathrm{X}\,z + \mathrm{Z}\,x, \\ \zeta = \mathrm{N} \quad - \mathrm{Y}\,x + \mathrm{X}\,y, \\ \theta = \mathrm{L}\,x + \mathrm{M}\,y + \mathrm{N}\,z. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die drei ersten dieser Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z, addieren sie und ziehen von der Summe die letzte Gleichung ab, so ergibt sich:

$$(22\mathrm{a}) \qquad \xi\,x + \eta\,y + \zeta\,z - \theta = 0.$$

Diese Gleichung haben wir für die Ebene der Ebenengröße gefunden, und hiernach muß, was auch sonst klar ist, der Punkt mit den Koordinaten x, y, z, der mit der Liniengröße $\mathfrak{p}$ multipliziert die Ebenengröße ergibt, dieser Ebene angehören. Die Linie der Liniengröße $\mathfrak{p}$ selbst gehört ebenfalls der Ebene an. Denn wenn Q ein beliebiger Punkt auf dieser Linie ist, so können wir:

$$(26) \qquad \mathfrak{p} = [\mathrm{Q\,R}]$$

setzen, es wird sonach:

$$\Pi = [\mathrm{P\,Q\,R}],$$

und die drei Punkte P, Q, R müssen als die bestimmenden Punkte der Ebenengröße ihrer Ebene π angehören. Weil aber die drei Punkte P, Q, R in der Ebene π nur an die Bedingung, daß sie ein Dreieck von bestimmtem Inhalte bilden sollen, gebunden sind, kann, auch wenn P gegeben ist, die Linie QR, also die Linie der Liniengröße $\mathfrak{p}$ noch beliebig in der Ebene π gewählt werden.

Wenn nun P mit Q und R in einer geraden Linie liegt, so wird ξ, η, ζ, $\theta = 0$ und die Gleichungen (25) gehen über in:

$$(27) \qquad \begin{cases} \mathrm{L} \quad - \mathrm{Z}\,y + \mathrm{Y}\,z = 0, \\ \mathrm{M} \quad - \mathrm{X}\,z + \mathrm{Z}\,x = 0, \\ \mathrm{N} \quad - \mathrm{Y}\,x + \mathrm{X}\,y = 0, \\ \mathrm{L}\,x + \mathrm{M}\,y + \mathrm{N}\,z = 0. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen genügen sonach die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes auf der Linie der Liniengröße $\mathfrak{p}$. Unter diesen vier Gleichungen sind zwei überzählig. Denn multiplizieren wir die ersten drei von ihnen der Reihe nach mit X, Y, Z und addieren sie, so ergibt sich die identische Gleichung:

$$(8) \qquad \mathrm{X\,L} + \mathrm{Y\,M} + \mathrm{Z\,N} = 0,$$

und multiplizieren wir die ersten drei Gleichungen mit x, y, z und addieren sie, so liefern sie die vierte Gleichung.

Nehmen wir für x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes P, so sind die durch die ersten drei Gleichungen (25) bestimmten Größen ξ, η, ζ die Komponenten eines Flächenvektors $\boldsymbol{\alpha}$. Derselbe wird geometrisch durch ein Dreieck gegeben, von dem eine die Liniengröße repräsentierende Strecke die Basis und der Punkt P die Spitze ist. Diesen Flächenvektor $\boldsymbol{\alpha}$ wollen wir das Vektormoment der Liniengröße für den Punkt P nennen.

Es bleiben noch die äußeren Produkte von vier Punkten zu erledigen. Die Punkte seien:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{0} + x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{0} + x_2\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j} + z_2\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{0} + x_3\,\mathbf{i} + y_3\,\mathbf{j} + z_3\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{0} + x_4\,\mathbf{i} + y_4\,\mathbf{j} + z_4\,\mathbf{k}. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Wenn wir nun die Multiplikation ausführen, so können wir zunächst das äußere Produkt von $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ bilden und erhalten so die vorher behandelte Ebenengröße Π. Diese ist dann noch mit dem letzten Punkte $\mathbf{D}$ durch äußere Multiplikation zu verbinden. Entnehmen wir aus Gleichung (15):

$$\Pi = \xi\,\mathbf{I} + \eta\,\mathbf{J} + \zeta\,\mathbf{K} + \theta\,\boldsymbol{\Omega}$$

und multiplizieren diese Ebenengröße mit dem Punkte:

$$\mathbf{P} = \mathbf{0} + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$$

so ergibt sich aus der Bedeutung, welche die Einheiten $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{\Omega}$ nach den Gleichungen (16) haben, daß unter den entstehenden Einheitsprodukten nur die von Null verschieden sind, welche die vier verschiedenen Grundeinheiten $\mathbf{0}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ enthalten. Wir wollen nun:

$$[\mathbf{0\,i\,j\,k}] = \boldsymbol{\varepsilon} \tag{29}$$

setzen und finden dann, daß:

$$[\mathbf{I\,i}] = [\mathbf{J\,j}] = [\mathbf{K\,k}] = -[\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{0}] = \boldsymbol{\varepsilon} \tag{30}$$

wird, während alle anderen auftretenden Einheitsprodukte verschwinden. Wir erhalten somit für das Produkt:

$$[\Pi\,\mathbf{P}] = (\xi x + \eta y + \zeta z - \theta)\,\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{31}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung gleich Null gesetzt, ergibt nach (22a) die Bedingung dafür, daß der Punkt $\mathbf{P}$ in der Ebene der Ebenengröße Π liegt. Diese Bedingung läßt sich also schreiben:

$$[\Pi\,\mathbf{P}] = 0, \tag{32}$$

und indem wir $\Pi = [\mathbf{A\,B\,C}]$ einsetzen, finden wir:

$$[\mathbf{A\,B\,C\,P}] = 0 \tag{33}$$

als Bedingung dafür, daß der Punkt $\mathbf{P}$ mit den Punkten $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ in einer Ebene liegt oder, wenn man will, als Gleichung der durch die Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ bestimmten Ebene.

Wir nehmen nun für **P** den Punkt **D**, setzen $\Theta\,\varepsilon = [\Pi\,\mathbf{D}]$ oder:

$$(34) \qquad \Theta\,\varepsilon = [\mathbf{A\,B\,C\,D}]$$

und substituieren gleichzeitig in dem Ausdrucke dieser Größe, der sich nach (31) ergibt, aus (17) die Werte für ξ, η, ζ, θ. Dann läßt sich das, was herauskommt, leicht in Form einer Determinante schreiben, wir finden:

$$(35) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

Anderseits können wir in dem Ausdrucke für Θ auch die Werte (19) und (19a) für ξ, η, ζ, θ einsetzen und erhalten dann:

$$(36) \qquad \begin{aligned} \Theta &= \delta\,(\cos\lambda\, x_4 + \cos\mu\, y_4 + \cos\nu\, z_4 - p) \\ &= \delta \cdot p_D, \end{aligned}$$

indem wir mit p_D den Abstand des Punktes D von der Ebene π der Ebenengröße Π, positiv nach der dem Koordinatenursprung abgewandten Seite und negativ nach dem Koordinatenursprung zu gerechnet, bezeichnen. δ war der doppelte Inhalt des Dreiecks ABC, positiv gerechnet, wenn die Reihenfolge ABC der Ecken einen positiven Umlauf (entgegen dem Uhrzeiger) um die positive (nach außen, vom Koordinatenursprung weg gerichtete) Normale der Dreiecksfläche bedeutet. Hieraus sieht man (vgl. Fig. 8), daß δ und p_D gleiches Vorzeichen haben, also Θ positiv wird, wenn der Umlauf ABC um das Dreieck eine positive Umkreisung für die nach der Seite, auf der D liegt, gerichtete Normale bedeutet, und gleichzeitig wird, dem absoluten Betrage nach, Θ gleich dem sechsfachen Volumen des Tetraeders, von dem A, B, C, D die Ecken bilden.

Für die angegebene Festlegung des Vorzeichens läßt sich aber noch eine andere Formulierung geben. Der nach der Seite von D hin genommene Sinn der Normalen auf der Dreiecksfläche ABC stimmt nämlich mit dem Sinne, der von C nach D weist, überein, und der Umlaufssinn ABC des Dreiecks ist mit dem Sinne der Drehung um C, die der Übergang von A nach B bedeutet, gleichstimmig. Wenn also der Übergang von A nach B einen positiven Drehsinn um die Richtung CD festlegt, ist Θ positiv und negativ im entgegengesetzten Falle. Das heißt aber, wenn wir die gemeinsame Normale der Linien AB und CD, in dem Sinne genommen, der von der ersten Linie nach der zweiten weist, ins Auge fassen, so muß der Übergang von AB zu CD eine Drehung in positivem Sinne, d. h. bei unserer Festlegung des positiven Sinnes links herum bedeuten. Wenn wir also den Übergang von der Linie AB zur Linie CD ausführen, indem wir mit einer Gleitung längs der gemeinsamen Normale eine Drehung um dieselbe verbinden, also insgesamt eine Schraubenbewegung ausführen, so muß der Übergang im Sinne einer Linksschraubung erfolgen, damit Θ positiv werde, und Θ ist negativ, wenn dieser Übergang eine Rechtsschraubung bedeutet.

Wenn wir die Längen der Strecken AB und CD mit a und b bezeichnen, mit d den kürzesten Abstand ihrer Linien und mit φ den Winkel, unter dem diese Linien sich kreuzen, so wird das sechsfache Volumen des Tetraeders $ABCD$, also der absolute Betrag von Θ:

$$|\Theta| = a\,b\,d \sin\varphi, \tag{37a}$$

und das Vorzeichen von Θ ist nach der soeben gegebenen Regel zu bestimmen. Der vorstehende Ausdruck kann aber den Wert von Θ auch dem Vorzeichen nach liefern, wenn wir dem Winkel φ das gehörige Vorzeichen geben. Um diesen Winkel sichtbar zu machen, ziehen wir durch den Fußpunkt der gemeinsamen Normale auf CD eine Parallele zu AB. Fällt dann die Richtung CD auf die rechte Seite der gezogenen Parallelen, wie es in der nebenstehenden Figur der Fall ist, so ist der Winkel φ, den CD mit der Parallelen bildet, negativ zu nehmen, damit man Θ mit dem richtigen Vorzeichen erhält. Es ist also hier wie überall der Winkel φ links herum positiv, rechts herum positiv zu rechnen.

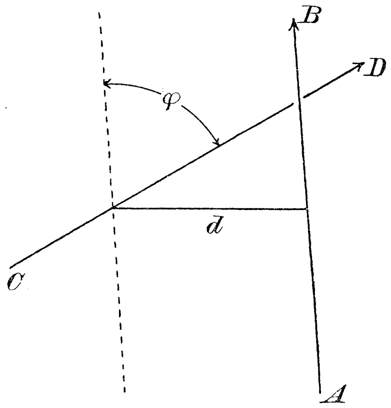

Fig. 9.

Der gefundene Ausdruck für Θ gewinnt eine besondere Bedeutung, wenn wir Θ als das Produkt zweier Liniengrößen ansehen. Führen wir nämlich die Liniengrößen:

$$\mathfrak{a} = [\mathrm{A\,B}], \quad \mathfrak{b} = [\mathrm{C\,D}]$$

ein, so wird das Produkt $[\mathrm{A\,B\,C\,D}] = \Theta\,\varepsilon$ allein abhängig von diesen Größen, und wir können setzen:

$$\Theta\,\varepsilon = [\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}], \tag{37b}$$

wie wir schreiben müssen, da $[\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}] = [\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}]$ ist, das Produkt also das kommutative Gesetz befolgt. Für Θ selbst können wir schreiben:

$$\Theta = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}.$$

In der Tat ist sofort zu sehen, daß diese Größe in jeder Weise den Charakter eines inneren Produktes hat. Wir wollen nun die Koordinaten der beiden Liniengrößen einführen, die nach (7) sind:

für $\mathfrak{a}$: $\quad \mathrm{X} = x_2 - x_1, \quad \mathrm{Y} = y_2 - y_1, \quad \mathrm{Z} = z_2 - z_1,$
$\quad \mathrm{L} = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad \mathrm{M} = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad \mathrm{N} = x_1 y_2 - y_1 x_2,$

für $\mathfrak{b}$: $\quad X' = x_4 - x_3, \quad Y' = y_4 - y_3, \quad Z' = z_4 - z_3,$
$\quad L' = y_3 z_4 - z_3 y_4, \quad M' = z_3 x_4 - x_3 z_4, \quad N' = x_3 y_4 - y_3 x_4,$

so ergibt sich, indem wir die Determinante in (35) nach ihren zweireihigen Unterdeterminanten auflösen, sofort, daß:

$$\Theta = L X' + M Y' + N Z' + X L' + Y M' + Z N' \tag{37}$$

wird. Die geometrische Bedeutung dieses Ausdruckes ist dann die, daß sein absoluter Wert gleich dem sechsfachen Volumen des Tetraeders ist, das zwei die Liniengrößen repräsentierende Strecken als zwei Gegenkanten bestimmen, während das Vorzeichen nach der gegebenen Regel durch einen Schraubensinn festzulegen ist. Wir wollen diesen Ausdruck als das gegenseitige Moment der beiden Liniengrößen bezeichnen.

Endlich möge noch angemerkt werden, daß die Größe $\Theta\,\varepsilon$ auch als das äußere Produkt einer Ebenengröße mit einem Linienvektor aufgefaßt werden kann.

Setzen wir nämlich:

$$\Pi = [\mathbf{A\ B\ C}], \quad \mathfrak{c} = \mathbf{D} - \mathbf{C},$$

so daß wieder Π eine Ebenengröße, $\mathfrak{c}$ einen Linienvektor bedeutet, dann wird:

$$[\Pi\,\mathfrak{c}] = [\mathbf{A\ B\ C}\,(\mathbf{D} - \mathbf{C})] = [\mathbf{A\ B\ C\ D}] - [\mathbf{A\ B\ C\ C}] = [\mathbf{A\ B\ C\ D}] = \Theta\,\varepsilon.$$

Setzen wir anderseits:

$$\mathfrak{a} = [\mathbf{A\ B}], \quad \gamma = [(\mathbf{C} - \mathbf{B})\,(\mathbf{D} - \mathbf{C})] = -[(\mathbf{B} - \mathbf{C})\,(\mathbf{D} - \mathbf{C})],$$

so daß $\mathfrak{a}$ eine Liniengröße, γ einen Flächenvektor bezeichnet, dann können wir annehmen:

$$[\mathfrak{a} \times \gamma] = [\mathbf{A\ B}\,(\mathbf{C} - \mathbf{B})\,(\mathbf{D} - \mathbf{C})]$$

und dies wird

$$= [\mathbf{A\ B\ C\ D}] - [\mathbf{A\ B\ B\ D}] - [\mathbf{A\ B\ C\ C}] + [\mathbf{A\ B\ B\ C}] = [\mathbf{A\ B\ C\ D}] = \Theta\,\varepsilon,$$

so daß wir

$$\Theta = \mathfrak{a} \times \gamma$$

setzen und als das innere Produkt einer Liniengröße und eines Flächenvektors auffassen können.

Wir beweisen schließlich, daß das äußere Produkt von fünf Punkten immer verschwindet. Zu dem Zwecke gehen wir von der früher gemachten Bemerkung aus, daß, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ beliebige, aber nicht einer Ebene parallele Vektoren von der Länge 1 sind, jeder vierte Vektor $\mathfrak{d}$ in der Form darstellbar ist:

$$\mathfrak{d} = \lambda\,\mathfrak{a} + \lambda'\,\mathfrak{b} + \lambda''\,\mathfrak{c}.$$

Sind nun $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{P}$ die fünf zu multiplizierenden Punkte, so setze man die vier Vektoren:

$$\text{(38)} \qquad \mathbf{B}-\mathbf{A}=a\,\mathfrak{a},\quad \mathbf{C}-\mathbf{A}=b\,\mathfrak{b},\quad \mathbf{D}-\mathbf{A}=c\,\mathfrak{c},$$
$$\mathbf{P}-\mathbf{A}=\lambda\,\mathfrak{a}+\lambda'\,\mathfrak{b}+\lambda''\,\mathfrak{c}.$$

Dann wird das Produkt:

$$\text{(39)} \qquad [\mathbf{A\,B\,C\,D\,P}]=[\mathbf{A}\,(\mathbf{B}-\mathbf{A})\,(\mathbf{C}-\mathbf{A})\,(\mathbf{D}-\mathbf{A})\,(\mathbf{P}-\mathbf{A})]$$
$$=a\,b\,c\,[\mathbf{A}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,(\lambda\,\mathfrak{a}+\lambda'\,\mathfrak{b}+\lambda''\,\mathfrak{c})]=0,$$

weil beim Ausmultiplizieren der Summe nur Produkte mit zwei gleichen Faktoren auftreten.

Nebenbei ergibt sich, daß mit Hilfe eines beliebigen Punktes $\mathbf{A}$ und dreier Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sich jeder Punkt $\mathbf{P}$ des Raumes in der Form darstellen läßt:

$$\text{(40)} \qquad \mathbf{P}=\mathbf{A}+\lambda\,\mathfrak{a}+\lambda'\,\mathfrak{b}+\lambda''\,\mathfrak{c}.$$

λ, λ', λ'' sind dann die schiefwinkligen Koordinaten des Punktes in einem System, dessen Ursprung der Punkt $\mathbf{A}$ ist und dessen Achsen die Richtungen der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ haben. Von einem solchen Koordinatensystem machen wir aber nur vereinzelt Gebrauch.

Setzt man in (40) gemäß den Gleichungen (38):

$$\mathfrak{a}=\frac{1}{a}(\mathbf{B}-\mathbf{A}),\quad \mathfrak{b}=\frac{1}{b}(\mathbf{C}-\mathbf{A}),\quad \mathfrak{c}=\frac{1}{c}(\mathbf{D}-\mathbf{A}),$$

so findet man:

$$\text{(41)} \qquad \mathbf{P}=\xi_0\,\mathbf{A}+\xi_1\,\mathbf{B}+\xi_2\,\mathbf{C}+\xi_3\,\mathbf{D},$$

wenn man:

$$\xi_0=1-\frac{\lambda}{a}-\frac{\lambda'}{b}-\frac{\lambda''}{c},\quad \xi_1=\frac{\lambda}{a},\quad \xi_2=\frac{\lambda'}{b},\quad \xi_3=\frac{\lambda''}{c}$$

macht, woraus:

$$\text{(42)} \qquad \xi_0+\xi_1+\xi_2+\xi_3=1$$

folgt. Jeder Punkt $\mathbf{P}$ läßt sich also durch vier beliebige Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, die nur nicht einer Ebene angehören dürfen, linear ausdrücken, wobei aber die Summe der Koeffizienten gleich der Einheit sein muß, damit der dargestellte Punkt ein einfacher sei. Hat die Summe einen anderen Wert, sagen wir m, so wird durch den Ausdruck (41) eine Punktgröße dargestellt, deren Zahlfaktor m ist.

Fünftes Kapitel.

Produkte von Ebenengrößen.

Wir verfolgen nun den Gedanken, die Ebenengrößen, die aus den Punktgrößen abgeleitet worden sind, als selbständige Elemente des Raumes anzusehen.[1]) Dies ist gleichbedeutend damit, daß wir die

1) Man vergleiche zu diesem Kapitel die Abhandlung von Graßmann, Grundsätze der stereometrischen Multiplikation, Journ. f. Math. Bd. 49 (1855) p. 10, Werke II[1], p. 145.

vier Einheiten dieser Ebenengrößen, $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{\Omega}$, die ursprünglich aus den Einheiten $\mathbf{0}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ der Punktgrößen abgeleitet worden sind, nunmehr als selbständige Einheiten auffassen und denselben Multiplikationsregeln unterwerfen, denen die Ureinheiten unterliegen, indem wir die Betrachtung wieder ausschließlich auf äußere Produkte beschränken. Die Multiplikationsregeln der Einheiten sind dann folgende:

$$(1) \begin{cases} [\mathbf{I}\,\mathbf{I}] = 0, \quad [\mathbf{J}\,\mathbf{J}] = 0, \quad [\mathbf{K}\,\mathbf{K}] = 0, \quad [\Omega\,\Omega] = 0, \\ [\Omega\,\mathbf{I}] = -[\mathbf{I}\,\Omega], \quad [\Omega\,\mathbf{J}] = -[\mathbf{J}\,\Omega], \quad [\Omega\,\mathbf{K}] = -[\mathbf{K}\,\Omega], \\ [\mathbf{K}\,\mathbf{J}] = -[\mathbf{J}\,\mathbf{K}], \quad [\mathbf{I}\,\mathbf{K}] = -[\mathbf{K}\,\mathbf{I}], \quad [\mathbf{J}\,\mathbf{I}] = -[\mathbf{I}\,\mathbf{J}]. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Regeln läßt sich das äußere Produkt zweier Ebenengrößen Π, Π', die durch die Ausdrücke:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Pi = \xi\,\mathbf{I} + \eta\,\mathbf{J} + \zeta\,\mathbf{K} + \theta\,\Omega, \\ \Pi' = \xi'\mathbf{I} + \eta'\mathbf{J} + \zeta'\mathbf{K} + \theta'\Omega \end{cases}$$

gegeben sind, sofort ausführen, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} = [\Pi\,\Pi'] &= (\xi\,\theta' - \theta\,\xi')\,[\mathbf{I}\,\Omega] + (\eta\,\theta' - \theta\,\eta')\,[\mathbf{J}\,\Omega] + (\zeta\,\theta' - \theta\,\zeta')\,[\mathbf{K}\,\Omega] \\ (3) \qquad &+ (\eta\,\zeta' - \zeta\,\eta')\,[\mathbf{J}\,\mathbf{K}] + (\zeta\,\xi' - \xi\,\zeta')\,[\mathbf{K}\,\mathbf{I}] + (\xi\,\eta' - \eta\,\xi')\,[\mathbf{I}\,\mathbf{J}]. \end{aligned}$$

Jede der beiden Ebenengrößen Π, Π' läßt sich nun als Produkt eines Punktes mit einer Liniengröße deuten, und da, wie wir gesehen haben, die Linie dieser Liniengröße in der Ebene der Ebenengröße beliebig angenommen werden kann, so können wir sie für beide Ebenengrößen mit der Schnittlinie ihrer Ebenen, falls diese nicht parallel sind, zusammenfallen lassen. Wir bezeichnen dann mit $\mathfrak{s}$ eine Liniengröße, die dieser Schnittlinie angehört, mit $\mathbf{P}$ einen Punkt in der Ebene der Ebenengröße Π, mit $\mathbf{P}'$ einen Punkt in der Ebene von Π' und setzen:

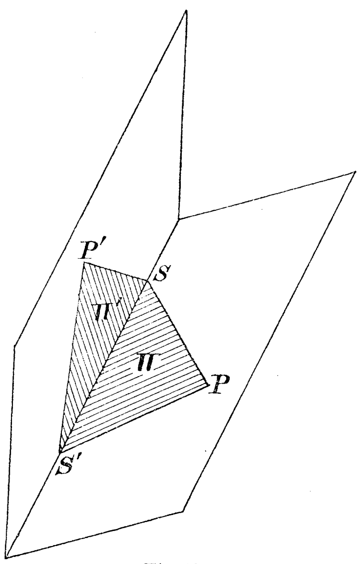

Fig. 10.

$$(4) \qquad \Pi = [\mathbf{P} \times \mathfrak{s}], \qquad \Pi' = [\mathbf{P}' \times \mathfrak{s}].$$

Die Liniengröße sei durch den Ausdruck gegeben:

$$(5) \qquad \mathfrak{s} = \mathrm{X}\,\mathbf{i} + \mathrm{Y}\,\mathbf{j} + \mathrm{Z}\,\mathfrak{k} + \mathrm{L}\,\mathfrak{i} + \mathrm{M}\,\mathfrak{j} + \mathrm{N}\,\mathfrak{k},$$

wobei:

$$(5\mathrm{a}) \qquad \mathrm{X\,L} + \mathrm{Y\,M} + \mathrm{Z\,N} = 0.$$

Die Punkte seien:

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{0} + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{P}' = \mathbf{0} + x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}. \end{cases}$$

Dann finden wir nach Formel (25) des vorigen Kapitels für die Koordinaten der Ebenengrößen Π, Π' die folgenden Werte:

$$(7)\quad \begin{cases} \xi = L - Z\,y + Y\,z, & \xi' = L - Z\,y' + Y\,z', \\ \eta = M - X\,z + Z\,x, & \eta' = M - X\,z' + Z\,x', \\ \zeta = N - Y\,x + X\,y, & \zeta' = N - Y\,x' + X\,y', \\ \theta = L\,x + M\,y + N\,z, & \theta' = L\,x' + M\,y' + N\,z'. \end{cases}$$

Rechnen wir nach diesen Formeln die Koeffizienten in dem Ausdrucke (3) aus, so finden wir zuerst:

$$\begin{aligned} \xi\,\theta' - \xi'\,\theta = {} & L\,[L\,(x' - x) + M\,(y' - y) + N\,(z' - z)] \\ & + L\,Y\,(z\,x' - x\,z') + L\,Z\,(x\,y' - y\,x') - (M\,Y + N\,Z)\,(y\,z' - z\,y'). \end{aligned}$$

Da aber nach (5a):

$$L\,X = -(M\,Y + N\,Z)$$

ist, so können wir schreiben:

$$\xi\,\theta' - \xi'\,\theta = L \cdot \Theta,$$

indem wir setzen:

$$\begin{aligned} \Theta = {} & L\,(x' - x) + M\,(y' - y) + N\,(z' - z) \\ & + X\,(y\,z' - z\,y') + Y\,(z\,x' - x\,z') + Z\,(x\,y' - y\,x'). \end{aligned}$$

Statt dieses Ausdruckes können wir, indem wir durch die Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{aligned} & X' = x' - x, && Y' = y' - y, && Z' = z' - z, \\ & L' = y\,z' - z\,y', && M' = z\,x' - x\,z', && N' = x\,y' - y\,x' \end{aligned}$$

die Koordinaten der Liniengröße $[P\,P']$ einführen, den folgenden nehmen:

$$(9)\quad \Theta = L\,X' + M\,Y' + N\,Z' + X\,L' + Y\,M' + Z\,N',$$

der mit dem in Gleichung (37) des vorigen Kapitels gegebenen übereinstimmt.

Ebenso wie den ersten Koeffizienten in dem Ausdrucke (3) bestimmen wir den zweiten und dritten:

$$\eta\,\theta' - \eta'\,\theta = M \cdot \Theta, \quad \zeta\,\theta' - \zeta'\,\theta = N \cdot \Theta.$$

Ferner finden wir:

$$\begin{aligned} \eta\,\zeta' - \zeta\,\eta' & = -(M\,Y + N\,Z)\,(x' - x) + X\,[M\,(y' - y) + N\,(z' - z) \\ & \quad + X\,(y\,z' - z\,y') + Y\,(z\,x' - x\,z') + Z\,(x\,y' - y\,x')] \\ & = X \cdot \Theta \end{aligned}$$

und ebenso:

$$\zeta\,\xi' - \xi\,\zeta' = Y \cdot \Theta, \quad \xi\,\eta' - \eta\,\xi' = Z \cdot \Theta.$$

Also wird schließlich:

$$(10)\quad \begin{aligned} [\Pi\,\Pi'] = \Theta\,\{ & L\,[I\,\Omega] + M\,[J\,\Omega] + N\,[K\,\Omega] \\ & + X\,[J\,K] + Y\,[K\,I] + Z\,[I\,J]\}. \end{aligned}$$

Θ ist hierin das gegenseitige Moment der Liniengrößen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{p} = [P\,P']$.

Denken wir uns die Liniengröße $\mathfrak{s}$ durch eine Strecke SS' auf der Schnittlinie der beiden Ebenen gegeben, so daß:

$$\mathfrak{s} = [\mathbf{S}\,\mathbf{S}'] \tag{11}$$

anzusetzen ist, dann wird:

$$\Theta\,\varepsilon = [\mathbf{S}\,\mathbf{S}'\,\mathbf{P}\,\mathbf{P}'], \tag{12}$$

während:

$$\Pi = [\mathbf{S}\,\mathbf{S}'\,\mathbf{P}], \quad \Pi' = [\mathbf{S}\,\mathbf{S}'\,\mathbf{P}'] \tag{13}$$

zu nehmen ist.

Auf die Ebenen von Π und Π' wollen wir den diesen Ebenengrößen anhaftenden Drehsinn übertragen, etwa indem wir an den Ebenen, wie früher angedeutet wurde, eine obere und untere Seite unterscheiden, so daß der Drehsinn auf der oberen Seite, d. h. für die nach dieser hin gerichtete Ebenennormale immer positiv. Von den Ebenen wollen wir nur dann annehmen, daß sie zusammenfallen, wenn außer der Übereinstimmung ihrer Lage auch die obere Seite der einen Ebene gleichzeitig die obere Seite der anderen Ebene ist. Dann gilt folgendes.

Die Größe Θ ist positiv, wenn der Übergang von P zu P' eine Drehung in positivem Sinne um die Richtung, die von S nach S' weist, bedeutet, wenn also die Ebene von Π in die Ebene von Π' übergeht durch eine Drehung in positivem Sinne um die in dem Sinne SS' genommene Schnittlinie s beider Ebenen. In diesem Falle wollen wir den Drehsinn mit dem Richtungssinn gleichstimmig nennen. Wir wollen uns die Punkte P und P' so gewählt denken, daß diese Gleichstimmigkeit eintritt. Sie hängt nur davon ab, auf welcher Seite der Schnittlinie s die Punkte P und P' in den Ebenen der Ebenengrößen Π und Π' angenommen werden. Denn durch die Bedingung der Gleichstimmigkeit wird an der Schnittlinie der Sinn, in dem S und S' aufeinanderfolgen sollen, festgelegt. Dann aber ergibt sich für die Ebenengrößen Π und Π' der richtige Umlaufssinn, indem man P und P' auf der gehörigen Seite der Linie SS' annimmt. So können wir hier Θ immer als positiv voraussetzen. Für seinen Betrag finden wir, da es dem sechsfachen Volumen des Tetraeders $SS'PP'$ gleich ist, auf folgende Art einen passenden Ausdruck. Wir bezeichnen mit δ und δ' den doppelten Flächeninhalt der Dreiecke $SS'P$ und $SS'P'$. Dies sind dann dem absoluten Werte nach die Zahlfaktoren der Ebenengrößen Π und Π'. Den Winkel zwischen deren Ebenen wollen wir mit σ und die Entfernung SS' mit s bezeichnen. Ist dann h die Höhe des Tetraeders, die auf der Seitenfläche $SS'P$ senkrecht steht, und h_s die Höhe des Dreiecks $SS'P'$, die zu der Basis $SS' = s$ gehört, so wird $h = h_s \cdot \sin\sigma$, $\delta' = s \cdot h_s$, und somit finden wir für das sechsfache Volumen des Tetraeders:

$$\Theta = \delta \cdot h = \delta \cdot h_s \cdot \sin\sigma = \frac{\delta\,\delta' \sin\sigma}{s}. \tag{12a}$$

Die Länge s der Liniengröße $\mathfrak{s} = [\mathrm{S}\,\mathrm{S}']$ ist aber durch die Ebenengrößen Π und Π' nicht bestimmt. Wir können vielmehr über sie frei verfügen, und wir wollen dies so tun, daß wir:

$$s = \delta\,\delta' \sin \sigma \tag{14}$$

annehmen. Dann wird $\Theta = 1$, und das Produkt $[\Pi\,\Pi']$ unterscheidet sich, was die analytische Darstellung betrifft, gemäß der Gleichung (10) von der in (5) gegebenen Liniengröße $\mathfrak{s}$ bloß durch die Bezeichnung der Einheiten. Der Übergang von der einen zur anderen Größe geschieht, indem wir die Einheiten nach dem folgenden Schema einander zuordnen:

$$\begin{array}{cccccc} [\mathrm{I}\,\Omega] & [\mathrm{J}\,\Omega] & [\mathrm{K}\,\Omega] & [\mathrm{J}\,\mathrm{K}] & [\mathrm{K}\,\mathrm{I}] & [\mathrm{I}\,\mathrm{J}] \\ [\mathrm{j}\,\mathrm{k}] & [\mathrm{k}\,\mathrm{i}] & [\mathrm{i}\,\mathrm{j}] & [0\,\mathrm{i}] & [0\,\mathrm{j}] & [0\,\mathrm{k}]. \end{array} \tag{15}$$

In der zweiten Zeile haben wir die Einheiten $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ der Liniengröße wieder durch die Ureinheiten ausgedrückt.

Der geometrische Zusammenhang zwischen den beiden so in Beziehung gesetzten Größen ist, wenn wir uns die Liniengröße als das Produkt der beiden Punkte S, S′ gegeben denken und so dem Produkte der beiden Ebenengrößen Π, Π' gegenüberstellen, der folgende. Die Verbindungslinie der Punkte S und S' fällt mit der Schnittlinie der Ebenen von Π und Π' zusammen, der Richtungssinn, der von S nach S' weist, ist gleichstimmig mit dem Drehungssinn, in dem die Ebene von Π in die Ebene von Π' übergeht, und der Abstand s der Punkte S, S' ist durch die Gleichung (14) bestimmt.

Diese Gleichung wird besonders einfach, wenn wir statt der Ebenengrößen Π, Π' einfache Ebenen $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}'$ nehmen, d. h. δ und $\delta' = 1$ setzen. Dann wird:

$$s = \sin \sigma. \tag{16}$$

Das äußere Produkt zweier Ebenen $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}'$ ist ebenso an die Schnittlinie dieser beiden Ebenen geknüpft wie das äußere Produkt zweier Punkte S, S′ an die Verbindungslinie dieser Punkte. Aber während der Sinn dieses letzteren Produktes durch den Sinn der Translation gegeben ist, die den ersten Punkt S in den zweiten S' überführt, ist der Sinn des Ebenenproduktes durch den Sinn der Rotation bestimmt, welche die erste Ebene $\boldsymbol{\pi}$ in die zweite $\boldsymbol{\pi}'$ überführt. Wir wollen deswegen beide Größen als Liniengrößen bezeichnen, aber die Ebenenprodukte als rotatorische Liniengrößen von den Punkteprodukten als translatorischen Liniengrößen unterscheiden.[1]) Es ist eine genau analoge Unterscheidung wie wir sie bereits zwischen Flächenvektoren und Linienvektoren getroffen haben.

1) Study bezeichnet in seiner Geometrie der Dynamen die ersteren als Keile, die letzteren als Stäbe. Doch ist der Keil mit unseren rotatorischen Liniengrößen nicht identisch.

Wohl zu beachten ist, daß auch an den einfachen Ebenen eine obere und eine untere Seite zu unterscheiden und die Rotation so zu nehmen ist, daß sie nicht bloß die Ebenen zur Deckung bringt, sondern auch die obere Seite der einen mit der oberen Seite der anderen zusammenfallen läßt. Die obere Seite der Ebenen ist hierbei die dem Punkte O abgewandte Seite.

Wenn die Ebenen zueinander senkrecht sind, wird $s = 1$. Die rotatorische Liniengröße reduziert sich dann auf eine einfache Achse, nämlich eine gerade Linie verbunden mit einem bestimmten Rotationssinn. Wenn die Ebenen zusammenfallen und nur dann wird

$$[\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{\pi}'] = 0.$$

Jeder rotatorischen Liniengröße ist eine bestimmte translatorische Liniengröße zugeordnet, welche dieselben Koordinaten hat. Geometrisch ist dieses Entsprechen dadurch gegeben, daß beide Liniengrößen sich auf dieselbe Linie beziehen, der Translationssinn der letzteren mit dem Rotationssinn der ersteren gleichstimmig ist und die Länge der translatorischen Liniengröße gleich ist dem Sinus des Winkels der rotatorischen Liniengröße.[1]) Wie jene durch ein Punktepaar, läßt diese sich durch ein Ebenenpaar darstellen, und wie jene sich nicht ändert, wenn man die sie darstellenden Punkte mit Beibehaltung ihres Abstandes längs ihrer Verbindungslinie verschiebt, bleibt diese ungeändert, wenn man die sie darstellenden Ebenen mit Beibehaltung ihres Winkels um ihre Schnittlinie dreht. Wir wollen den Unterschied beider Größenarten dadurch schärfer zum Ausdruck bringen, daß wir durchgängig zur Bezeichnung ihrer Koordinaten verschiedene Buchstaben verwenden. Der Einfachheit wegen wollen wir aber auch für die Einheiten der rotatorischen Liniengröße kürzere Bezeichnungen wählen und setzen:

$$\begin{aligned} &[\mathrm{I}\,\Omega] = |\mathfrak{i}, \quad [\mathrm{J}\,\Omega] = |\mathfrak{j}, \quad [\mathrm{K}\,\Omega] = |\mathfrak{k}, \\ &[\mathrm{J}\,\mathrm{K}] = |\boldsymbol{\mathfrak{i}}, \quad [\mathrm{K}\,\mathrm{I}] = |\boldsymbol{\mathfrak{j}}, \quad [\mathrm{I}\,\mathrm{J}] = |\boldsymbol{\mathfrak{k}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Der Ausdruck für die rotatorische Liniengröße soll dann der folgende sein:

$$\boldsymbol{\mathfrak{a}} = \mathrm{u}\,|\mathfrak{i} + \mathrm{v}\,|\mathfrak{j} + \mathrm{w}\,|\mathfrak{k} + \mathrm{p}\,|\boldsymbol{\mathfrak{i}} + \mathrm{q}\,|\boldsymbol{\mathfrak{j}} + \mathrm{r}\,|\boldsymbol{\mathfrak{k}}, \tag{18}$$

während die translatorische Liniengröße durch einen Ausdruck:

$$\mathfrak{a} = \mathrm{L}\,\mathfrak{i} + \mathrm{M}\,\mathfrak{j} + \mathrm{N}\,\mathfrak{k} + \mathrm{X}\,\boldsymbol{\mathfrak{i}} + \mathrm{Y}\,\boldsymbol{\mathfrak{j}} + \mathrm{Z}\,\boldsymbol{\mathfrak{k}} \tag{18a}$$

gegeben wird. Die Koordinaten der beiden Größenarten entsprechen einander nach dem folgenden Schema:

---

1) Study nimmt als „Öffnung“ des Keiles den Tangens des von den beiden Ebenen gebildeten Winkels. Darin liegt ein wesentlicher Unterschied zwischen den Studyschen Keilen und den aus der Graßmannschen Theorie folgenden rotatorischen Liniengrößen.

$$(19) \qquad \begin{cases} \mathrm{u} & \mathrm{v} & \mathrm{w} & \mathrm{p} & \mathrm{q} & \mathrm{r} \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{cases}$$

und zwei Liniengrößen sind einander zugeordnet, wenn von ihnen die in diesem Schema untereinander stehenden Koordinaten gleich sind. Wie die Länge s der translatorischen Liniengröße durch den Ausdruck $\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}$, so ist der Winkel σ der rotatorischen Liniengröße durch die Gleichung:

$$\sin \sigma = \sqrt{\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2}$$

bestimmt.

Denkt man sich die beiden Arten von Liniengrößen rein analytisch durch ihre Koordinaten gegeben, so kann man nach F. Kleins Vorgange[1]) ihren Charakter daran erkennen, wie sie sich bei einer Raumtransformation verhalten. Von solchen Raumtransformationen betrachten wir hier nur drei besonders einfache Arten, nämlich erstens eine Parallelverschiebung, zweitens eine Drehung um den Koordinatenursprung und endlich drittens eine Inversion oder Spiegelung am Koordinatenursprung, bei welcher alle Punktkoordinaten ihr Vorzeichen wechseln.

Beginnen wir mit der Parallelverschiebung. Eine solche vermehrt oder vermindert die Punktkoordinaten um einen konstanten Betrag, ist also in der Form darstellbar:

$$\text{(a)} \qquad x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c.$$

Sind nun ξ, η, ζ, θ die Koordinaten einer Ebenengröße Π, so muß das Produkt dieser Ebenengröße mit einem beliebigen Punkte bei der Transformation ungeändert bleiben, da sich das äußere Produkt von vier Punkten oder das Volumen des durch diese Punkte bestimmten Tetraeders bei der Parallelverschiebung nicht ändern kann. Die transformierten Koordinaten ξ', η', ζ', θ' der Ebenengröße sind also dadurch bestimmt, daß identisch:

$$\xi' x' + \eta' y' + \zeta' z' - \theta' = \xi x + \eta y + \zeta z - \theta$$

werden muß und daraus ergibt sich mit Rücksicht auf die vorstehenden Werte von x', y', z':

$$\text{(b)} \qquad \xi' = \xi, \quad \eta' = \eta, \quad \zeta' = \zeta, \quad \theta' = \theta - \xi a - \eta b - \zeta c.$$

Bilden wir nun gemäß den Gleichungen (7) des 4. Kapitels die Koordinaten einer translatorischen Liniengröße vor und nach der Parallelverschiebung, so erhält man die folgenden Gleichungen, welche

1) Man vergleiche insbesondere die an das Erlanger Programm von 1872 (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, abgedruckt in Bd. 43 der Mathem. Annalen) wieder anknüpfende Arbeit Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball, Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 47 (1902) und Math. Ann. Bd. 62 (1906).

die transformierten Koordinaten X′, Y′ ... durch die ursprünglichen ausdrücken:

$$\text{(c)}\qquad \begin{array}{ll} \mathrm{X}' = \mathrm{X}, & \mathrm{L}' = \mathrm{L} + c\,\mathrm{Y} - b\,\mathrm{Z}, \\ \mathrm{Y}' = \mathrm{Y}, & \mathrm{M}' = \mathrm{M} + a\,\mathrm{Z} - c\,\mathrm{X}, \\ \mathrm{Z}' = \mathrm{Z}, & \mathrm{N}' = \mathrm{N} + b\,\mathrm{X} - a\,\mathrm{Y}. \end{array}$$

Drücken wir anderseits nach (3) und (18) die transformierten Koordinaten u′, v′ ... einer rotatorischen Liniengröße mit Hilfe der Transformationsgleichungen (b) durch die ursprünglichen Koordinaten u, v ... aus, so ergibt sich:

$$\text{(d)}\qquad \begin{array}{ll} \mathrm{p}' = \mathrm{p}, & \mathrm{u}' = \mathrm{u} + c\,\mathrm{q} - b\,\mathrm{r}, \\ \mathrm{q}' = \mathrm{q}, & \mathrm{v}' = \mathrm{v} + a\,\mathrm{r} - c\,\mathrm{p}, \\ \mathrm{r}' = \mathrm{r}, & \mathrm{w}' = \mathrm{w} + b\,\mathrm{p} - a\,\mathrm{q}. \end{array}$$

Bei einer Parallelverschiebung zeigen also die translatorischen und rotatorischen Liniengrößen dasselbe Verhalten.

Das gleiche ergibt sich für eine Drehung um den Koordinatenursprung. Der Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Punktkoordinaten x, y, z und den transformierten x', y', z' ist dann der folgende:

$$\text{(a}'\text{)}\qquad \left\{\begin{array}{ll} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, & x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, & y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, & z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{array}\right.$$

Hierbei sind die α, β, γ die Richtungscosinus dreier zueinander normaler Richtungen, so daß die identische Gleichung:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

erfüllt wird. Aus den Gleichungen (a′) leitet man vermöge der auch hier geltenden Identität:

$$\xi' x' + \eta' y' + \zeta' z' - \theta' = \xi x + \eta y + \zeta z - \theta$$

die folgende Darstellung für die zugehörige Transformation der Ebenengrößen her:

$$\text{(b}'\text{)}\qquad \left\{\begin{array}{ll} \xi' = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta, & \xi = \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta' + \alpha_3 \zeta', \\ \eta' = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta, & \eta = \beta_1 \xi' + \beta_2 \eta' + \beta_3 \zeta', \\ \zeta' = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta, & \zeta = \gamma_1 \xi' + \gamma_2 \eta' + \gamma_3 \zeta', \\ & \theta' = \theta. \end{array}\right.$$

Punktgrößen und Ebenengrößen transformieren sich also hier in der gleichen Weise. Daraus ergibt sich sofort, daß auch translatorische und rotatorische Liniengrößen sich in der gleichen Weise transformieren, und zwar ist für die ersteren folgendes die Darstellung der Transformation:

$$\text{(c}'\text{)}\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{X}' = \alpha_1 \mathrm{X} + \beta_1 \mathrm{Y} + \gamma_1 \mathrm{Z}, & \mathrm{L}' = \alpha_1 \mathrm{L} + \beta_1 \mathrm{M} + \gamma_1 \mathrm{N}, \\ \mathrm{Y}' = \alpha_2 \mathrm{X} + \beta_2 \mathrm{Y} + \gamma_2 \mathrm{Z}, & \mathrm{M}' = \alpha_2 \mathrm{L} + \beta_2 \mathrm{M} + \gamma_2 \mathrm{N}, \\ \mathrm{Z}' = \alpha_3 \mathrm{X} + \beta_3 \mathrm{Y} + \gamma_3 \mathrm{Z}, & \mathrm{N}' = \alpha_3 \mathrm{L} + \beta_3 \mathrm{M} + \gamma_3 \mathrm{N}. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen genügen den Identitäten:

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$
$$L'^2 + M'^2 + N'^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$
$$X' L' + Y' M' + Z' N' = X L + Y M + Z N.$$

Betrachten wir nun aber die Inversion, bei der alle Punktkoordinaten das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, so zeigen die Gleichungen (17) des vorigen Kapitels, daß von den Koordinaten der Ebenengrößen nur die letzte, θ, ihr Vorzeichen wechselt, während die übrigen ungeändert bleiben. Gemäß der Formel (3) ändern deshalb von den Koordinaten der rotatorischen Liniengröße u, v, w ihr Vorzeichen, während p, q, r ungeändert bleiben. Dagegen wechseln von den Koordinaten der translatorischen Liniengröße gemäß den Formeln (7) des vorigen Kapitels X, Y, Z ihr Vorzeichen, während L, M, N keine Änderung erfahren. Es verhalten sich also die beiden Arten von Liniengrößen bei Inversion verschieden, und die angegebene eindeutige Zuordnung der beiden Größenarten wird durch Inversion zerstört. Sie wird erst dann wieder hergestellt, wenn man von allen Koordinaten einer der beiden einander zugeordneten Liniengrößen die Vorzeichen umkehrt.

Indem wir nun an den Ausgangspunkt dieses Kapitels zurückkehren, wollen wir noch den dort übergangenen Fall erledigen, daß die Ebenen der beiden Ebenengrößen, deren Produkt zu bilden ist, parallel sind. Dann muß in den Gleichungen dieser Ebenen:

$$\begin{aligned} &\xi x + \eta y + \zeta z - \theta = 0, \\ &\xi' x + \eta' y + \zeta' z - \theta' = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

zwischen den Koeffizienten die Proportion:

$$\xi : \xi' = \eta : \eta' = \zeta : \zeta' \tag{21a}$$

bestehen. Daraus folgt aber, daß von den Koeffizienten der Einheitsprodukte in dem Ausdrucke (3) die drei letzten verschwinden. Wir wollen nun statt der beiden Ebenengrößen Π, Π' wieder einfache Ebenen $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}'$ nehmen, also die Zahlfaktoren δ, δ', mit denen sie sonst behaftet sind, $= 1$ voraussetzen. Dann können wir gemäß den Gleichungen (19) und (19a) des vorigen Kapitels hier setzen:

$$\xi = \xi' = \cos\lambda, \quad \eta = \eta' = \cos\mu, \quad \zeta = \zeta' = \cos\nu, \quad \theta = p, \quad \theta = p', \tag{21b}$$

und wir wollen ferner:

$$p' - p = d \tag{22}$$

machen. Dieses d ist der Abstand der beiden parallelen Ebenen, negativ gerechnet, wenn die zweite Ebene auf derselben Seite der ersten Ebene wie der Koordinatenursprung liegt, positiv im entgegengesetzten Falle. Setzen wir nun die Werte, die aus (21b) und (22) hervorgehen, in den Ausdruck (3) ein und gebrauchen die kürzeren Bezeichnungen (17) für die auftretenden Einheiten, so finden wir jetzt:

$$(23)\qquad [\pi\pi'] = d\cos\lambda\,|\,\mathfrak{i} + d\cos\mu\,|\,\mathfrak{j} + d\cos\nu\,|\,\mathfrak{k}.$$

Nehmen wir auf einer gemeinsamen Normalen beider Ebenen das Stück, das zwischen die beiden Ebenen fällt, mit dem Richtungssinne, der von der ersten Ebene zur zweiten zeigt, und fassen es als einen Linienvektor $\mathfrak{d}$ auf, so wird dieser Vektor:

$$\mathfrak{d} = d\cos\lambda\,\mathbf{i} + d\cos\mu\,\mathbf{j} + d\cos\nu\,\mathbf{k}.$$

Er ist von dem gefundenen Ebenenprodukte also nur in der Bezeichnung der Einheiten verschieden. Wir können diesen Vektor geometrisch mit den beiden Ebenen in Zusammenhang bringen, indem wir ihn als die Repräsentation einer Translation oder Parallelverschiebung deuten, welche auf dem kürzesten Wege die erste Ebene in die zweite überführt. Wir wollen deswegen die durch die Gleichung (23) definierte Größe einen Translationsvektor nennen.

Als dualistisch entsprechendes Gebilde würde ihr ein Rotationsvektor gegenüberstehen, der sich in der folgenden Form:

$$(24)\qquad \varrho = \mathrm{L}\,\mathfrak{i} + \mathrm{M}\,\mathfrak{j} + \mathrm{N}\,\mathfrak{k}$$

darstellt. Dieser Vektor ist aber von dem Flächenvektor nicht verschieden, auf den wir bereits im zweiten Kapitel gekommen sind.

Wir wollen nun von drei Ebenengrößen:

$$(25)\qquad \begin{cases} \Pi_1 = \xi_1\,\mathbf{I} + \eta_1\,\mathbf{J} + \zeta_1\,\mathbf{K} + \theta_1\,\Omega, \\ \Pi_2 = \xi_2\,\mathbf{I} + \eta_2\,\mathbf{J} + \zeta_2\,\mathbf{K} + \theta_2\,\Omega, \\ \Pi_3 = \xi_3\,\mathbf{I} + \eta_3\,\mathbf{J} + \zeta_3\,\mathbf{K} + \theta_3\,\Omega, \end{cases}$$

deren Ebenen sich nicht in parallelen Linien durchschneiden oder parallel sein mögen, das äußere Produkt bilden. Wir finden für dasselbe einen genau analogen Ausdruck wie für das Produkt dreier Punktgrößen, nämlich:

$$(26)\qquad [\Pi_1\Pi_2\Pi_3] = \mathfrak{x}_1[\mathbf{J}\mathbf{K}\Omega] + \mathfrak{x}_2[\mathbf{K}\mathbf{I}\Omega] + \mathfrak{x}_3[\mathbf{I}\mathbf{J}\Omega] + \mathfrak{x}_0[\mathbf{I}\mathbf{J}\mathbf{K}].$$

Die Koeffizienten in diesem Ausdrucke haben die Werte:

$$(27)\qquad \mathfrak{x}_1 = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 & \theta_1 \\ \eta_2 & \zeta_2 & \theta_2 \\ \eta_3 & \zeta_3 & \theta_3 \end{vmatrix},\quad \mathfrak{x}_2 = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 & \theta_1 \\ \zeta_2 & \xi_2 & \theta_2 \\ \zeta_3 & \xi_3 & \theta_3 \end{vmatrix},\quad \mathfrak{x}_3 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \theta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \theta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \theta_3 \end{vmatrix},\quad \mathfrak{x}_0 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}.$$

Die Ebenen der drei Ebenengrößen haben aber die Gleichungen:

$$(28)\qquad \begin{cases} \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z - \theta_1 = 0, \\ \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z - \theta_2 = 0, \\ \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z - \theta_3 = 0, \end{cases}$$

und für die Koordinaten des Schnittpunktes dieser drei Ebenen ergeben sich die Werte:

$$(29) \qquad x = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_0}, \quad y = \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_0}, \quad z = \frac{\mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_0}.$$

Geben wir diesem Schnittpunkte den Zahlfaktor $\mathfrak{x}_0$, so wird die so gewonnene Punktgröße $\mathfrak{P}$ durch den Ausdruck dargestellt:

$$(30) \qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{x}_0\,\mathbf{0} + \mathfrak{x}_1\,\mathbf{i} + \mathfrak{x}_2\,\mathbf{j} + \mathfrak{x}_3\,\mathbf{k},$$

und dieser Ausdruck ist von dem Ausdrucke (26) für das Produkt $[\Pi_1\Pi_2\Pi_3]$ der drei Ebenengrößen nur durch die Bezeichnung der Einheiten verschieden.

Um diese Übereinstimmung möglichst zur Geltung zu bringen, setzen wir zunächst:

$$[\mathbf{I}\,\mathbf{J}\,\mathbf{K}] = \mathfrak{e}\,\mathbf{0}.$$

Nun ist nach Formel (30) des vorigen Kapitels:

$$[\mathbf{I}\,\mathbf{i}] = [\mathbf{J}\,\mathbf{j}] = [\mathbf{K}\,\mathbf{k}] = -[\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{0}] = \varepsilon,$$

demnach wird weiter:

$$(31\text{a}) \qquad [\mathbf{I}\,\mathbf{J}\,\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Omega}] = \mathfrak{e}\,[\mathbf{0}\boldsymbol{\Omega}] = \mathfrak{e}\,\varepsilon,$$

da also z. B. $[\mathbf{I}(\mathfrak{e}\,\mathbf{i})] = \mathfrak{e}\,[\mathbf{I}\,\mathbf{i}] = \mathfrak{e}\,\varepsilon = [\mathbf{I}\,\mathbf{J}\,\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Omega}]$ wird, können wir auch:

$$(31\text{b}) \qquad [\mathbf{J}\,\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Omega}] = \mathfrak{e}\,\mathbf{i}, \quad [\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega}] = \mathfrak{e}\,\mathbf{j}, \quad [\mathbf{I}\,\mathbf{J}\,\boldsymbol{\Omega}] = \mathfrak{e}\,\mathbf{k}$$

setzen, und haben somit:

$$(32) \qquad [\Pi_1\Pi_2\Pi_3] = \mathfrak{e}\,\mathfrak{P}.$$

Weil $\varepsilon = [\mathbf{0}\,\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}]$, können wir zur Definition von $\mathfrak{e}$ die Gleichung benützen:

$$(31\text{c}) \qquad [\mathbf{I}\,\mathbf{J}\,\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Omega}] = \mathfrak{e}\,[\mathbf{0}\,\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}]$$

und wollen uns erlauben, zu schreiben:

$$(31\text{d}) \qquad \mathfrak{e} = \frac{[\mathbf{I}\,\mathbf{J}\,\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Omega}]}{[\mathbf{0}\,\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}]}.$$

Um nun noch den Zahlfaktor $\mathfrak{x}_0$ der Punktgröße $\mathfrak{P}$ geometrisch festzulegen, denken wir uns die Zahlwerte δ_1, δ_2, δ_3 der drei Ebenengrößen Π_1, Π_2, Π_3 durch drei Seitenflächen eines Tetraeders dargestellt. Drei Kanten dieses Tetraeders müssen in die Schnittlinien der Ebenen der drei Ebenengrößen fallen, ihre Längen seien r_1, r_2, r_3. Das Tetraeder kann man sich so gewählt denken, daß der mit den drei Ebenengrößen verbundene Umlaufssinn eine positive Umkreisung des nach dem Innern des Tetraeders gehenden Lotes auf der betreffenden Seitenfläche des Tetraeders bedeutet. Das sechsfache Volumen des Tetraeders sei Θ. Tragen wir auf den Schnittlinien der drei Ebenen von ihrem Schnittpunkte aus Strecken gleich der Längeneinheit ab, so heißt das sechsfache Volumen des Tetraeders, das diese drei Strecken als drei Kanten bestimmen, der körperliche Sinus, sin Φ, der von den drei Ebenen gebildeten räumlichen Ecke Φ, und es wird dann das sechsfache Tetraedervolumen:

$$(33) \qquad \Theta = r_1 r_2 r_3 \sin \Phi.$$

Nennen wir die Winkel, welche die drei Ebenen miteinander bilden, σ_1, σ_2, σ_3, so wird gemäß der oben gefundenen Formel (12a) z. B.

$$\Theta r_1 = \delta_2 \delta_3 \sin\sigma = \sqrt{(\eta_2 \zeta_3 - \zeta_2 \eta_3)^2 + (\zeta_2 \xi_3 - \xi_2 \zeta_3)^2 + (\xi_2 \eta_3 - \eta_2 \xi_3)^2}.$$

In der Tat ist diese Quadratwurzel, durch

$$\delta_2 \delta_3 = \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2} \cdot \sqrt{\xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2}$$

geteilt, gleich dem Sinus des Winkels σ zwischen den Ebenen, deren Normalen die Richtungscosinus haben:

$$\frac{\xi_2}{\delta_2},\ \frac{\eta_2}{\delta_2},\ \frac{\zeta_2}{\delta_2} \quad \text{und} \quad \frac{\xi_3}{\delta_3},\ \frac{\eta_3}{\delta_3},\ \frac{\zeta_3}{\delta_3}.$$

Daraus folgt, daß, wenn wir in der Schnittlinie der zweiten und dritten Ebene einen Vektor annehmen, dessen Länge $= \Theta r_1$ ist, die Komponenten dieses Vektors werden:

$$\eta_2 \zeta_3 - \zeta_2 \eta_3, \quad \zeta_2 \xi_3 - \xi_2 \zeta_3, \quad \xi_2 \eta_3 - \eta_2 \xi_3.$$

Denn diese Größen gehen in die Richtungscosinus der Schnittlinie über, wenn man sie durch die obenstehende Quadratwurzel, also durch Θr_1 dividiert.

Denken wir uns ebenso auf den anderen beiden Schnittlinien vom Schnittpunkte aus Vektoren aufgetragen, deren Längen Θr_2 und Θr_3 sind, so wird das sechsfache Volumen Θ' des Tetraeders, das diese drei Vektoren bestimmen:

$$\Theta' = \begin{vmatrix} \eta_2 \zeta_3 - \zeta_2 \eta_3, & \zeta_2 \xi_3 - \xi_2 \zeta_3, & \xi_2 \eta_3 - \eta_2 \xi_3 \\ \eta_3 \zeta_1 - \zeta_3 \eta_1, & \zeta_3 \xi_1 - \xi_3 \zeta_1, & \xi_3 \eta_1 - \eta_3 \xi_1 \\ \eta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \eta_2, & \zeta_1 \xi_2 - \xi_1 \zeta_2, & \xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}^2 = \mathfrak{x}_0^2.$$

Anderseits aber wird:

$$\Theta' = \Theta r_1 \cdot \Theta r_2 \cdot \Theta r_3 \cdot \sin \Phi = \Theta^4.$$

Also erhalten wir:

$$\mathfrak{x}_0 = \pm \Theta^2. \tag{34}$$

Wenn man demnach die Dreiecksflächen, welche die drei Ebenengrößen darstellen, zu einem Tetraeder zusammenschließt, so ist das Quadrat von dem sechsfachen Volumen dieses Tetraeders dem Schnittpunkte der Ebenen der drei Ebenengrößen als Zahlfaktor beizufügen, damit die so gewonnene Punktgröße das Produkt der drei Ebenengrößen darstelle. Hierzu gehört noch eine Bestimmung über das Vorzeichen dieses Zahlfaktors. Dieselbe kann man so geben, daß man durch die Reihenfolge der Dreiecksflächen an der körperlichen Ecke, die sie umschließen, eine Umkreisung des Inneren dieser körperlichen Ecke festlegt, und je nachdem die Umkreisung im positiven oder negativen Sinne erfolgt, wird das Vorzeichen des Zahlfaktors positiv oder negativ. Dies ist leicht zu verifizieren, indem man die drei

Seitenflächen des Tetraeders in die positiven Quadranten des Koordinatensystems fallen läßt, so daß der zugehörige Umlaufssinn positiv für die positiven Koordinatenrichtungen wird. Dann wird, indem a, b, c Abschnitte auf den Koordinatenachsen bedeuten, einfach:

$$\Pi_1 = bc\,\mathbf{I}, \quad \Pi_2 = ca\,\mathbf{J}, \quad \Pi_3 = ab\,\mathrm{K}$$

und das Produkt

$$[\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3] = a^2 b^2 c^2\, \mathbf{O}\, \mathfrak{e} = \mathfrak{x}_0\, \mathbf{O}\, \mathfrak{e}$$

für $\mathfrak{x}_0 = a^2 b^2 c^2$, so daß $\mathfrak{x}_0$ hier in der Tat positiv wird, wenn die Seitenflächen im Sinne eines positiven Umlaufs um das Tetraederinnere genommen werden.

Den ausgeschlossenen Fall, daß die Schnittlinien der Ebenen der drei Ebenengrößen oder zwei der Ebenen selbst parallel sind, können wir kurz abmachen. Es wird dann $\mathfrak{x}_0 = 0$ und wir erhalten für das Produkt der drei Ebenengrößen $\mathfrak{p}\,\mathfrak{e}$, wo:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{x}_1\, \mathbf{i} + \mathfrak{x}_2\, \mathbf{j} + \mathfrak{x}_3\, \mathbf{k}, \tag{35}$$

also ein Vektor ist. Die Richtung desselben stimmt mit der Richtung der parallelen Schnittlinien überein.

Wenn die Ebenen der drei Ebenengrößen sich in derselben geraden Linie durchschneiden, so muß von den Ebenengleichungen (28) eine durch lineare Kombination aus den anderen beiden hervorgehen, es müssen also Beziehungen von folgender Form bestehen:

$$\xi_3 = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \quad \eta_3 = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2, \quad \zeta_3 = \lambda_1 \zeta_1 + \lambda_2 \zeta_2, \quad \theta_3 = \lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2,$$

aus denen:

$$\Pi_3 = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2 \tag{36}$$

folgt. Es verschwinden dann die Determinanten in den Formeln (27) und somit wird das äußere Produkt:

$$[\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3] = 0. \tag{37}$$

Geht man wieder von den Ebenengrößen Π_1, Π_2, Π_3 zu den einfachen Ebenen, $\boldsymbol{\pi}_1$, $\boldsymbol{\pi}_2$, $\boldsymbol{\pi}_3$, über, so kann man sonach:

$$[\boldsymbol{\pi}_1\ \boldsymbol{\pi}_2\ \boldsymbol{\pi}_3] = 0 \tag{37a}$$

als die Bedingung dafür ansehen, daß drei Ebenen einem Büschel angehören, d. h. sich in derselben geraden Linie durchschneiden oder alle drei einander parallel sind Im letzteren Falle wird

$$\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = \xi_2 : \eta_2 : \zeta_2 = \xi_3 : \eta_3 : \zeta_3,$$

dann verschwinden in der Tat nach (27) $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{x}_0$ und damit das Produkt der drei Ebenen.

Das Produkt dreier Ebenengrößen ist dasselbe wie das Produkt einer Ebenengröße mit einer rotatorischen Liniengröße. Sei die erstere:

$$\Pi = \xi\, \mathbf{I} + \eta\, \mathbf{J} + \zeta\, \mathrm{K} + \theta\, \Omega$$

und die letztere:

$$\mathfrak{p} = \mathrm{u}[\mathrm{I}\,\Omega] + \mathrm{v}[\mathrm{J}\,\Omega] + \mathrm{w}[\mathrm{K}\,\Omega] + \mathrm{p}[\mathrm{J}\,\mathrm{K}] + \mathrm{q}[\mathrm{K}\,\mathrm{I}] + \mathrm{r}[\mathrm{I}\,\mathrm{J}],$$

so wird das Produkt beider:

$$[\Pi \times \mathfrak{p}] = (\mathfrak{x}_0\,\mathrm{O} + \mathfrak{x}_1\,\mathrm{i} + \mathfrak{x}_2\,\mathrm{j} + \mathfrak{x}_3\,\mathrm{k})\,\mathfrak{e}, \tag{38}$$

wenn wir setzen:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_0 = \mathrm{p}\,\xi + \mathrm{q}\,\eta + \mathrm{r}\,\zeta, \\ \mathfrak{x}_1 = \mathrm{p}\,\theta - \mathrm{v}\,\zeta + \mathrm{w}\,\eta, \\ \mathfrak{x}_2 = \mathrm{q}\,\theta - \mathrm{w}\,\xi + \mathrm{u}\,\zeta, \\ \mathfrak{x}_3 = \mathrm{r}\,\theta - \mathrm{u}\,\eta + \mathrm{v}\,\xi. \end{cases} \tag{39}$$

Es sind dann:

$$x = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_0}, \quad y = \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_0}, \quad z = \frac{\mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_0} \tag{40}$$

die Koordinaten des Punktes, in dem die Ebene der Ebenengröße von der Linie der Liniengröße geschnitten wird. Jene Ebene ist dieser Linie parallel, wenn $\mathfrak{x}_0 = 0$ wird.

Das Produkt einer Ebenengröße mit einer Punktgröße ist schon im vorigen Kapitel in Betracht gezogen worden. Wenn:

$$\Pi = \xi\,\mathrm{I} + \eta\,\mathrm{J} + \zeta\,\mathrm{K} + \theta\,\Omega$$

die Ebenengröße und:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{x}_0\,\mathrm{O} + \mathfrak{x}_1\,\mathrm{i} + \mathfrak{x}_2\,\mathrm{j} + \mathfrak{x}_3\,\mathrm{k}$$

die Punktgröße ist, so wird das Produkt:

$$[\Pi\,\mathfrak{P}] = (\xi\,\mathfrak{x}_1 + \eta\,\mathfrak{x}_2 + \zeta\,\mathfrak{x}_3 - \theta\,\mathfrak{x}_0)\,\varepsilon. \tag{41}$$

Dieses Produkt läßt sich schreiben:

$$[\Pi\,\mathfrak{P}] = \mathfrak{x}_0 \cdot \delta \cdot q \cdot \varepsilon,$$

wenn δ der Zahlfaktor der Ebenengröße und q der Abstand des Punktes von der Ebene der Ebenengröße ist.

Wenn wir uns nun die Aufgabe stellen, das äußere Produkt von vier Ebenengrößen:

$$[\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3\,\Pi_4]$$

zu bilden, so vereinigen wir zunächst die drei ersten in der angegebenen Weise, wobei sich i. a. ergibt:

$$[\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3] = \mathfrak{e}\,\mathfrak{P},$$

und multiplizieren die so resultierende Größe mit Π_4. Es möge δ_4 der Zahlfaktor der letzteren Ebenengröße und q_4 der Abstand des Ortes der Punktgröße $\mathfrak{P}$ von der Ebene dieser Ebenengröße sein. Der Zahlfaktor $\mathfrak{x}_0$ von $\mathfrak{P}$ ist durch die Zahlfaktoren δ_1, δ_2, δ_3 der Ebenengrößen Π_1, Π_2, Π_3 und eine Größe Φ_{123}, die nur von der Lage der Ebenen von Π_1, Π_2, Π_3 abhängt, bestimmbar wie folgt:

$$\mathfrak{x}_0 = \delta_1\,\delta_2\,\delta_3\,\Phi_{123},$$

und danach wird das äußere Produkt der vier Ebenengrößen:

$$[\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4] = [\mathfrak{P}\, \Pi_4] = (\mathfrak{x}_0\, \delta_4\, q_4)\, \mathfrak{e}\, \varepsilon = (\delta_1\, \delta_2\, \delta_3\, \delta_4\, q_4\, \Phi_{123})\, \eta,$$

wenn $\mathfrak{e}\,\varepsilon = [\mathrm{I\, J\, K}\, \Omega] = \eta$ gesetzt wird. Führen wir nun von dem Tetraeder, das die Ebenen der vier Ebenengrößen bilden, das sechsfache Volumen T und die doppelten Inhalte der vier Seitenflächen $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, $\varDelta_4$ ein, so wird:

$$\mathsf{T} = \varDelta_4 \cdot q_4, \quad \mathsf{T}^2 = \varDelta_1\, \varDelta_2\, \varDelta_3\, \Phi_{123}$$

und somit, wenn $[\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4] = \mathsf{M}\, \eta$ angenommen wird:

$$\mathsf{M} = \pm \frac{\delta_1\, \delta_2\, \delta_3\, \delta_4}{\varDelta_1\, \varDelta_2\, \varDelta_3\, \varDelta_4} \cdot \mathsf{T}^3. \tag{42}$$

Daraus ist sofort zu sehen, daß $\mathsf{M} = 0$ wird, wenn $\mathsf{T} = 0$ ist, d. h. die Ebenen der vier Ebenengrößen durch einen Punkt hindurchgehen. Gehen wir somit von den Ebenengrößen Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 zu einfachen Ebenen $\boldsymbol{\pi}_1$, $\boldsymbol{\pi}_2$, $\boldsymbol{\pi}_3$, $\boldsymbol{\pi}_4$ über, so ergibt sich, daß:

$$[\boldsymbol{\pi}_1\, \boldsymbol{\pi}_2\, \boldsymbol{\pi}_3\, \boldsymbol{\pi}_4] = 0$$

wird, wenn die vier Ebenen durch einen Punkt gehen.

Die Vorzeichenregel läßt sich hier vielleicht am einfachsten wie folgt geben: Man läßt die Umkreisung der Seitenflächen des von den Ebenen der vier Ebenengrößen gebildeten Tetraeders in positivem Sinne um die nach dem Inneren des Tetraeders gehenden Normalen geschehen. Dann sieht man nach, bei wie vielen der Seitenflächen der wirkliche mit den Ebenengrößen verknüpfte Umlaufssinn mit dem angenommenen übereinstimmt. Ist dies einmal oder dreimal der Fall, so ist das Produkt vom entgegengesetzten Vorzeichen wie das Produkt der in der gleichen Reihenfolge genommenen gegenüberliegenden Ecken des Tetraeders, und sonst vom gleichen Vorzeichen. Für den Beweis beachte man, daß sich das Vorzeichen des Produktes jedesmal umkehrt, wenn man den Umlaufssinn einer der Ebenengrößen umkehrt. Es braucht also nur der Fall berücksichtigt zu werden, wo man den Umlaufssinn alle vier Male positiv um die nach dem Inneren des Tetraeders gehende Normale annimmt, die übrigen Fälle folgen daraus sofort. Wir nehmen nun für die Ebenengrößen die Seitenflächen des Tetraeders selbst und lassen außerdem drei von diesen in die Koordinatenebenen fallen, so daß die vierte Seitenfläche die posi-

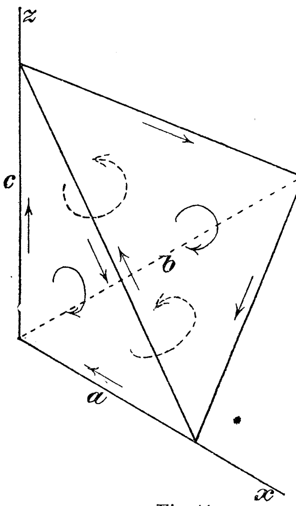

Fig. 11.

tiven Koordinatenachsen in den Abständen a, b, c vom Ursprunge trifft. Die Koordinaten der vier Ebenengrößen sind dann:

$$\begin{array}{cccc} bc, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & ca, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & ab, & 0, \\ -bc, & -ca, & -ab, & -abc, \end{array}$$

und ihr Produkt wird somit $\mathsf{M}\,\eta = -a^3 b^3 c^3 \eta = -\mathsf{T}^3 \eta$, während das Produkt der in der gleichen Reihenfolge genommenen gegenüberliegenden Ecken des Tetraeders $-a \cdot b \cdot c \cdot 1 \cdot \varepsilon = -\mathsf{T}\varepsilon$ wird, woraus hier die Richtigkeit der gegebenen Regel folgt.

Die auftretenden besonderen Fälle mögen übergangen werden mit Ausnahme des Falles, wo alle Schnittlinien der vier Ebenen parallel sind. Durch Multiplikation von drei der vier Ebenengrößen entsteht dann ein Vektor, welcher der Ebene der vierten Ebenengröße parallel ist. Hieraus folgt, daß in diesem Falle:

$$\mathfrak{x}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \xi\,\mathfrak{x}_1 + \eta\,\mathfrak{x}_2 + \zeta\,\mathfrak{x}_3 = 0$$

wird. Damit wird aber nach (41) $\mathsf{M} = 0$. Da nun sowohl, wenn vier Ebenen durch einen Punkt gehen als auch, wenn ihre Schnittlinien parallel sind, diese Ebenen einem Bündel angehören, so können wir zusammenfassend sagen, indem wir wieder von den Ebenengrößen zu den einfachen Ebenen $\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{\pi}_3, \boldsymbol{\pi}_4$ übergehen, es ist:

$$(43) \qquad [\boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{\pi}_2 \boldsymbol{\pi}_3 \boldsymbol{\pi}_4] = 0$$

die Bedingung dafür, daß die vier Ebenen einem Bündel angehören.

Das Produkt $\mathsf{M}\,\eta$ von vier Ebenengrößen $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ kann auch ersetzt werden durch das Produkt von zwei rotatorischen Liniengrößen. Setzt man nämlich:

$$[\Pi_1 \Pi_2] = \mathfrak{p}, \quad [\Pi_3 \Pi_4] = \mathfrak{p}',$$

so wird:

$$(44) \qquad \mathsf{M}\,\eta = [\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}']$$

$$\text{oder } \mathsf{M} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}',$$

und sind die analytischen Ausdrücke der beiden Liniengrößen:

$$\mathfrak{p} = \mathrm{u}\,[\mathrm{I}\,\Omega] + \mathrm{v}\,[\mathrm{J}\,\Omega] + \mathrm{w}\,[\mathrm{K}\,\Omega] + \mathrm{p}\,[\mathrm{J}\,\mathrm{K}] + \mathrm{q}\,[\mathrm{K}\,\mathrm{I}] + \mathrm{r}\,[\mathrm{I}\,\mathrm{J}],$$
$$\mathfrak{p}' = \mathrm{u}'[\mathrm{I}\,\Omega] + \mathrm{v}'[\mathrm{J}\,\Omega] + \mathrm{w}'[\mathrm{K}\,\Omega] + \mathrm{p}'[\mathrm{J}\,\mathrm{K}] + \mathrm{q}'[\mathrm{K}\,\mathrm{I}] + \mathrm{r}'[\mathrm{I}\,\mathrm{J}],$$

so ergibt sich:

$$(45) \qquad \mathsf{M} = \mathrm{u}\,\mathrm{p}' + \mathrm{v}\,\mathrm{q}' + \mathrm{w}\,\mathrm{r}' + \mathrm{p}\,\mathrm{u}' + \mathrm{q}\,\mathrm{v}' + \mathrm{r}\,\mathrm{w}'.$$

Diesen Ausdruck wollen wir das gegenseitige Moment der beiden rotatorischen Liniengrößen nennen. Wenn es verschwindet, also:

$$(46) \qquad \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}' = 0$$

ist, so müssen die Ebenen der vier Ebenengrößen wieder einem Bündel, die Linien der beiden Liniengrößen also einer Ebene angehören, und die vorstehende Gleichung kann als die analytische Bedingung dafür angesehen werden, daß dies eintritt. Die beiden Linien sind dann entweder parallel oder sie schneiden sich. In beiden Fällen verschwindet auch das gegenseitige Moment zweier translatorischer Liniengrößen, die den Linien angehören.

Das äußere Produkt von fünf Ebenengrößen ist immer gleich Null. Sind nämlich Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 vier Ebenengrößen, deren Ebenen nicht einem Bündel angehören, so läßt sich jede fünfte Ebenengröße Π in der Form darstellen:

$$\Pi = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2 + \lambda_3 \Pi_3 + \lambda_4 \Pi_4. \tag{47}$$

Dies erkennen wir wie folgt. Sei s' die Linie, in der sich die Ebenen von Π_1 und Π_2 schneiden, s'' die Schnittlinie der Ebenen von Π_3 und Π_4, seien ferner S' und S'' die Punkte, in denen die Ebene von Π die Linien s' und s'' trifft. Dann läßt sich nach Gleichung (36) jede Ebenengröße Π', welche der Verbindungsebene σ' von s' und S'' angehört, in der Form $\Pi' = \lambda_1' \Pi_1 + \lambda_2' \Pi_2$ darstellen, und jede Ebenengröße, die der Verbindungsebene σ'' von s'' und S' angehört, in der Form $\Pi'' = \lambda_3' \Pi_3 + \lambda_4' \Pi_4$, Π selbst ist aber, da es einer Ebene angehört, die durch die Schnittlinie von σ' und σ'' geht, von der Form $\Pi = \lambda' \Pi' + \lambda'' \Pi''$. Setzt man hierin die gefundenen Werte von Π' und Π'' ein und macht $\lambda' \lambda_1' = \lambda_1$, $\lambda' \lambda_2' = \lambda_2$, $\lambda'' \lambda_3' = \lambda_3$, $\lambda'' \lambda_4' = \lambda_4$, so findet man in der Tat die Gleichung (47).

Daraus aber folgt sofort weiter, daß:

$$[\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \Pi] = 0. \tag{48}$$

Denn setzt man in dem Produkte den Ausdruck für Π ein und multipliziert die Summe aus, so enthalten die einzelnen sich ergebenden Produkte alle zwei gleiche Faktoren und verschwinden deshalb.

Endlich möge noch eine Bemerkung gestattet sein. Es kann befremden, daß durch Multiplikation dreier Ebenengrößen nicht einfach wieder eine Punktgröße, sondern eine Punktgröße, mit einem Faktor $\mathfrak{e}$ behaftet, auftritt. Dieser Faktor ist deshalb hinzugefügt worden, weil das Produkt dreier Ebenengrößen einen Schraubensinn in sich schließt, welcher der Punktgröße fremd ist und fremd bleiben muß. Man kann nun $\mathfrak{e} = 1$ setzen, damit ordnet man jedoch in bestimmter Weise die beiden Schraubensinne, Rechtsschrauben und Linksschrauben, dem doppelten algebraischen Sinne, $+$ und $-$, zu. Diese Zuordnung ist erlaubt, aber willkürlich. Sie kann indessen bei einer zahlmäßigen Analysis gerichteter Größen gar nicht umgangen werden, denn die Wahl des Koordinatensystems bedeutet bereits eine solche Entscheidung. Nur wird bei der von uns gewählten allgemeinen Schreibweise das Resultat von dieser Wahl dadurch unabhängig gemacht, daß der hinzugefügte symbolische Faktor die durch den Übergang von einem Rechts- zu einem Linksschraubensystem in dem Zahlwerte hervorgerufene Änderung wieder aufhebt, indem er ebenfalls sein Zeichen wechselt, wenn der Zahlwert es tut. Wenn wir nun $\mathfrak{e} = 1$ annehmen, so wird $\eta = \varepsilon$. Wir können dann über die gemeinsamen Werte dieser Größen noch verschieden verfügen.

Erstens könnten wir versuchsweise:

$$\Omega = [\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}] = 1$$

annehmen, so daß das äußere Produkt dreier Vektoren eine reine Zahl wird. Daraus würde folgen: $\varepsilon = 0$ und $\eta = 0$, aber ebensogut auch $\varepsilon = \eta = -0$, so daß dieser Ansatz zu Widersprüchen führt.

Zweitens können wir:

$$\varepsilon = [0\,\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}] = 1 \tag{49}$$

setzen, woraus dann auch $\eta = 1$ folgt. Dann wird sowohl das Produkt von vier Punktgrößen wie das Produkt von vier Ebenengrößen eine reine Zahl.

Man bezeichnet nun einen Zahlwert, der eines doppelten Vorzeichens fähig ist und mit Raumgrößen in Zusammenhang steht, als einen Skalar.[1]) In den vorstehenden Entwicklungen haben wir zwei solche Skalare gefunden, den Zahlfaktor einer Punktgröße und das innere Produkt zweier Vektoren. Diese beiden Skalare können wir als gebundene und freie Skalare unterscheiden. Wenn wir auf Grund der soeben erwähnten, an sich willkürlichen Festsetzungen noch weitere solche reinen Zahlwerte einführen, so haben wir diese als Skalare zweiter Art von den ursprünglichen als Skalaren erster Art zu unterscheiden. Sie haben im Gegensatz zu diesen die Eigenschaft, ihr Zeichen zu wechseln, wenn die Raumgrößen, auf die sie sich beziehen, einer Spiegelung an irgendeiner Ebene oder einer Inversion am Koordinatenursprung unterworfen werden. Die Notwendigkeit einer solchen Scheidung hat F. Klein nachdrücklich hervorgehoben.

Von den Skalaren verschieden sind die tensoriellen Größen, die nur einen absoluten Betrag, aber kein Vorzeichen zulassen. Hierzu gehört die Länge eines Vektors, der Inhalt einer Fläche usw.

Sechstes Kapitel.

Momentane Drehungen.

Wir haben nun die methodische Analyse der Raumgrößen, soweit sie für unsere Zwecke vonnöten ist, erledigt und durchbrechen jetzt die streng systematische Entwicklung, indem wir versuchen, die im letzten Kapitel gewonnenen Resultate, soweit sie die Produkte

1) Die Bezeichnung rührt her von Hamilton (Lectures on Quaternions, Art. 64).

zweier Ebenengrößen betreffen, auf die Kinematik des starren Körpers oder vielmehr des ganzen wie ein starrer Körper beweglich gedachten Raumes anzuwenden. Der Gedanke einer solchen Anwendung liegt nahe, haben wir doch schon von Rotationen, die eine Ebene in eine andere die erste schneidende Ebene überführen, und von Translationen, durch die eine Ebene in eine parallele übergeht, gesprochen. Aber dies war eine bloße Ausdrucksweise, um rein geometrische Verhältnisse möglichst anschaulich zu formulieren. Der wirkliche Übergang zur Kinematik ist mit eigenartigen Schwierigkeiten verknüpft, er ist überhaupt nur in beschränkter Weise möglich und muß mit großer Vorsicht ausgeführt werden.

Wir wollen an den Begriff des Vektormomentes anknüpfen, den wir im vierten Kapitel für eine translatorische Liniengröße eingeführt haben und wollen diesen Begriff in entsprechender Umformung auch auf die rotatorische Liniengröße auszudehnen suchen. Das Vektormoment für einen Punkt P war ein Flächenvektor, der, wenn die Liniengröße durch eine Strecke SS' gegeben ist, durch das Dreieck $SS'P$ dargestellt wird, indem man sich dieses Dreieck so umlaufen denken muß, daß der Sinn des Umlaufes in der Seite SS' mit dem Sinne der Liniengröße übereinstimmt. Der Zahlwert dieses Flächenvektors läßt sich durch das Produkt

$$r \cdot s$$

geben, indem s die Länge der Strecke SS' und r den Abstand des Punktes P von der Linie dieser Strecke bezeichnet. Wenn wir nun von der translatorischen zu der rotatorischen Liniengröße übergehen, so haben wir die Länge s durch den Sinus des Winkels zweier Ebenen zu ersetzen, während die Entfernung r des Bezugspunktes P von der Linie der Liniengröße, hier der Schnittlinie der beiden Ebenen, unverändert bleibt. Das Produkt:

$$c = r \cdot \sin \sigma \tag{1}$$

ist eine Länge, wir erhalten also jetzt einen Linienvektor, und zur völligen Festlegung des Vektormomentes ist noch die Richtung dieses Linienvektors zu bestimmen. Um dies zu tun, drehen wir, was erlaubt ist, die beiden Ebenen mit Beibehaltung ihres Winkels so um ihre Schnittlinie herum, daß eine von ihnen — und zwar soll es diejenige sein, die bei der Produktbildung an erster Stelle steht — durch den Bezugspunkt P hindurchgeht, die Richtung des Vektors ist dann durch das Lot auf der Ebene im Punkte P gegeben, in dem Sinne genommen, der nach der zweiten Ebene hinweist. Wir wollen zeigen, daß auf Grund dieser Festsetzungen sich für die Komponenten des Linienvektors genau analoge Ausdrücke ergeben, wie sie für die Komponenten des Flächenvektors, der das Vektormoment einer translatorischen Liniengröße bildet, die drei ersten der Gleichungen (25) [S. 47] enthalten.

Zu dem Zwecke denken wir uns die beiden Ebenen, welche die rotatorische Liniengröße liefern, durch die Gleichungen:

$$\xi x + \eta y + \zeta z - \theta = 0,$$
$$\xi' x + \eta' y + \zeta' z - \theta' = 0$$

gegeben, in denen wir:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$$

voraussetzen. Wir beachten nun, daß $c = r \cdot \sin \sigma$ nichts anderes ist als der Abstand des Punktes P von der zweiten Ebene. Sind also x, y, z die Koordinaten dieses Punktes, so wird:

$$\xi' x + \eta' y + \zeta' z - \theta' = -c. \tag{2}$$

Weil aber P in der ersten Ebene liegen soll, ist hierzu die Gleichung hinzuzufügen:

$$\xi x + \eta y + \zeta z - \theta = 0. \tag{3}$$

Nun wollen wir beachten, daß:

$$\left\{\begin{array}{lll} \bar{\mathrm{u}} = \xi\theta' - \xi'\theta, & \bar{\mathrm{v}} = \eta\theta' - \eta'\theta, & \bar{\mathrm{w}} = \zeta\theta' - \zeta'\theta, \\ \bar{\mathrm{p}} = \eta\zeta' - \eta'\zeta, & \bar{\mathrm{q}} = \zeta\xi' - \zeta'\xi, & \bar{\mathrm{r}} = \xi\eta' - \xi'\eta \end{array}\right. \tag{4}$$

die Koordinaten der rotatorischen Liniengröße sind. Dann lassen sich aus den Gleichungen (2) und (3), indem man sie erst mit ξ und ξ', sodann mit η und η', endlich mit ζ und ζ' multipliziert und darauf jedesmal voneinander subtrahiert, die folgenden Gleichungen ableiten:

$$\left\{\begin{array}{l} c\,\xi = \bar{\mathrm{u}} - \bar{\mathrm{r}}y + \bar{\mathrm{q}}z, \\ c\,\eta = \bar{\mathrm{v}} - \bar{\mathrm{p}}z + \bar{\mathrm{r}}x, \\ c\,\zeta = \bar{\mathrm{w}} - \bar{\mathrm{q}}x + \bar{\mathrm{p}}y. \end{array}\right. \tag{5}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen geben die Komponenten des in der angegebenen Weise festgelegten Linienvektors an, der das Vektormoment der rotatorischen Liniengröße repräsentiert. Dieses Vektormoment entbehrt aber hier einer natürlichen und ungezwungenen Deutung, denn der Abstand des Punktes P von der zweiten Ebene wird nicht mit der Richtung zusammengenommen, in der er wirklich gemessen wird, sondern muß auf die zu der ersten Ebene senkrechte Richtung übertragen werden.

Diese Unzuträglichkeit verschwindet nur dann, wenn der Winkel σ zwischen den beiden Ebenen unendlich klein angenommen wird. Dann können wir den Sinus des sehr kleinen Winkels σ mit dem zugehörigen Bogen des Einheitskreises zusammenfallen lassen, so daß nun:

$$c = r\sigma \tag{6}$$

wird. Dies ist aber die Strecke, die der Punkt P bei einer Drehung um die Linie der rotatorischen Liniengröße durch den unendlich kleinen Winkel σ wirklich beschreibt, und die Richtung, die wir dem Linienvektor gegeben haben, stimmt mit der Bewegungsrichtung des Punktes P bei dieser Drehung ebenfalls überein. Der Linienvektor hat also jetzt die einfache Bedeutung, daß er die Verschiebung des Bezugspunktes P bei der durch die rotatorische Liniengröße dargestellten unendlich kleinen Drehung der Größe und Richtung nach liefert.

Um die Unbequemlichkeit des Operierens mit unendlich kleinen Größen zu vermeiden, scheiden wir aus diesen allen einen unendlich kleinen Faktor τ aus. Diesen können wir als die sehr kurze Zeit, in welcher die sehr kleine Drehung stattfindet, deuten. Machen wir dann:

$$\sigma = \omega \cdot \tau, \tag{7}$$

so bedeutet ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, und setzen wir ferner:

$$c\xi = \dot{x}\tau, \quad c\eta = \dot{y}\tau, \quad c\zeta = \dot{z}\tau, \tag{8}$$

so sind $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes und werden, wenn wir mit dt das Differential der Zeit bezeichnen, in der gewöhnlichen Schreibweise:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}. \tag{9}$$

Endlich machen wir:

$$\bar{\mathrm{u}} = \mathrm{u}\tau, \quad \bar{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\tau, \quad \bar{\mathrm{w}} = \mathrm{w}\tau, \quad \bar{\mathrm{p}} = \mathrm{p}\tau, \quad \bar{\mathrm{q}} = \mathrm{q}\tau, \quad \bar{\mathrm{r}} = \mathrm{r}\tau \tag{10}$$

und können dann die Gleichungen (5) in der von Euler[1]) herrührenden Form niederschreiben:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= \mathrm{u} - \mathrm{r}y + \mathrm{q}z, \\ \dot{y} &= \mathrm{v} - \mathrm{p}z + \mathrm{r}x, \\ \dot{z} &= \mathrm{w} - \mathrm{q}x + \mathrm{p}y, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

wozu die identische Beziehung

$$\mathrm{pu} + \mathrm{qv} + \mathrm{rw} = 0 \tag{12}$$

hinzutritt. Dies sind die grundlegenden Gleichungen, von denen wir für das Weitere auszugehen haben. Wir nennen u, v, w, p, q, r die **Koordinaten** der Drehung. Ihre Winkelgeschwindigkeit ω ist aus denselben mit Hilfe der Gleichung $\omega = \sqrt{\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2}$ zu bestimmen.

Zunächst wollen wir nun die Frage beantworten, wie sich die Bewegung darstellt, zu der sich zwei gleichzeitige Drehungen zusammensetzen. Hierzu benutzen wir das folgende Prinzip: wenn während der sehr kurzen Zeit dt die Koordinaten x, y, z eines Punktes P infolge der einen Drehung sich um

$$d_1x, \quad d_1y, \quad d_1z$$

vergrößern, und infolge der anderen Drehung um

$$d_2x, \quad d_2y, \quad d_2z,$$

---

1) Découverte d'un nouveau principe de mécanique, Mémoires de l'Académie de Berlin VI, Année 1750 (1752), p. 185.

so sind die Veränderungen, welche sie durch die beiden Drehungen zusammen erfahren:

$$(13) \qquad dx = d_1x + d_2x, \quad dy = d_1y + d_2y, \quad dz = d_1z + d_2z.$$

Dividiert man alle diese Koordinatenänderungen durch die Zeit dt, in der sie erfolgen, so erhält man die Komponenten der Teilgeschwindigkeiten und der resultierenden Geschwindigkeit. Faßt man diese Geschwindigkeiten als Vektoren auf, deren Komponenten dann die Geschwindigkeitskomponenten sind, so sieht man, daß die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten dieselbe Regel wie die Addition der Vektoren befolgt; man bezeichnet diese Regel hier als das Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

Drücken wir nun gemäß den Grundgleichungen (11) die zusammenzusetzenden Verschiebungen aus wie folgt:

$$\begin{aligned} d_1x &= (\mathrm{u}_1 - \mathrm{r}_1 y + \mathrm{q}_1 z)\,dt, & d_2x &= (\mathrm{u}_2 - \mathrm{r}_2 y + \mathrm{q}_2 z)\,dt,\\ d_1y &= (\mathrm{v}_1 - \mathrm{p}_1 z + \mathrm{r}_1 x)\,dt, & d_2y &= (\mathrm{v}_2 - \mathrm{p}_2 z + \mathrm{r}_2 x)\,dt,\\ d_1z &= (\mathrm{w}_1 - \mathrm{q}_1 x + \mathrm{p}_1 y)\,dt, & d_2z &= (\mathrm{w}_2 - \mathrm{q}_2 x + \mathrm{p}_2 y)\,dt, \end{aligned}$$

so sehen wir sofort, daß wir, indem wir:

$$(14) \qquad \begin{cases} \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 = \mathrm{u}, & \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = \mathrm{w},\\ \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}, & \mathrm{q}_1 + \mathrm{q}_2 = \mathrm{q}, \quad \mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2 = \mathrm{r} \end{cases}$$

setzen, für die Komponenten

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

der resultierenden Geschwindigkeit Gleichungen von genau derselben Gestalt wie (11) erhalten. Nur haben u, v, w, p, q, r ihre Bedeutung verändert, indem sie sich nicht mehr auf eine Drehung, sondern auf die aus zwei Drehungen zusammengesetzte Bewegung bezieht. Dementsprechend hört die Gleichung (12) i. a. auf zu gelten. Es ergibt sich vielmehr aus den Gleichungen:

$$\mathrm{u}_1\mathrm{p}_1 + \mathrm{v}_1\mathrm{q}_1 + \mathrm{w}_1\mathrm{r}_1 = 0, \quad \mathrm{u}_2\mathrm{p}_2 + \mathrm{v}_2\mathrm{q}_2 + \mathrm{w}_2\mathrm{r}_2 = 0,$$

daß:

$$\begin{aligned} (15) \qquad & \mathrm{up} + \mathrm{vq} + \mathrm{wr}\\ &= (\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2)(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2) + (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2)(\mathrm{q}_1 + \mathrm{q}_2) + (\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2)(\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2)\\ &= \mathrm{u}_1\mathrm{p}_2 + \mathrm{v}_1\mathrm{q}_2 + \mathrm{w}_1\mathrm{r}_2 + \mathrm{p}_1\mathrm{u}_2 + \mathrm{q}_1\mathrm{v}_2 + \mathrm{r}_1\mathrm{w}_2, \end{aligned}$$

also gleich dem gegenseitigen Momente der rotatorischen Liniengrößen wird, welche die beiden Drehungen repräsentieren. Wir wollen diese Größe einfach als das Moment der resultierenden Bewegung bezeichnen. Sie verschwindet nur dann, wenn die Linien der beiden Liniengrößen, d. h. die Achsen der beiden Drehungen in einer Ebene liegen. Dann stimmen die herauskommenden Gleichungen mit den Gleichungen (11) nicht bloß in der Form, sondern auch in der Bedeutung der Koeffizienten überein. Die resultierende Bewegung ist dann wieder eine Drehung, und wir sehen somit, daß zwei Drehungen sich wieder zu einer Drehung dann und nur dann zusammensetzen, wenn ihre Achsen entweder sich schneiden oder zueinander parallel sind. Wir wollen in diesen beiden Fällen die resultierende Drehung näher zu bestimmen suchen.

Wenn die Achsen der beiden Drehungen sich schneiden, so ist es am einfachsten, den Schnittpunkt in den Koordinatenursprung zu legen. Dann wird in den vorigen Formeln:

$$\mathfrak{u}_1 = 0, \quad \mathfrak{v}_1 = 0, \quad \mathfrak{w}_1 = 0,$$
$$\mathfrak{u}_2 = 0, \quad \mathfrak{v}_2 = 0, \quad \mathfrak{w}_2 = 0,$$

denn da der Koordinatenursprung auf beiden Rotationsachsen liegen soll, müssen für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die Verschiebungskomponenten $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$ und $d_2 x$, $d_2 y$, $d_2 z$ verschwinden, was zu den vorstehenden Gleichungen führt. Aus diesen folgt aber, daß auch:

$$\mathfrak{u} = 0, \quad \mathfrak{v} = 0, \quad \mathfrak{w} = 0$$

wird, während:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$$

bleibt. Trägt man auf der Achse einer jeden Drehung vom Koordinatenursprung aus, der auf dieser Achse liegt, eine Strecke ab, welche die Winkelgeschwindigkeit der Drehung mißt und mit dem Sinne dieser Drehung gleichstimmig ist, so kann man dergestalt die Drehungen um den Koordinatenursprung geometrisch durch Vektoren darstellen, und man setzt dann zwei solche Drehungen zu einer zusammen, indem man die sie darstellenden Vektoren addiert, d. h. die Drehungen um einen Punkt vereinigen sich nach dem Parallelogrammgesetze.

Sind die Achsen der beiden Drehungen parallel, so können wir sie parallel zur z-Achse in der xz-Ebene des Koordinatensystems annehmen. Die Komponenten der Verschiebungen eines beliebigen Punktes P sind dann von der Form:

$$(16\text{a}) \quad \begin{cases} d_1 x = -\,\omega_1 y\, dt, & d_1 y = \omega_1 (x - x_1)\, dt, \quad d_1 z = 0, \\ d_2 x = -\,\omega_2 y\, dt, & d_2 y = \omega_2 (x - x_2)\, dt, \quad d_2 z = 0, \end{cases}$$

wenn x_1 und x_2 die Abstände der Rotationsachsen von der z-Achse und ω_1, ω_2 die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen sind. Denn die Verschiebung ist, in einer Parallelebene zur xy-Ebene, senkrecht zu dem aus dem Punkte P auf die Drehachse gefällten Lote und, wenn

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2} \qquad (i = 1, 2)$$

die Länge dieses Lotes ist, an Größe $= r_i \omega_i$. Es wird somit jetzt:

$$(16\text{b}) \quad \begin{matrix} \mathfrak{u}_1 = 0, & \mathfrak{v}_1 = -\,\omega_1 x_1, & \mathfrak{w}_1 = 0, & \mathfrak{p}_1 = 0, & \mathfrak{q}_1 = 0, & \mathfrak{r}_1 = \omega_1, \\ \mathfrak{u}_2 = 0, & \mathfrak{v}_2 = -\,\omega_2 x_2, & \mathfrak{w}_2 = 0, & \mathfrak{p}_2 = 0, & \mathfrak{q}_2 = 0, & \mathfrak{r}_2 = \omega_2. \end{matrix}$$

Daraus folgt für die resultierende Drehung:

$$\mathrm{u} = 0, \quad \mathrm{v} = -\,\omega x, \quad \mathrm{w} = 0, \quad \mathrm{p} = 0, \quad \mathrm{q} = 0, \quad \mathrm{r} = \omega,$$

indem wir:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad x = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2}{\omega_1 + \omega_2} \tag{16c}$$

setzen. Die Winkelgeschwindigkeiten sind hierbei positiv genommen, wenn der Drehsinn positiv für die positive Richtung der z-Achse ist, also von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse führt, und negativ im entgegengesetzten Falle. Wir finden somit für die resultierende Drehung wieder eine Drehung um eine zur z-Achse parallele Drehachse, die der xz-Ebene angehört. Es setzen sich also zwei Drehungen um parallele Achsen zu einer Drehung um eine gleich gerichtete Achse zusammen, die der Ebene der beiden ersten Drehachsen angehört. Die resultierende Drehgeschwindigkeit ist die algebraische Summe von den Drehgeschwindigkeiten der Teildrehungen. Aus dem Ausdrucke für x folgt:

$$(x - x_1) : (x - x_2) = -\,\omega_2 : \omega_1. \tag{16d}$$

Daraus sieht man, daß die Achse der resultierenden Drehung den Abstand der Achsen der Teildrehungen im umgekehrten Verhältnisse der zugehörigen Drehgeschwindigkeiten teilt, und zwar innerhalb, d. h. zwischen den beiden Achsen, wenn die beiden Teildrehungen gleichsinnig sind, dagegen außen, wenn sie entgegengesetzten Sinn haben, und zwar liegt die resultierende Achse dann auf der Seite derjenigen Achse, zu der die größere Drehgeschwindigkeit gehört. Die Drehungen um parallele Achsen befolgen so in ihrer Zusammensetzung ein Gesetz, das dem Archimedischen Hebelgesetze durchaus analog ist.

Die für die Vereinigung dieser Drehungen gegebene Regel versagt, wenn die Drehgeschwindigkeiten um die parallelen Achsen gleich sind, aber in entgegengesetztem Sinne erfolgen, also $\omega_2 = -\,\omega_1$ wird, und dieser Spezialfall verlangt deshalb eine gesonderte Behandlung. Man sieht aus den Formeln (16a) und (13) sofort, daß in diesem Falle die Komponenten der resultierenden Verschiebung die folgenden Werte erlangen:

$$dx = 0, \quad dy = \omega_1 (x_2 - x_1), \quad dz = 0.$$

Die Verschiebungen aller Punkte sind also gleich groß und gleich gerichtet, nämlich senkrecht zu der Ebene der beiden parallelen Drehachsen. Die Größe der Verschiebung wird bestimmt durch das Produkt aus der Drehgeschwindigkeit der beiden Drehungen und dem Abstande ihrer Achsen. (Der Sinn der Verschiebung ist sofort in der Richtung gegeben, nach der sich ein Punkt zwischen den beiden

Drehachsen infolge jeder der beiden Drehungen bewegt.) Wir erhalten so als die Resultante zweier entgegengesetzt gleicher Drehungen um parallele Achsen, die wir nach Poinsot[1]) als ein Rotationspaar bezeichnen, eine einfache Translation. Die Größe dieser Translation heißt das Moment des Rotationspaares, sie ist gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit der beiden Rotationen und dem Abstande ihrer Achsen.

Nachdem wir die besonderen Fälle der Zusammensetzung zweier Drehungen erledigt haben, wollen wir jetzt zu dem allgemeinen Falle zurückkehren und nachweisen, daß sich jede momentane Bewegung eines starren Körpers aus zwei Drehungen zusammensetzen läßt.[2]) Diese Zusammensetzung gründet sich auf das bereits benutzte Prinzip, das sich in dem sogenannten Parallelogramm der Geschwindigkeiten ausspricht und in allgemeiner Fassung lautet: Das Resultat gleichzeitiger unendlich kleiner Bewegungen ist dasselbe, als ob diese Bewegungen nacheinander ausgeführt worden wären, in irgendwelcher Reihenfolge. Zwei gleichzeitige Bewegungen können in Wirklichkeit nur dann konstatiert werden, wenn der bewegte Körper einem Systeme angehört, innerhalb dessen er sich bewegt, und das seinerseits in Bewegung begriffen ist. Es verbietet aber nichts, in Gedanken ein solches System nach Belieben einzuschieben, um dadurch die Beschreibung der Bewegung, auf die es ankommt, möglichst einfach oder anschaulich zu gestalten.

Wir beweisen zunächst, daß sich jede momentane Bewegung eines starren Körpers aus einer Translation und einer Rotation zusammensetzen läßt.[3]) In der Tat brauchen wir uns nur ein System eingeschoben zu denken, in dem ein beliebiger Punkt O des Körpers unverändert seine Lage beibehalten muß und das seinerseits nur eine Parallelverschiebung erleiden kann, um die Richtigkeit des Satzes einzusehen. Nach dem zugrunde gelegten Prinzip haben wir dann dem Körper zuerst die Parallelverschiebung zu erteilen, die das eingeschobene System erfährt, und darauf die Drehung, die er gegen dies bewegliche System ausführt; aus diesen beiden Bewegungen setzt sich dann die wirkliche Bewegung zusammen. Die Komponenten der Parallelverschiebung seien:

---

1) Théorie nouvelle de la rotation des corps, 1834. Abgedruckt in Liouvilles Journal de math. XVI, 1851. Die dort in den ersten Paragraphen gegebene Entwicklung enthält fast genau den im obigen verfolgten Gedankengang.

2) Vgl. A. F. Moebius, Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen, Journ. f. Math. hggb. v. Crelle 18 (1838) p. 189, Werke I, p. 545, und die sehr reichhaltige Arbeit von Chasles, Comptes Rendus 16 (1843) p. 420: Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide.

3) Dieses Prinzip hat schon Euler in allen seinen Arbeiten über die Bewegung des starren Körpers verfolgt, zuerst in der Scientia Navalis, Petersburg 1749.

$$d'x = \mathrm{u}\,dt, \quad d'y = \mathrm{v}\,dt, \quad d'z = \mathrm{w}\,dt.$$

Wählen wir nun für den in dem eingeschobenen System festbleibenden Punkt O des Körpers denjenigen, der bei Anfang der Bewegung im Koordinatenursprunge liegt, so werden, da jede Drehung um O eine Drehung um eine durch O gehende Achse ist, die Komponenten der Verschiebung, die ein beliebiger Punkt (x, y, z) infolge dieser Drehung erfährt:

$$d''x = (\mathrm{q}\,z - \mathrm{r}\,y)\,dt, \quad d''y = (\mathrm{r}\,x - \mathrm{p}\,z)\,dt, \quad d''z = (\mathrm{p}\,y - \mathrm{q}\,x)\,dt.$$

Die Komponenten der resultierenden Verschiebung:

$$dx = d'x + d''y, \quad dy = d'y + d''y, \quad dz = d'z + d''z$$

sind dann, durch die zugehörige Zeit dt geteilt, wieder durch Ausdrücke von der Form (11) gegeben, so daß durch diese Gleichungen wirklich die allgemeinste momentane Bewegung eines starren Körpers dargestellt wird.

Es lohnt der Mühe, dies noch auf eine andere Art nachzuweisen. Das Produkt aus einer Ebenengröße Π und einem Punkt $\mathbf{P}$ ist eine lineare Funktion von den Koordinaten x, y, z dieses Punktes. Wir hatten gefunden (Gleichung (31) im 4. Kapitel):

$$[\Pi\,\mathbf{P}] = (\xi\,x + \eta\,y + \zeta\,z - \theta)\,\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Dieses Produkt muß aber bei einer Bewegung des wie ein starrer Körper angesehenen Raumes seiner geometrischen Bedeutung nach in ein gleichgroßes Produkt:

$$[\Pi'\,\mathbf{P}'] = (\xi'\,x' + \eta'\,y' + \zeta'\,z' - \theta')\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

übergehen. Die Beziehung zwischen den ursprünglichen Koordinaten x, y, z und den transformierten x', y', z' ist also derart, daß jede lineare Funktion der ersteren in eine lineare Funktion der letzteren übergeht. Sie muß demnach durch lineare Transformationsgleichungen vermittelt werden, und eben solche Gleichungen ergeben sich auch für die Komponenten:

$$\delta x = x' - x, \quad \delta y = y' - y, \quad \delta z = z' - z$$

der Verschiebung, die ein beliebiger Punkt erfährt, sagen wir:

$$\begin{aligned}
\delta x &= \delta a + \delta a_1 \cdot x + \delta a_2 \cdot y + \delta a_3 \cdot z,\\
\delta y &= \delta b + \delta b_1 \cdot x + \delta b_2 \cdot y + \delta b_3 \cdot z,\\
\delta z &= \delta c + \delta c_1 \cdot x + \delta c_2 \cdot y + \delta c_3 \cdot z.
\end{aligned}$$

Bilden wir dieselben Gleichungen noch einmal für einen Punkt, dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1 seien, und subtrahieren darauf die beiden Gleichungssysteme, so ergibt sich, indem wir:

$$x - x_1 = \mathfrak{x}, \quad y - y_1 = \mathfrak{y}, \quad z - z_1 = \mathfrak{z}$$

setzen:

$$\delta\mathfrak{x} = \delta a_1\, \mathfrak{x} + \delta a_2\, \mathfrak{y} + \delta a_3\, \mathfrak{z},$$
$$\delta\mathfrak{y} = \delta b_1\, \mathfrak{x} + \delta b_2\, \mathfrak{y} + \delta b_3\, \mathfrak{z},$$
$$\delta\mathfrak{z} = \delta c_1\, \mathfrak{x} + \delta c_2\, \mathfrak{y} + \delta c_3\, \mathfrak{z}.$$

Sollen nun die Transformationsgleichungen einer Bewegung entsprechen, so folgt aus der Konstanz der Entfernung zweier Punkte, daß:

$$(\mathfrak{x} + \delta\mathfrak{x})^2 + (\mathfrak{y} + \delta\mathfrak{y})^2 + (\mathfrak{z} + \delta\mathfrak{z})^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2$$

sein muß. Wenn nun die Verschiebung aller Punkte unendlich gering ist, so entsteht aus dieser Gleichung bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung:

$$\mathfrak{x}\,\delta\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{y} + \mathfrak{z}\,\delta\mathfrak{z} = 0.$$

Multiplizieren wir aber die vorhergehenden Ausdrücke für $\delta\mathfrak{x}$, $\delta\mathfrak{y}$, $\delta\mathfrak{z}$ der Reihe nach mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und setzen die Summe $= 0$, so sehen wir, daß daraus:

$$\delta a_1 = 0, \quad \delta b_2 = 0, \quad \delta c_3 = 0, \quad \delta a_2 = -\,\delta b_1, \quad \delta c_1 = -\,\delta a_3, \quad \delta b_3 = -\,\delta c_2$$

folgt. Schreiben wir jetzt:

$$\delta a = \mathrm{u}\, dt, \quad \delta b = \mathrm{v}\, dt, \quad \delta c = \mathrm{w}\, dt, \quad \delta c_2 = \mathrm{p}\, dt, \quad \delta a_3 = \mathrm{q}\, dt, \quad \delta b_1 = \mathrm{r}\, dt,$$
$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz,$$

so wird wieder:

$$dx = (\mathrm{u} - \mathrm{r}\, y + \mathrm{q}\, z)\, dt,$$
$$dy = (\mathrm{v} - \mathrm{p}\, z + \mathrm{r}\, x)\, dt,$$
$$dz = (\mathrm{w} - \mathrm{q}\, x + \mathrm{p}\, y)\, dt.$$

Soll nun die durch diese Gleichungen dargestellte allgemeine Bewegung aus zwei einfachen Drehungen zusammengesetzt werden, so haben wir wie in den Gleichungen (14):

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2, \quad \mathrm{v} = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2, \quad \mathrm{w} = \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2,$$
$$\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2, \quad \mathrm{q} = \mathrm{q}_1 + \mathrm{q}_2, \quad \mathrm{r} = \mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2$$

zu setzen, wozu noch die Bedingungen:

$$\mathrm{u}_1\,\mathrm{p}_1 + \mathrm{v}_1\,\mathrm{q}_1 + \mathrm{w}_1\,\mathrm{r}_1 = 0, \quad \mathrm{u}_2\,\mathrm{p}_2 + \mathrm{v}_2\,\mathrm{q}_2 + \mathrm{w}_2\,\mathrm{r}_2 = 0$$

gehören. Diesen acht Gleichungen läßt sich durch die zwölf Größen $\mathrm{u}_1 \ldots$, $\mathrm{u}_2 \ldots$ auf unendlich mannigfache Weise genügen, und zwar wollen wir zeigen, daß sich die Achse a_1 einer der beiden Drehungen beliebig annehmen läßt, daß dann aber dadurch die Achse a_2 der anderen Drehung und von beiden Drehungen Größe und Sinn eindeutig bestimmt sind. Zu dem Zwecke führen wir eine Drehung mit der Drehgeschwindigkeit 1 um die als gegeben vorausgesetzte Drehachse a_1 ein, die Koordinaten dieser Drehung:

$$\mathrm{u}_0, \quad \mathrm{v}_0, \quad \mathrm{w}_0, \quad \mathrm{p}_0, \quad \mathrm{q}_0, \quad \mathrm{r}_0$$

können wir dann ebenfalls als gegeben ansehen und weiter:

$$\mathrm{u}_1 = \omega_1 \mathrm{u}_0, \quad \mathrm{v}_1 = \omega_1 \mathrm{v}_0, \quad \mathrm{w}_1 = \omega_1 \mathrm{w}_0, \quad \mathrm{p}_1 = \omega_1 \mathrm{p}_0, \quad \mathrm{q}_1 = \omega_1 \mathrm{q}_0, \quad \mathrm{r}_1 = \omega_1 \mathrm{r}_0$$

setzen, indem wir mit ω_1 die noch unbekannte Drehgeschwindigkeit der Drehung um a_1 bezeichnen, welche die erste Komponente der gegebenen Bewegung bilden soll. Die Koordinaten der die zweite Komponente bildenden Drehung werden dann:

$$(17) \quad \begin{cases} \mathrm{u}_2 = \mathrm{u} - \omega_1 \mathrm{u}_0, & \mathrm{v}_2 = \mathrm{v} - \omega_1 \mathrm{v}_0, \quad \mathrm{w}_2 = \mathrm{w} - \omega_1 \mathrm{w}_0, \\ \mathrm{p}_2 = \mathrm{p} - \omega_1 \mathrm{p}_0, & \mathrm{q}_2 = \mathrm{q} - \omega_1 \mathrm{q}_0, \quad \mathrm{r}_2 = \mathrm{r} - \omega_1 \mathrm{r}_0. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte ein in die Gleichung:

$$(15) \quad \mathrm{u\,p} + \mathrm{v\,q} + \mathrm{w\,r} = \mathrm{u}_1 \mathrm{p}_2 + \mathrm{v}_1 \mathrm{q}_2 + \mathrm{w}_1 \mathrm{r}_2 + \mathrm{p}_1 \mathrm{u}_2 + \mathrm{q}_1 \mathrm{v}_2 + \mathrm{r}_1 \mathrm{w}_2,$$

so wird sie:

$$(18) \quad \mathrm{u\,p} + \mathrm{v\,q} + \mathrm{w\,r} = \omega_1 (\mathrm{u\,p}_0 + \mathrm{v\,q}_0 + \mathrm{w\,r}_0 + \mathrm{p\,u}_0 + \mathrm{q\,v}_0 + \mathrm{r\,w}_0).$$

Hieraus bestimmt sich ω_1, und wenn dieses bekannt ist, berechnen sich aus den Gleichungen (17) die Koordinaten der zweiten Drehung. Die Gleichung (18) gestattet aber noch eine besondere Ausdeutung. Bezeichnet man mit x_0, y_0, z_0 die Koordinaten eines Punktes der Achse a_1, so ist:

$$\mathrm{u}_0 = \mathrm{r}_0 y_0 - \mathrm{q}_0 z_0, \quad \mathrm{v}_0 = \mathrm{p}_0 z_0 - \mathrm{r}_0 x_0, \quad \mathrm{w}_0 = \mathrm{q}_0 x_0 - \mathrm{p}_0 y_0,$$

und es werden die Komponenten der Geschwindigkeit dieses Punktes nach den Koordinatenachsen:

$$\dot{x}_0 = \mathrm{u} - \mathrm{r}\, y_0 + \mathrm{q}\, z_0, \quad \dot{y}_0 = \mathrm{v} - \mathrm{p}\, z_0 + \mathrm{r}\, x_0, \quad \dot{z}_0 = \mathrm{w} - \mathrm{q}\, x_0 + \mathrm{p}\, y_0.$$

Für die Komponente der Bewegung nach der Achse a_1 selbst finden wir:

$$\tau_1 = \dot{x}_0 \mathrm{p}_0 + \dot{y}_0 \mathrm{q}_0 + \dot{z}_0 \mathrm{r}_0$$

oder ausgerechnet:

$$\tau_1 = \mathrm{u\,p}_0 + \mathrm{v\,q}_0 + \mathrm{w\,r}_0 + \mathrm{p\,u}_0 + \mathrm{q\,v}_0 + \mathrm{r\,w}_0.$$

Der Wert dieser Komponente ist also für alle Punkte von a_1 derselbe und kann füglich als die Verschiebung der Achse in sich bezeichnet werden, während die Drehung um die Achse a_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 anzusehen ist als die Drehung um die Achse, die in der vorgelegten momentanen Bewegung enthalten. Durch Einführung von τ_1 geht aber die Gleichung (18) über in die einfache Form:

$$(18\mathrm{a}) \qquad \mathrm{u\,p} + \mathrm{v\,q} + \mathrm{w\,r} = \omega_1 \tau_1,$$

und es ergibt sich der von Chasles gefundene Satz: Bei jeder momentanen Bewegung ist das Produkt aus der Größe der Verschiebung in einer beliebigen Achse a_1 und der Größe der Drehung um diese Achse konstant und gleich dem Moment der momentanen Bewegung.

Die Bestimmung von ω_1 wird nur dann illusorisch, wenn die gegebene Drehachse derartig gewählt ist, daß:

$$\mathrm{u}\mathrm{p}_0 + \mathrm{v}\mathrm{q}_0 + \mathrm{w}\mathrm{r}_0 + \mathrm{p}\mathrm{u}_0 + \mathrm{q}\mathrm{v}_0 + \mathrm{r}\mathrm{w}_0 = 0 \tag{19}$$

wird. Diese besondere Lage der Drehachse wollen wir dadurch ausdrücken, daß wir sagen, sie bildet eine Nullinie der Bewegung.

Eine Parallelverschiebung oder Translation läßt sich ansehen als eine Drehung, deren Achse in unendlicher Entfernung liegt. Aus dem gefundenen Satze, daß eine momentane Bewegung sich aus einer Drehung um eine gegebene Achse und einer dadurch eindeutig bestimmten zweiten Drehung zusammensetzen läßt, würde also als ein bloßes Korollar der weitere Satz folgen: Jede Bewegung läßt sich zusammensetzen aus einer Translation, deren Richtung gegeben ist, und einer dadurch eindeutig bestimmten Rotation. Wir wollen diesen Satz aber auch direkt beweisen. Die momentane Bewegung denken wir uns durch die allgemeinen Gleichungen (11) gegeben. Die vorgelegte Richtung der Translation sei durch die Winkel λ, μ, ν gegeben, die sie mit den positiven Koordinatenrichtungen einschließt. Ihre Geschwindigkeit sei mit ϑ bezeichnet. Die Komponenten der Geschwindigkeit werden dann:

$$\vartheta \cos\lambda, \quad \vartheta\cos\mu, \quad \vartheta\cos\nu.$$

Fügen wir hierzu eine Drehung mit den Koordinaten:

$$\mathrm{u}', \quad \mathrm{v}', \quad \mathrm{w}', \quad \mathrm{p}', \quad \mathrm{q}', \quad \mathrm{r}',$$

so werden die Komponenten der resultierenden Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\mathrm{u}' + \vartheta\cos\lambda) - \mathrm{r}'y + \mathrm{q}'z,\\ \dot{y} &= (\mathrm{v}' + \vartheta\cos\mu) - \mathrm{p}'z + \mathrm{r}'x,\\ \dot{z} &= (\mathrm{w}' + \vartheta\cos\nu) - \mathrm{q}'x + \mathrm{p}'y.\end{aligned}$$

Sollen diese Gleichungen mit den Gleichungen (11) identisch sein, so folgt hieraus zunächst, daß:

$$\mathrm{p}' = \mathrm{p}, \quad \mathrm{q}' = \mathrm{q}, \quad \mathrm{r}' = \mathrm{r}$$

wird. Die Achse der Drehung hat also stets ein und dieselbe bestimmte Richtung. Ferner wird:

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}' + \vartheta\cos\lambda, \quad \mathrm{v} = \mathrm{v}' + \vartheta\cos\mu, \quad \mathrm{w} = \mathrm{w}' + \vartheta\cos\nu,$$

und da:

$$\mathrm{u}'\mathrm{p}' + \mathrm{v}'\mathrm{q}' + \mathrm{w}'\mathrm{r}' = 0$$

sein muß, ergibt sich hieraus zur Bestimmung von ϑ die Gleichung:

$$(\mathrm{u} - \vartheta\cos\lambda)\,\mathrm{p} + (\mathrm{v} - \vartheta\cos\mu)\,\mathrm{q} + (\mathrm{w} - \vartheta\cos\nu)\,\mathrm{r} = 0$$

oder aufgelöst:

$$(20) \qquad \vartheta = \frac{p\,u + q\,v + r\,w}{p \cos\lambda + q \cos\mu + r \cos\nu}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist das Moment der Bewegung, der Nenner die Projektion einer auf der Rotationsachse abgetragenen Strecke, die gleich der Rotationsgeschwindigkeit ist, auf die Richtung der Translation. Ist aber ϑ gefunden, so sind auch u', v', w' eindeutig bestimmt, da:

$$(21) \qquad u' = u - \vartheta \cos\lambda, \quad v' = v - \vartheta \cos\mu, \quad w' = w - \vartheta \cos\nu$$

wird. Hiermit ist der Satz, dem diese Betrachtung galt, bewiesen. Die Formeln versagen nur, wenn $\vartheta = \infty$ wird, und dies ist der Fall, wenn:

$$(22) \qquad p \cos\lambda + q \cos\mu + r \cos\nu = 0$$

wird, also die Richtung der Translation normal zu der Richtung der Rotationsachse ist. Auf diesen Fall läßt sich somit die in Rede stehende Reduktion nicht ausdehnen.

Es liegt nun der Gedanke nahe, insbesondere den Fall zu betrachten, wo die Richtung der Translation dieselbe ist wie die Richtung der Rotationsachse. Führen wir in diesem Falle die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

der Rotation ein, so wird:

$$\cos\lambda = \frac{p}{\omega}, \quad \cos\mu = \frac{q}{\omega}, \quad \cos\nu = \frac{r}{\omega}$$

und somit:

$$(20\,a) \qquad \vartheta = \frac{u\,p + q\,v + r\,w}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Dann ergibt sich gemäß (21) weiter:

$$(21\,a) \qquad u' = u - k\,p, \quad v' = v - k\,q, \quad w' = w - k\,r,$$

indem wir setzen:

$$(23) \qquad k = \frac{\vartheta}{\omega} = \frac{u\,p + q\,v + r\,w}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Wir finden so, wieder als Korollar des letzten Satzes, den folgenden Satz: Jede momentane Bewegung, die nicht selbst eine Rotation oder Translation ist, läßt sich auf eine einzige Weise zusammensetzen aus einer Rotation und einer Translation, welche der Achse der Rotation parallel gerichtet ist.

Für eine solche Bewegung, welche aus einer Drehung um eine Achse und einer gleichzeitigen Gleitung längs dieser Achse besteht, gibt es aber ein einfaches Wort: wir nennen sie eine Schraubenbewegung oder Schraubung, und der letzte Satz läßt sich somit viel einfacher formulieren: Jede momentane Bewegung ist eine

Schraubung.[1]) Bei einer Fortsetzung der zunächst nur für eine unendlich kurze Zeit gefundenen Schraubung durch eine endliche Zeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit würden alle Punkte Schraubenlinien mit derselben Achse und derselben Ganghöhe beschreiben. Die Ganghöhe ergibt sich als die Größe der Translation, die einer vollen Umdrehung entspricht, also in der Umdrehungszeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ der Rotation erfolgt. Da die Größe der Translation in der Zeit T den Betrag $\vartheta\, T$ hat, so ergibt sich nach der Formel für k die Ganghöhe:

$$g = \vartheta\, T = k\,\omega\, T = 2\pi k. \tag{24}$$

Die Zahl k, deren Angabe so die Ganghöhe der Schraubenbewegung bestimmt, wollen wir den Schraubenparameter nennen. Derselbe ist nach der für ihn gegebenen Formel gleich dem Verhältnisse der Translationsgeschwindigkeit längs der Schraubenachse zu der Rotationsgeschwindigkeit um diese Achse oder gleich dem Momente der Bewegung dividiert durch das Quadrat der mit dieser Bewegung verknüpften Rotationsgeschwindigkeit.[2])

Siebentes Kapitel.

Kräfte und Dynamen.

Die momentanen Drehungen, von denen wir im vorigen Kapitel ausgegangen sind, bilden eine kinematische Ausdeutung und Verwertung der rotatorischen Liniengrößen. Wir suchen nun eine ähnliche Anwendung der translatorischen Liniengrößen, um die dualistische Vollständigkeit wieder zu erreichen. Wir gelangen hierzu auf einem anscheinenden Umwege, der uns zunächst auf neue, über die bisher behandelten Größen hinausgehende Begriffe, schließ-

1) Diesen Satz gab zuerst G. Mozzi in einer kleinen Schrift: Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi, Napoli 1763. Der Beweis Mozzis ist aber nicht richtig. Mit ausreichender Begründung veröffentlichte A. Cauchy denselben Satz, ohne Mozzis Arbeit zu kennen, in seinen Exercices de mathématiques 2, Paris 1827, p. 87, Œuvres (2) 7, Paris 1889, p. 94.

2) Die vorstehend nur in einigen Hauptsätzen gestreifte geometrische Kinematik ist, wesentlich im Anschluß an Chasles' Arbeit, in Frankreich zu einer umfangreichen Disziplin ausgebildet worden, die man aus den folgenden Lehrbüchern kennen lernen kann: H. Résal, Traité de cinématique pure, 1862; A. Mannheim, Principes et développements de géométrie cinématique, 1894; G. Königs, Leçons de cinématique, 1897. Der methodische Charakter dieses Wissenszweiges, insbesondere die Beziehung zur synthetischen Geometrie, tritt ungemein klar hervor in dem Werke von A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886.

lich aber ungefähr zu dem alten Standpunkte zurückführt, so daß wenig gewonnen scheint. Es ist aber durch das Bedürfnis einer prinzipiellen Klärung gerechtfertigt, diesen Weg einzuschlagen, da, wenn wir ihn nicht gehen, die Unterscheidung der geometrischen und physikalischen Betrachtung sich verwischt.

Dadurch, daß man von Bewegung spricht, betritt man bereits das physikalische Gebiet, denn die Untersuchung der Bewegung ist Aufgabe der Physik. Die Kinematik, die für das vorige Kapitel allein in Betracht kam, entfernt sich aber insofern trotzdem nicht von dem Gegenstande der Geometrie, als sie auf die Natur des Bewegten in keiner Weise eingeht, sondern allein voraussetzt, daß sich die jedesmalige Lage an gewissen Merkmalen erkennen lasse, genau wie wir in der Geometrie auch mit Merkmalen der Lage operieren.

Wenn wir die Dimensionen eines in Bewegung befindlichen starren Körpers als verschwindend gering voraussetzen, so ist bei einer Zerlegung der Bewegung in eine Translation und eine Rotation um einen Punkt des Körpers der letztere Bestandteil zu vernachlässigen, und da gleichzeitig dann zur Charakterisierung des Körpers nur die Angabe der Stelle im Raume, an der er sich gerade befindet, erforderlich ist, stimmt diese Bewegung völlig mit der in der Geometrie häufig benutzten Bewegung eines mathematischen Punktes, durch die man eine Kurve erzeugt, überein.

Anders aber liegt der Fall, wenn man nicht von dem Träger der Bewegung völlig abstrahiert, vielmehr mit dem Begriffe der Bewegung den Begriff einer Substanz verbindet, die bei der Bewegung erhalten bleibt. Dies bedeutet eine quantitative Bestimmung der Bewegung, die zu der kinematischen Festlegung nach den in bestimmten Zeiten zurückgelegten Wegstrecken hinzukommt und die in der Newtonschen Bezeichnung durch das Wort Masse wohlbekannt ist. Bei dieser Auffassung ist der Vektor, der die Geschwindigkeit eines punktförmigen Körpers der Größe und Richtung nach darstellt, nicht mehr allein hinreichend, um die momentane Bewegung des Körpers zu charakterisieren, es ist außerdem eine Bestimmung nötig, die von dem bewegten Körper hergenommen ist. Der Geschwindigkeitsvektor tritt so in einer anderen Bedeutung auf, nicht mehr selbständig, sondern an einen materiellen Träger gebunden, und die Masse dieses materiellen Trägers tritt als Maß des Vektors zu der Größe der Geschwindigkeit hinzu, so daß wir jetzt als die Bestimmung der Größe des Vektors das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit zu verstehen haben. Ohne nun die Betrachtung auf einen solchen speziellen Vektor zu beschränken, wollen wir allgemein den Begriff eines Vektors einführen, der an einen materiellen Träger von verschwindenden Dimensionen geknüpft ist, und einen solchen Vektor mit einem kurzen Worte als eine Kraft bezeichnen. Wir geben damit diesem Worte die allgemeinste Bedeutung, die es in physikalischem Sinne bei der Beschränkung auf die kleinsten Teile der Materie erhalten hat, indem wir ihn als eine Affektion eines solchen verschwindend kleinen Körpers hinstellen, die ihren mathematischen Ausdruck in der Angabe einer Größe und einer Richtung findet.

Wir setzen nun diesen dynamischen Begriff sofort in Beziehung zu dem kinematischen Begriff, welcher die momentane Bewegung eines punktförmigen Körpers festlegt, nämlich dem Geschwindigkeits- oder Translationsvektor. Dies geschieht durch den Begriff der Arbeit. Hierunter wollen wir das innere Produkt $\mathfrak{f} \times \mathfrak{v}$ aus dem Kraftvektor $\mathfrak{f}$ und dem Translationsvektor $\mathfrak{v}$ verstehen. Es ist also die Arbeit einer Kraft $\mathfrak{f}$, die an einem punktförmigen Körper angreift oder, wie wir auch sagen, auf diesen Körper wirkt, bei einer Translation $\mathfrak{v}$ des Körpers das Produkt aus der Größe der Kraft, der Größe der Verschiebung und dem Kosinus des Winkels, den ihre Richtungen einschließen. Ist f die Größe der Kraft, vdt die Größe der Verschiebung, indem man sie sich in der sehr kurzen Zeit dt erfolgend denkt, so wird die Arbeit

$$(1) \qquad dW = fv \cos(f, v)\, dt,$$

und den Differentialquotienten $\frac{dW}{dt}$ wollen wir dann als die Arbeitsleistung, d. h. die auf die Zeiteinheit verrechnete Arbeit, bezeichnen. Das Wort Arbeit hat in der angegebenen Bedeutung zuerst Coriolis eingeführt, nachdem der Begriff schon längere Zeit unter anderen Bezeichnungen bekannt gewesen war.[1])

Mehrere punktförmige Körper denken wir uns nun zu einem materiellen System verbunden, dann ist die Arbeit einer Reihe von Kräften, welche auf die einzelnen punktförmigen Körper oder „Massenpunkte“ wirken, definiert als die Summe der Arbeiten aller einzelnen Kräfte bei den Verschiebungen ihrer Angriffspunkte, die aus einer Ortsänderung des ganzen materiellen Systems folgen.

Wir denken uns in den folgenden Betrachtungen das materielle System als starres System, d. h. wir nehmen an, bei einer jeden Bewegung des Systems sollen die gegenseitigen Entfernungen seiner Massenpunkte unverändert bleiben. Dann sind die Komponenten der Verschiebung, die einer dieser Punkte in der sehr kurzen Zeit δt erfährt, von derselben Form wie die für die Verschiebung eines

1) Du calcul de l'effet des machines, 1829. Gelegentlich wurde das Wort gebraucht von Navier in den Notes sur l'Architecture hydraulique de Bélidor 1819 und von Prony im Mémoire sur les Expériences de la machine du Gros-Caillou. Derselbe Begriff wurde bezeichnet von Smeaton als mechanische Kraft, von Carnot (Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement) als moment d'activité, von Monge und Hachette als effet dynamique, von Coulomb (sur la force des hommes) als quantité d'action.

Punktes im starren Körper gefundenen Ausdrücke. Bezeichnen wir also mit x_ϱ, y_ϱ, z_ϱ die Koordinaten des ϱ^{ten} Massenpunktes in dem starren Systeme, so können wir die Komponenten seiner Verschiebung in der Form ansetzen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \delta x_\varrho = (\mathrm{u} - \mathrm{r}\, y_\varrho + \mathrm{q}\, z_\varrho)\,\delta t, \\ \delta y_\varrho = (\mathrm{v} - \mathrm{p}\, z_\varrho + \mathrm{r}\, x_\varrho)\,\delta t, \\ \delta z_\varrho = (\mathrm{w} - \mathrm{q}\, x_\varrho + \mathrm{p}\, y_\varrho)\,\delta t. \end{cases}$$

Sind nun X_ϱ, Y_ϱ, Z_ϱ die Komponenten des Kraftvektors, der an diesem Massenpunkte angreift, so ist nach der Definition des Arbeitsbegriffes die Arbeit dieser Kraft bei der Verschiebung des Massenpunktes durch den Ausdruck gegeben:

$$(3)\qquad \delta W_\varrho = \mathrm{X}_\varrho\,\delta x_\varrho + \mathrm{Y}_\varrho\,\delta y_\varrho + \mathrm{Z}_\varrho\,\delta z_\varrho,$$

und die Arbeit für das ganze System wird dann:

$$(4)\qquad \delta W = \sum \delta W_\varrho = \sum (\mathrm{X}_\varrho\,\delta x_\varrho + \mathrm{Y}_\varrho\,\delta y_\varrho + \mathrm{Z}_\varrho\,\delta z_\varrho),$$

die Summation über alle Massenpunkte des Systems erstreckt.

Setzen wir hierin aber die obigen Ausdrücke für die Verschiebungskomponenten ein, so ergibt sich für die Arbeit:

$$(5)\qquad \delta W = \sum \{\mathrm{X}_\varrho \mathrm{u} + \mathrm{Y}_\varrho \mathrm{v} + \mathrm{Z}_\varrho \mathrm{w} + \mathrm{L}_\varrho \mathrm{p} + \mathrm{M}_\varrho \mathrm{q} + \mathrm{N}_\varrho \mathrm{r}\}\,\delta t,$$

wenn wir setzen:

$$(6)\qquad \mathrm{L}_\varrho = \mathrm{Z}_\varrho y_\varrho - \mathrm{Y}_\varrho z_\varrho, \quad \mathrm{M}_\varrho = \mathrm{X}_\varrho z_\varrho - \mathrm{Z}_\varrho x_\varrho, \quad \mathrm{N}_\varrho = \mathrm{Y}_\varrho x_\varrho - \mathrm{X}_\varrho y_\varrho,$$

und weiter können wir den Ausdruck für die Arbeit auf die noch einfachere Form bringen:

$$(7)\qquad \delta W = \{\mathrm{X}\,\mathrm{u} + \mathrm{Y}\,\mathrm{v} + \mathrm{Z}\,\mathrm{w} + \mathrm{L}\,\mathrm{p} + \mathrm{M}\,\mathrm{q} + \mathrm{N}\,\mathrm{r}\}\,\delta t,$$ [1]

indem wir die Bezeichnungen anwenden:

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \sum \mathrm{X}_\varrho, \quad \mathrm{Y} = \sum \mathrm{Y}_\varrho, \quad \mathrm{Z} = \sum \mathrm{Z}_\varrho, \\ \mathrm{L} = \sum \mathrm{L}_\varrho, \quad \mathrm{M} = \sum \mathrm{M}_\varrho, \quad \mathrm{N} = \sum \mathrm{N}_\varrho. \end{cases}$$

Die benutzte Bezeichnungsweise rührt von Poinsot[2]) her, die Bedeutung der so dargestellten Ausdrücke hat aber schon Lagrange[3]) klar hervorgehoben.

Wenn nun verschiedene Kräftesysteme vorliegen, so können wir uns die materiellen Systeme, auf die sie wirken, falls dieselben

1) Moebius, Lehrb. d. Statik 1, § 181; F. Klein, Math. Ann. Bd. 4, p. 403.
2) Éléments de Statique, 1804.
3) Mécanique analytique, 1788, 1. partie, Section V, Œuvres, Tome XI.

nicht von vornherein identisch sind, miteinander in starre Verbindung gebracht denken, so daß bei allen in Betracht gezogenen Bewegungen nicht bloß die Abstände der Punkte eines und desselben materiellen Systems voneinander, sondern auch die gegenseitigen Abstände der Punkte verschiedener Systeme ungeändert bleiben. In diesem Sinne sollen künftig überall die Kräftesysteme verstanden werden, und da sonach ihre Angriffspunkte wie die Punkte eines einzigen unbegrenzt großen starren Körpers auftreten, so kommen wir damit anscheinend zu dem im vorigen Kapitel zugrunde gelegten Begriffe eines wie ein starrer Körper beweglich gedachten Raumes zurück. Diese Anknüpfung der Kräfte an den geometrischen Raum ist jedoch nur in formaler Hinsicht erlaubt. In Wirklichkeit erfordert der Kraftbegriff eine andere Auffassung, man muß die Kräfte an einen bestimmten Raumteil knüpfen, der dadurch eben, daß man ihn als Träger von Kräften vorstellt, materiellen Charakter bekommt.

Wollte man in diesen Worten den Ausdruck einer metaphysischen Doktrin, die unter der Bezeichnung als dynamische Theorie der Materie bekannt ist, wiedererkennen, so wäre dies nicht richtig. Denn von dem Standpunkte dieses Buches aus ist die Kraft nicht ein metaphysischer Begriff, sondern eine mathematische Konstruktion, die zum Zweck der Darstellung physikalischer Erscheinungen eingeführt wird. In diesem Sinne allein hat es seine Berechtigung von einer Geometrie der Kräfte zu sprechen, indem wir die geometrische Seite des eingeführten mathematischen Kraftbegriffes zu erforschen suchen. Insofern aber der Kraftbegriff die Beschreibung physikalischer Erscheinungen zum Zweck hat, darf man den Angriffspunkt der Kraft nicht als einen mathematischen Punkt denken, sondern der Träger der Kraft hat physikalischen Charakter, er hat die Eigenschaft des Erfahrungsmäßigen oder, wenn man will, Tatsächlichen als etwas einmal und unabänderlich Gegebenen. Dies hat auch dazu geführt, den von ponderabler Materie leeren Raum als Äther zu bezeichnen, sobald man ihn als Träger von Kräften ansieht, auch wenn alle ihm zugeschriebenen Eigenschaften auf mathematische Konstruktionen hinauslaufen. Wollte man den Namen Äther vermeiden, so würde doch der physikalische Raum, weil wir seine mathematische Charakterisierung in jedem Augenblick durch die sinnenfälligen Erscheinungen als gegeben ansehen müssen, von dem geometrischen Raume, in dem wir nach Belieben und Willkür konstruieren können, verschieden sein, und diese Verschiedenheit meinen wir, wenn wir dem Träger der Kräfte materiellen Charakter zuschreiben. Diese Auffassung muß um so schärfer betont werden, als die folgenden geometrischen Entwicklungen ihr leicht zu widersprechen scheinen könnten. Für diese könnte man voraussetzen, daß alle Kräfte an geometrischen Punkten, die nur mit Beibehaltung ihrer gegenseitigen Entfernungen verändert werden, angreifen. Eine solche Veränderung ist es, die wir als Bewegung bezeichnen.

Wir nennen unter dieser Voraussetzung zwei Kräftesysteme statisch äquivalent, wenn sie bei allen möglichen Bewegungen dieselbe Arbeit leisten. Der für die Arbeit abgeleitete Ausdruck (7) läßt dann erkennen, daß zwei Kräftesysteme statisch äquivalent sind, wenn die durch die Formeln (8) eingeführten Summenausdrücke für beide übereinstimmen. Diese sechs Größen wollen wir die statischen Koordinaten der Kräftesysteme nennen. Wenn sie alle verschwinden, so sagen wir, das Kräftesystem sei im statischen Gleichgewicht.

Es ist sofort zu sehen, daß, wenn ein Kräftesystem aus Teilsystemen zusammengesetzt ist, seine statischen Koordinaten durch Addition der entsprechenden Koordinaten der Teilsysteme entstehen, ferner, daß, wenn man die Richtungen aller Kräfte eines Systems umkehrt, ohne ihre Größe zu ändern, die sechs statischen Koordinaten einfach ihr Vorzeichen wechseln. Wir nennen das so hervorgehende Kräftesystem die Umkehrung des ursprünglichen. Dann können wir sagen: Zwei Kräftesysteme sind statisch äquivalent, wenn das eine mit der Umkehrung des anderen zusammen ein System bildet, das im statischen Gleichgewichte ist.

Wir wollen nun zeigen, daß ein Kräftesystem in ein statisch äquivalentes Kräftesystem übergeht, wenn man die Angriffspunkte sich in der Richtung der in ihnen wirkenden Kräfte beliebig verschoben denkt. Es treten dann an die Stelle der Koordinaten x_ϱ, y_ϱ, z_ϱ des ϱ^{ten} Angriffspunktes die Werte:

$$x_\varrho + \lambda_\varrho X_\varrho, \quad y_\varrho + \lambda_\varrho Y_\varrho, \quad z_\varrho + \lambda_\varrho Z_\varrho,$$

wobei die λ_ϱ beliebig bleiben. Man sieht nun sofort, daß hierdurch nicht bloß die Koordinaten X_ϱ, Y_ϱ, Z_ϱ, sondern auch L_ϱ, M_ϱ, N_ϱ keine Änderung erfahren. In der Tat ist ja z. B.:

$$Z_\varrho (y_\varrho + \lambda_\varrho Y_\varrho) - Y_\varrho (z_\varrho + \lambda_\varrho Z_\varrho) = Z_\varrho y_\varrho - Y_\varrho z_\varrho = L_\varrho$$

unabhängig von dem Werte des λ_ϱ.

Stellt man die Kraftvektoren durch Strecken dar, deren Endpunkte die Koordinaten x_ϱ', y_ϱ', z_ϱ' haben mögen, so wird:

$$X_\varrho = x_\varrho' - x_\varrho, \quad Y_\varrho = y_\varrho' - y_\varrho, \quad Z_\varrho = z_\varrho' - z_\varrho,$$

außerdem (vgl. Formel (7) im 4. Kap.):

$$L_\varrho = y_\varrho z_\varrho' - z_\varrho y_\varrho' \quad M_\varrho = z_\varrho x_\varrho' - x_\varrho z_\varrho', \quad N_\varrho = x_\varrho y_\varrho' - y_\varrho x_\varrho'.$$

Die sechs statischen Koordinaten einer Kraft sind also keine anderen als die im vierten Kapitel eingeführten Koordinaten einer translatorischen Liniengröße. Damit sind wir in der Tat zu dem Begriffe dieser Liniengrößen zurückgelangt. Die Kräfte sind von diesen darin verschieden, daß sie nicht von vornherein eine Verschiebung ihres Angriffspunktes in der Kraftrichtung gestatten. Nur in Hinsicht auf ihre statische Äquivalenz ist eine solche Verschiebung erlaubt, und in dieser Beziehung können sie daher als den translatorischen Liniengrößen gleichwertig angesehen werden.

Dies wird von besonderer Bedeutung dadurch, daß wir bei einer solchen Anknüpfung der Kräfte an die Liniengrößen die sechs statischen Koordinaten eines Kräftesystems in einem einzigen Ausdrucke vereinigen können. Die Liniengröße war nämlich durch einen analytischen Ausdruck gegeben, den wir für den vorliegenden Zweck schreiben:

$$\mathfrak{f}_\varrho = X_\varrho[\mathbf{0\,i}] + Y_\varrho[\mathbf{0\,j}] + Z_\varrho[\mathbf{0\,k}] + L_\varrho[\mathbf{j\,k}] + M_\varrho[\mathbf{k\,i}] + N_\varrho[\mathbf{i\,j}].$$

Nehmen wir nun die Summe über alle so entsprechend den Kräften eines Kräftesystems gebildeten Ausdrücke, so erhalten wir eine Summe von Liniengrößen, die wir darstellen können wie folgt:

$$(9)\qquad \Sigma\mathfrak{f}_\varrho = X[\mathbf{0\,i}] + Y[\mathbf{0\,j}] + Z[\mathbf{0\,k}] + L[\mathbf{j\,k}] + M[\mathbf{k\,i}] + N[\mathbf{i\,j}],$$

wenn X, Y, Z, L, M, N die durch (8) definierten statischen Koordinaten des Kräftesystems sind. Einen solchen Ausdruck wie den vorstehenden wollen wir eine Dyname[1]) nennen, und wir können dann sagen: Kräftesysteme sind hinsichtlich ihrer statischen Äquivalenz Dynamen gleichwertig.

Die Zusammensetzung zweier Kräftesysteme zu einem einzigen ist gleichbedeutend mit der Addition der zugehörigen Dynamen zu einer einzigen. Sind zwei Kräftesysteme zusammengenommen im statischen Gleichgewicht, so ist die zum einen gehörende Dyname das Entgegengesetzte von der dem anderen entsprechenden Dyname, und die „Dyname Null" gehört zu den Kräftesystemen, die an sich im statischen Gleichgewichte sind.

Wir wollen nun den Begriff des Vektormomentes, den wir im vierten Kapitel für die translatorischen Liniengrößen aufgestellt haben und dessen Umdeutung auf rotatorische Liniengrößen im vorigen Kapitel den Ausgangspunkt bildete, auch auf Kräftesysteme auszudehnen suchen.[2]) Die Komponenten des Vektormomentes einer

---

1) Die Bezeichnung rührt von Pluecker her, Fundamental views regarding mechanics, Philos. Transactions 156, 1866, p. 361, Wiss. Abhdlgn. I, p. 548.

2) Der Begriff des Vektormomentes ist entwickelt worden von Cauchy, Sur les moments linéaires, Exercices de mathém. I, 1826, Œuvres (2) Tome 6, p. 89. Durch seine Komponenten definiert, spielt aber das Moment schon bei Prony eine große Rolle. Dieser sagt, daß es Laplace zuerst aufgestellt habe (Prony, Leçons de mécanique, Paris 1815, I, p. 200).

Kraft des Systems für den Punkt mit den Koordinaten x, y, z werden nach den Formeln (25) des vierten Kapitels:

$$\xi_\varrho = L_\varrho - Z_\varrho y + Y_\varrho z,$$
$$\eta_\varrho = M_\varrho - X_\varrho z + Z_\varrho x,$$
$$\zeta_\varrho = N_\varrho - Y_\varrho x + X_\varrho y.$$

Definiert man dann das Vektormoment eines Kräftesystems für einen Punkt als die Summe der Vektormomente aller einzelnen Kräfte des Systems für denselben Punkt, so erhält man aus den vorstehenden Formeln durch Summation über das Kräftesystem sofort die Komponenten des Gesamtmomentes:

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi = \Sigma\,\xi_\varrho = L - Zy + Yz, \\ \eta = \Sigma\,\eta_\varrho = M - Xz + Zx, \\ \zeta = \Sigma\,\zeta_\varrho = N - Yx + Xy. \end{cases}$$

Da dieser Flächenvektor immer an den Bezugspunkt geheftet ist, so kann man seine Ebene durch diesen Punkt gehen lassen und so völlig festlegen. Ihre Gleichung wird dann, wenn x', y', z' laufende Koordinaten bezeichnen:

$$(11) \qquad \xi(x'-x) + \eta(y'-y) + \zeta(z'-z) = 0$$

oder:

$$(11\text{a}) \qquad \xi x' + \eta y' + \zeta z' - \theta = 0,$$

indem wir noch:

$$(12) \qquad \theta = \xi x + \eta y + \zeta z = Lx + My + Nz$$

setzen.

Wir wollen weiter auch den Begriff des gegenseitigen Momentes zweier Liniengrößen auf die Kräftesysteme auszudehnen suchen.[1]) Für die eine dieser Liniengrößen wählen wir die durch eine Kraft des Systems gegebene, für die andere eine dem Bezugspunkte des Vektormomentes analoge Bezugslinie, d. h. eine Liniengröße von der Länge 1, die auf einer beliebig gegebenen geraden Linie des Raumes angenommen sei. Die Koordinaten dieser Liniengröße seien:

$$(13) \qquad \begin{array}{lll} \mathfrak{x} = x' - x, & \mathfrak{y} = y' - y, & \mathfrak{z} = z' - z, \\ \mathfrak{l} = yz' - zy', & \mathfrak{m} = zx' - xz', & \mathfrak{n} = xy' - yx', \end{array}$$

wobei $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1$ vorauszusetzen ist; das Moment der ϱ^{ten} Systemkraft für die so festgelegte Linie wird dann:

$$(14^0) \qquad \Theta_\varrho = L_\varrho \mathfrak{x} + M_\varrho \mathfrak{y} + N_\varrho \mathfrak{z} + X_\varrho \mathfrak{l} + Y_\varrho \mathfrak{m} + Z_\varrho \mathfrak{n},$$

und durch Summation über alle Kräfte erhält man das Moment des Systems:

$$(14) \qquad \Theta = \Sigma\Theta_\varrho = L\mathfrak{x} + M\mathfrak{y} + N\mathfrak{z} + X\mathfrak{l} + Y\mathfrak{m} + Z\mathfrak{n}.$$

1) Vgl. Moebius' Lehrbuch der Statik § 59, Werke Bd. 3, p. 84.

Die geometrische Bedeutung dieses Momentes folgt aus der geometrischen Definition des gegenseitigen Momentes zweier Liniengrößen. Dasselbe wird gegeben durch das sechsfache Volumen des Tetraeders, von welchem zwei die Liniengrößen repräsentierende Strecken ein Paar Gegenkanten bilden. Nach Formel (37a) des vierten Kapitels für dieses sechsfache Volumen erhalten wir im vorliegenden Falle, wenn die ϱ^{te} Kraft des Systems die Größe R_ϱ hat, während ihre Linie von der Bezugslinie den kürzesten Abstand d_ϱ hat und sie unter dem Winkel φ_ϱ kreuzt, für das in Rede stehende Moment den Ausdruck:

$$\Theta = \sum R_\varrho\, d_\varrho \sin \varphi_\varrho. \tag{15}$$

Zu beachten ist hierbei, daß der Bezugslinie ein bestimmter Richtungssinn zukommt, der durch den Sinn der in ihr angenommenen Liniengröße bestimmt ist. Die gemeinsame Normale der beiden Linien denke man sich mit dem Sinne behaftet, der von der Bezugslinie fortführt. Der Winkel φ_ϱ ist dann positiv zu rechnen, wenn die Kraftrichtung aus der Richtung der Bezugslinie durch eine Drehung um die gemeinsame Normale entgegen dem Uhrzeiger hervorgeht. Projiziert man nun die Kraft auf eine zur Bezugslinie senkrechte Ebene, so wird die Größe der Projektion $R_\varrho' = R_\varrho \sin\varphi_\varrho$, und ihre Richtung bedeutet einen positiven Drehsinn (entgegen dem Uhrzeiger) um die Bezugslinie, wenn R_ϱ' positiv ausfällt. Daraus folgt, daß das Gesamtmoment:

$$\Theta = \sum R_\varrho'\, d_\varrho \tag{15a}$$

einen positiven Drehsinn für den der Bezugslinie beigeschriebenen Richtungssinn involviert, wenn Θ positiv, und einen negativen Drehsinn, wenn Θ negativ ist. Hätte man der Bezugslinie von vornherein einen bestimmten Drehsinn beigelegt, in welchem Falle wir sie als eine Achse zu bezeichnen haben, dann hätten wir die Projektion jeder einzelnen Kraft auf eine zu der Achse senkrechte Ebene mit dem positiven oder negativen Vorzeichen zu nehmen gehabt, je nachdem sie mit dem Drehsinn der Achse übereinstimmt oder nicht, und hätten dann auch für das Gesamtmoment einen positiven oder negativen Wert gefunden, je nachdem es mit dem für die Achse angenommenen Drehsinn übereinstimmt oder nicht. Der Begriff des Momentes eines Kräftesystems für eine gerade Linie ist von Poinsot ausgeprägt worden.[1]) Auch die folgende Betrachtung geht wesentlich auf ihn zurück.

1) Mémoire sur la composition des moments et des aires, Journ. de l'École polytechnique, Cah. XIII, 1806, Mém. de l'Acad. VII, den späteren Auflagen der Éléments de Statique als Anhang beigegeben.

Wir wollen jetzt näher untersuchen, in welcher Abhängigkeit voneinander die Werte des Momentes stehen, die sich für die durch einen bestimmten Punkt P des Raumes gehenden Achsen ergeben. Wir setzen zu dem Zweck in den Ausdruck (14) die Werte (13) ein und sehen dabei die Koordinaten x', y', z' als veränderlich, die Koordinaten x, y, z als fest an. Dann können wir den sich ergebenden Ausdruck für Θ schreiben:

$$(16)\quad \Theta = (\mathrm{L} - \mathrm{Z}y + \mathrm{Y}z)x' + (\mathrm{M} - \mathrm{X}z + \mathrm{Z}x)y' + (\mathrm{N} - \mathrm{Y}x + \mathrm{X}y)z' \\ - (\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z),$$

oder einfacher, indem wir unter ξ, η, ζ, θ die durch (10) und (12) definierten Werte verstehen:

$$(16\mathrm{a})\qquad \Theta = \xi x' + \eta y' + \zeta z' - \theta,$$

wofür wir auch setzen können:

$$(16\mathrm{b})\qquad \Theta = \xi(x' - x) + \eta(y' - y) + \zeta(z' - z)$$

oder:

$$(16\mathrm{c})\qquad \Theta = \xi\mathfrak{x} + \eta\mathfrak{y} + \zeta\mathfrak{z}.$$ [1])

Aus diesem letzten Ausdrucke läßt sich ein einfaches geometrisches Bild für die Verteilung der Werte des Momentes auf die einzelnen durch den Punkt P gehenden Achsen ableiten. Wir deuten ξ, η, ζ als die Komponenten eines Linienvektors PQ, und ebenso $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, wobei wegen der den Gleichungen (13) hinzugefügten Bedingung $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1$ die Länge dieses letzteren Vektors $= 1$ wird. Θ ist das innere Produkt der beiden Vektoren, es wird mithin, wenn der Winkel zwischen beiden Vektoren χ genannt und

$$(17)\qquad \mathsf{M} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

gesetzt wird:

$$(18)\qquad \Theta = \mathsf{M} \cdot \cos\chi.$$

Tragen wir Θ jedesmal als Länge vom Punkte P aus auf der Achse, für die es gilt, ab, so erfüllen die Endpunkte dieser Strecken eine Kugel, von welcher der Vektor PQ, dessen Länge $= \mathsf{M}$ ist, einen Durchmesser bildet. Für die Linie dieses Vektors erhält das Moment des Kräftesystems unter allen Linien, die durch den Punkt P gehen, den größten Wert, nämlich M, und es wird 0 für alle Linien durch P, die zu diesem Vektor senkrecht sind. Der Linienvektor PQ ist aber selbst senkrecht zu der Ebene des Flächenvektors, welcher das Vektormoment des Kräftesystems für den Punkt P bildet. Für alle Linien durch P, die in dieser durch P gehenden Ebene liegen,

1) Diese Formel ist schon von Euler gefunden worden (Nova Acta Petropolitana VII, 1793).

ist das Moment also Null. Die Ebene heißt deswegen nach Moebius[1]) die Nullebene des Punktes P und die in ihr liegenden Linien, für die das Moment verschwindet, Nullinien des Kräftesystems. P selbst heißt der Nullpunkt seiner Nullebene. Die sich so ergebende Zuordnung der Punkte und Ebenen des Raumes, bei der jeder Punkt in seiner entsprechenden Ebene liegt, bezeichnet Moebius als Nullsystem. Durch die Einführung desselben hat Moebius die Poinsotsche Theorie des Momentes zu einer gewissen Vollendung gebracht. Dieselbe Punkt-Ebenenverwandtschaft ist aber schon vor Moebius von dem Italiener G. Giorgini,[2]) ebenfalls von der Poinsotschen Statik aus, gefunden worden. Die Gleichung der Nullebene des Punktes mit den Koordinaten x, y, z ist:

$$\xi x' + \eta y' + \zeta z' - \theta = 0,$$

wenn ξ, η, ζ, θ die durch (10) und (12) festgelegte Bedeutung haben. Schreiben wir die vorstehende Gleichung in der Form:

$$ux' + vy' + wz' = 1, \tag{19}$$

so haben wir zu setzen:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\mathrm{L} - \mathrm{Z}y + \mathrm{Y}z}{\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z}, \\ v &= \frac{\mathrm{M} - \mathrm{X}z + \mathrm{Z}x}{\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z}, \\ w &= \frac{\mathrm{N} - \mathrm{Y}x + \mathrm{X}y}{\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z}; \end{aligned}\right. \tag{20}$$

u, v, w sind dann die „Hesseschen Koordinaten“ der Nullebene, ausgedrückt durch die Koordinaten des Nullpunktes.[3])

Es ist aber noch nicht der direkte Nachweis dafür erbracht, daß umgekehrt die Linien, die in einer Ebene π liegen, und für die das Moment des Kräftesystems verschwindet, alle durch einen bestimmten Punkt, den Nullpunkt der Ebene, gehen. Dies soll jetzt gezeigt werden. Wir nehmen an, die durch den Ansatz (13) eingeführte Liniengröße sei in einer bestimmten Ebene enthalten, was sich durch die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} ux + vy + wz &= 1 \\ ux' + vy' + wz' &= 1 \end{aligned}$$

1) Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume, Crelles Journal f. Math. 10, 1833, p. 317, Werke Bd. 1, p. 489, und im Lehrb. d. Statik, Werke Bd. 3.

2) Modena, Mem. della Soc. Ital. detta dei Quaranta 20 (1828), p. 243; vgl. auch ebenda 21 (1836), p. 1.

3) Man vgl. Pluecker, Neue Geometrie des Raumes (1866) p. 33.

ausdrücken läßt, wenn u, v, w die nunmehr gegebenen Hesseschen Koordinaten der Ebene bedeuten. Aus diesen Gleichungen ergeben sich aber, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ die durch (13) festgelegte Bedeutung haben, die folgenden vier Gleichungen:

$$u\mathfrak{x} + v\mathfrak{y} + w\mathfrak{z} = 0,$$

$$\mathfrak{x} = w\mathfrak{m} - v\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{y} = u\mathfrak{n} - w\mathfrak{l}, \quad \mathfrak{z} = v\mathfrak{l} - u\mathfrak{m}.$$

Infolge der letzten drei Gleichungen wird jetzt der Ausdruck für das Moment:

$$\Theta = (\mathrm{X} + \mathrm{N}v - \mathrm{M}w)\mathfrak{l} + (\mathrm{Y} + \mathrm{L}w - \mathrm{N}u)\mathfrak{m} + (\mathrm{Z} + \mathrm{M}u - \mathrm{L}v)\mathfrak{n}.$$

Sind aber x, y, z die Koordinaten eines Punktes, der auf der Linie der Liniengröße liegt, so wird:

$$x\mathfrak{l} + y\mathfrak{m} + z\mathfrak{n} = 0,$$

und ist umgekehrt eine solche homogene lineare Gleichung zwischen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gegeben, so müssen die Koeffizienten den Koordinaten eines Punktes proportional sein, der auf der Linie der Liniengröße liegt. In der Tat sind diese Punkte durch die vorstehende Gleichung in Verbindung mit der Gleichung:

$$ux + vy + wz = 1$$

der Ebene, welcher die Liniengröße angehören soll, vollständig charakterisiert. Macht man also $\Theta = 0$, so hat man in der entstehenden Gleichung:

$$\begin{aligned} \mathrm{X} + \mathrm{N}v - \mathrm{M}w &= \varrho x, \\ \mathrm{Y} + \mathrm{L}w - \mathrm{N}u &= \varrho y, \\ \mathrm{Z} + \mathrm{M}u - \mathrm{L}v &= \varrho z \end{aligned}$$

zu setzen, dann bezeichnen x, y, z die Koordinaten des Punktes, durch den die Linien in der Ebene gehen müssen, damit für sie das Moment des Kräftesystems verschwindet. Um noch den Proportionalitätsfaktor ϱ zu bestimmen, hat man die vorstehenden Gleichungen mit u, v, w zu multiplizieren, die Summe muß dann nach der vorhergehenden Gleichung $= \varrho$ werden. So erhält man aber einfach:

$$\mathrm{X}u + \mathrm{Y}v + \mathrm{Z}w = \varrho$$

und damit endlich:

$$(21) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{X} + \mathrm{N}v - \mathrm{M}w}{\mathrm{X}u + \mathrm{Y}v + \mathrm{Z}w}, \\[2ex] y = \dfrac{\mathrm{Y} + \mathrm{L}w - \mathrm{N}u}{\mathrm{X}u + \mathrm{Y}v + \mathrm{Z}w}, \\[2ex] z = \dfrac{\mathrm{Z} + \mathrm{M}u - \mathrm{L}v}{\mathrm{X}u + \mathrm{Y}v + \mathrm{Z}w}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen[1]) sind in der Tat die Umkehrung der Gleichungen (20), sie drücken die Koordinaten des Nullpunktes durch die Koordinaten der zugehörigen Nullebene aus.

Wir hatten vorher die Verteilung der Werte des Momentes auf die Linien, die durch einen bestimmten Punkt gehen, untersucht. Dabei ergab sich, daß die Linien gleichen Momentes mit der Linie des größten Momentes, die senkrecht auf der Nullebene des Punktes steht, den gleichen Winkel χ bilden müssen, daß also die Linien gleichen Momentes eine Schar koaxialer Kreiskegel erfüllen, deren gemeinsame Achse die Linie des größten Momentes ist. Wollen wir jetzt in gleicher Weise auch die Verteilung der Werte des Momentes auf die Linien einer Ebene untersuchen, so ist es am einfachsten, diese Ebene mit einer der Grundebenen des Koordinatensystems, sagen wir der xy-Ebene, zusammenfallen zu lassen. Der Nullpunkt dieser Ebene hat, da jetzt $u=0$, $v=0$, $w=\infty$ wird, die Koordinaten:

$$x_0 = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Z}}, \quad y_0 = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{Z}}, \quad z_0 = 0.$$

Für die Koordinaten (13) einer Liniengröße, die dieser Ebene angehört, ergibt sich, da $z=0$, $z'=0$:

$$\mathfrak{x} = x' - x, \quad \mathfrak{y} = y' - y, \quad \mathfrak{z} = 0, \quad \mathfrak{l} = 0, \quad \mathfrak{m} = 0, \quad \mathfrak{n} = xy' - yx'.$$

Für das Moment des Kräftesystems erhalten wir also den Wert:

$$\Theta = \mathrm{L}(x' - x) + \mathrm{M}(y' - y) + \mathrm{Z}(xy' - yx').$$

Führen wir in diesen Ausdruck die Koordinaten des Nullpunktes ein, so wird er:

$$\begin{aligned}\Theta &= \mathrm{Z}\{y_0(x' - x) - x_0(y' - y) + (xy' - yx')\}\\ &= \mathrm{Z}\{(x - x_0)(y' - y) - (y - y_0)(x' - x)\}.\end{aligned}$$

Aus dieser Formel schließen wir sofort, daß Θ/Z gleich dem doppelten Inhalt des Dreiecks wird, das die Liniengröße als Basis mit dem Nullpunkte als Spitze bestimmt. Die Liniengröße ist aber mit der Länge 1 angenommen worden; nennen wir also r den Abstand ihrer Linie von dem Nullpunkte, so wird einfach:

$$\Theta = \mathrm{Z} \cdot r.$$

Hierin ist $\mathrm{Z} = \Sigma \mathrm{Z}_\varrho$ die Summe der Komponenten aller Kräfte des Systems nach der z-Achse, d. h. nach der zur Ebene normalen Richtung oder, wie wir kurz sagen wollen, die Normalkomponente des Kräftesystems für die Ebene. Ist die Ebene allgemein durch die Gleichung:

$$\cos\lambda\, x + \cos\mu\, y + \cos\nu\, z - p = 0$$

gegeben, so wird diese Normalkomponente:

1) Pluecker, Neue Geometrie des Raumes, p. 31.

$$(22) \qquad \mathsf{N} = X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu,$$

und das Moment des Kräftesystems für eine Linie der Ebene, die von deren Nullpunkt den Abstand r hat, wird dann allgemein:

$$(23) \qquad \Theta = \mathsf{N} \cdot r.$$

Diese Formel steht der Formel (18) für die durch einen Punkt gehenden Achsen dualistisch gegenüber. Das Moment des Kräftesystems für den Punkt ist ersetzt durch die Normalkomponente des Kräftesystems für die Ebene, der Sinus des Winkels, den die Bezugslinie mit der Nullebene des Punktes bildet, durch den Abstand der Bezugslinie von dem Nullpunkte der Ebene. Wie dort die Linien gleichen Momentes koaxiale Rotationskegel erfüllen, zu denen als ausgearteter Kegel die Nullebene des Punktes gehört, so umhüllen hier die Linien gleichen Momentes konzentrische Kreise, zu denen als ausgearteter Kreis der Nullpunkt der Ebene gehört.

Man kann aus dieser Analogie die Berechtigung herleiten, die Normalkomponente des Kräftesystems für eine Ebene[1]) als das Moment für diese Ebene zu bezeichnen und dem Momente für einen Punkt gegenüberzustellen. Das Moment für eine Ebene hängt dann zunächst nur von Größe und Richtung, nicht aber von den Angriffspunkten der Kräfte des Systems ab. Wir wollen indessen, um die Analogie zu vervollständigen, wie das Moment für einen Punkt (als Flächenvektor) an die Nullebene dieses Punktes geknüpft war, das Moment für eine Ebene an deren Nullpunkt knüpfen. Ein Flächenvektor, der an eine bestimmte Ebene geknüpft ist, bedeutet aber eine Ebenengröße, ein Zahlwert, der an einen Punkt geknüpft ist, eine Punktgröße. Wir können also mit Hineinziehung des Momentbegriffes das Nullsystem oder die Zuordnung von Nullpunkt und Nullebene so wenden, daß einem Punkte eine Ebenengröße, einer Ebene eine Punktgröße zugeordnet wird. Mit der dem Punkte zugeordneten Ebenengröße hatten wir von Anfang an zu tun gehabt, ihre Koordinaten sind die durch die Gleichungen (25) des vierten Kapitels gegebenen. Um auch die Koordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ der einer Ebene zugeordneten Punktgröße zu finden, gehen wir von der Gleichung der Ebene:

$$\xi x + \eta y + \zeta z - \theta = 0$$

aus, in der wir $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ voraussetzen, so daß ξ, η, ζ die Richtungskosinus der Normalen bedeuten. Dann erhalten wir, da der Zahlwert $\mathfrak{x}_0$ der Punktgröße gleich der Normalkomponente N für die Ebene sein soll, aus (22) sofort:

$$\mathfrak{x}_0 = X\xi + Y\eta + Z\zeta.$$

1) Diese Normalkomponente spielt schon eine Rolle in Monges Traité élémentaire de statique, Paris 1786.

Nehmen wir aber in den Formeln (21) für die Koordinaten des Nullpunktes einer Ebene:

$$x = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_0}, \quad y = \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_0}, \quad z = \frac{\mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_0} \quad \text{und} \quad u = \frac{\xi}{\theta}, \quad v = \frac{\eta}{\theta}, \quad w = \frac{\zeta}{\theta},$$

so ergeben sie für die Koordinaten der Punktgröße:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{x}_0\, \mathbf{0} + \mathfrak{x}_1\, \mathbf{i} + \mathfrak{x}_2\, \mathbf{j} + \mathfrak{x}_3\, \mathbf{k}$$

die Werte:

$$(24) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_0 = X\xi + Y\eta + Z\zeta, \\ \mathfrak{x}_1 = X\theta + N\eta - M\zeta, \\ \mathfrak{x}_2 = Y\theta + L\zeta - N\xi, \\ \mathfrak{x}_3 = Z\theta + M\xi - L\eta. \end{cases}$$

Diese Formeln korrespondieren genau den Formeln (39) des fünften Kapitels und stehen den Gleichungen für die Koordinaten der einem Punkte zugeordneten Ebenengröße:

$$\Pi = \xi\, I + \eta\, J + \zeta\, K + \theta\, \Omega,$$

nämlich [vgl. S. 47]:

$$(25) \qquad \begin{cases} \xi = L - Zy + Yz, \\ \eta = M - Xz + Zx, \\ \zeta = N - Yx + Xy, \\ \theta = Lx + My + Nz \end{cases}$$

als die dualistisch entsprechenden gegenüber. Nehmen wir die Zahlwerte M und N der Ebenengröße und der Punktgröße, die einem Punkte und seiner Nullebene zugeordnet sind, so ist leicht zu sehen, daß ihr Produkt gleich dem Werte:

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta,$$

oder, da:

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = XL + YM + ZN$$

ist, gleich dem „absoluten Momente“

$$(26) \qquad \mathfrak{M} = XL + YM + ZN$$

des Kräftesystems wird. Fassen wir nämlich zwei Vektoren mit den Komponenten ξ, η, ζ und X, Y, Z ins Auge, so wird die Länge des ersteren:

$$(27) \qquad \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \mathsf{M},$$

und er steht senkrecht auf der Nullebene des Punktes mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0. Der zweite Vektor ist die Resultante des Kräftesystems, nämlich der Vektor, der durch Addition der als einfache Vektoren aufgefaßten Kräfte des Systems entsteht. Projiziert man ihn auf den ersten Vektor, so wird die Projektion

$$X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu = \mathsf{N},$$

wenn λ, μ, ν die Winkel sind, welche die Normale der Nullebene mit den Koordinatenachsen bildet. Da dann aber:

$$\mathsf{M}\cos\lambda = \xi, \quad \mathsf{M}\cos\mu = \eta, \quad \mathsf{M}\cos\nu = \zeta$$

ist, so wird in der Tat:

$$\mathsf{MN} = X\xi + Y\eta + Z\zeta. \tag{27}$$

Da man das N für eine Ebene findet, indem man die Resultante des Kräftesystems auf die zu der Ebene normale Richtung projiziert, so ist sofort zu sehen, daß das Moment N des Kräftesystems den größten Wert für eine Ebene erreicht, die senkrecht zu der Richtung der Resultante gestellt ist, und für alle Ebenen verschwindet, die dieser Richtung parallel sind.

Für diese Ebenen wird die erste Koordinate $\mathfrak{x}_0$ der zugeordneten Punktgröße $= 0$, diese Punktgröße reduziert sich also auf einen Vektor:

$$\mathfrak{x}_1\mathbf{i} + \mathfrak{x}_2\mathbf{j} + \mathfrak{x}_3\mathbf{k}.$$

Da hierbei:

$$\xi\mathfrak{x}_1 + \eta\mathfrak{x}_2 + \zeta\mathfrak{x}_3 = 0$$

wird, ist dieser Vektor parallel zu der Ebene gerichtet. Es ist nur ein anderer Ausdruck für das eben Gesagte, wenn man von den in Rede stehenden Ebenen sagt, ihr Nullpunkt liege in unendlicher Entfernung, und die Richtung, in der er liegt, durch die Verhältnisse $\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3$ der Richtungskosinus fixiert.

Das absolute Moment $\mathfrak{M}$ eines Kräftesystems kann man in einfacher Weise geometrisch festlegen.

Nimmt man zunächst zwei Kräfte, denen das vorgelegte Kräftesystem statisch äquivalent ist, und nennt X_1, $Y_1, \ldots$, X_2, $Y_2 \ldots$ ihre Koordinaten, so wird:

$$X = X_1 + X_2, \quad Y = Y_1 + Y_2, \quad Z = Z_1 + Z_2,$$
$$L = L_1 + L_2, \quad M = M_1 + M_2, \quad N = N_1 + N_2,$$

und da:

$$X_1L_1 + Y_1M_1 + Z_1N_1 = 0, \quad X_2L_2 + Y_2M_2 + Z_2N_2 = 0$$

ist, wird:

$$\mathfrak{M} = XL + YM + ZN = X_1L_2 + Y_1M_2 + Z_1N_2 + L_1X_2 + M_1Y_2 + N_1Z_2.$$

Der letztere Ausdruck bedeutet aber nach dem, was wir früher gesehen haben, das mit einem bestimmten Vorzeichen genommene, sechsfache Volumen des Tetraeders, von dem die als bestimmte

Strecken dargestellten Kräfte zwei Gegenkanten bilden. So ergibt sich der von Chasles[1]) aufgestellte Satz: Wie auch ein allgemeines Kräftesystem auf zwei Einzelkräfte reduziert werden mag, immer hat das durch diese Kräfte als zwei Gegenkanten bestimmte Tetraeder dasselbe Volumen.

Nur wenn das Moment $\mathfrak{M}$ verschwindet, läßt sich das Kräftesystem auf eine Einzelkraft reduzieren. Dann reduziert sich die zugehörige Dyname auf eine Liniengröße, welche die resultierende Einzelkraft darstellt.

In dem besonderen Falle, wo $\mathfrak{M}$ dadurch verschwindet, daß X, Y, Z einzeln $= 0$ werden, ist dagegen das Kräftesystem keiner Einzelkraft statisch äquivalent. Die Koordinaten zweier Einzelkräfte, die zusammen dem Kräftesystem statisch äquivalent sind, müssen dann aber die Form haben:

$$\begin{array}{cccccc} X_0 & Y_0 & Z_0 & L_1 & M_1 & N_1, \\ -X_0 & -Y_0 & -Z_0 & L_2 & M_2 & N_2, \end{array}$$

wobei:

$$L_1 + L_2 = L, \quad M_1 + M_2 = M, \quad N_1 + N_2 = N$$

anzunehmen ist. Diese Kräfte sind an Größe gleich und an Richtung entgegengesetzt, sie bilden ein „Poinsotsches Kräftepaar". Die zugehörige Dyname reduziert sich in diesem Falle auf:

$$\varrho = L\mathfrak{i} + M\mathfrak{j} + N\mathfrak{k},$$

also auf einen Rotationsvektor, genau analog, wie eine Schraubung, wenn p, q, r $= 0$ sind, sich auf eine Translation oder, geometrisch gesprochen, einen Translationsvektor reduziert.

Haben die Angriffspunkte der Kräfte des Kräftepaares die Koordinaten x, y, z und x', y', z', so wird z. B.:

$$\begin{aligned} L = L_1 + L_2 &= (Z_0 y - Y_0 z) - (Z_0 y' - Y_0 z') \\ &= Z_0(y - y') - Y_0(z - z'). \end{aligned}$$

Führt man also die Vektoren ein:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_0 &= X_0 \mathbf{i} + Y_0 \mathbf{j} + Z_0 \mathbf{k}, \\ \mathbf{a} &= (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k}, \end{aligned}$$

von denen man den ersten als den Kraftvektor, den zweiten als den Arm des Kräftepaares bezeichnen kann, so wird:

$$\varrho = [\mathbf{a}\,\mathfrak{r}_0].$$

1) Mitgeteilt von Gergonne (Annales de math. vol. 18, p. 372, 1828). S. auch Bulletin des sciences mathém. 10, 1828, p. 187. Vgl. Moebius, Journ. f. Math. 4 (1829) p. 179, Werke III, p. 499.

Der Zahlwert:

$$F = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

dieses Rotations- oder Flächenvektors wird wohl das Moment des Kräftepaares genannt, er wird durch die Fläche des Parallelogramms gegeben, von dem die Kräfte des Paares zwei Gegenseiten bilden.

Ein beliebiges Kräftesystem läßt sich reduzieren auf eine Einzelkraft in Verbindung mit einem Kräftepaar. Der Angriffspunkt der Einzelkraft ist beliebig wählbar, ihre Komponenten sind immer die ersten drei statischen Koordinaten X, Y, Z des Kräftesystems. Sind x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Angriffspunktes dieser Einzelkraft, so werden die Komponenten des zugehörigen Kräftepaares:

$$L_0 = L - Zy_0 + Yz_0,$$

$$M_0 = M - Xz_0 + Zx_0,$$

$$N_0 = N - Yx_0 + Xy_0,$$

und der dasselbe repräsentierende Flächenvektor ist:

$$\varrho_0 = L_0 \mathfrak{i} + M_0 \mathfrak{j} + N_0 \mathfrak{k}.$$

Führen wir nun noch den Kraftvektor:

$$\mathfrak{r} = X\mathfrak{i} + Y\mathfrak{j} + Z\mathfrak{k}$$

ein, so wird das innere Produkt:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \varrho_0$$

gegeben durch den Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = XL_0 + YM_0 + ZN_0$$

oder:

$$\mathfrak{M} = XL + YM + ZN.$$

Es wird geometrisch aber durch das Volumen des Parallelepipedons dargestellt, von dem ein den Flächenvektor ϱ_0 repräsentierendes Parallelogramm eine Seitenfläche und der Kraftvektor $\mathfrak{r}$ eine weitere Kante bildet. So ergibt sich der von Baltzer[1]) aufgestellte Satz: Bei allen Reduktionen eines Kräftesystems auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar ist das Volumen des Parallelepipedons, das die resultierende Einzelkraft mit der durch das zugehörige Kräftepaar gelieferten Parallelogrammfläche bildet, konstant, und zwar gleich dem absoluten Momente des Kräftesystems, was auch aus der Formel (27) folgt.

Wollen wir schließlich noch die Punkte bestimmen, für welche das Moment M ein Extremum und zwar ein Minimum wird, so haben wir die Derivierten des Ausdruckes:

1) Leipziger Berichte 25, 1873, p. 526.

$$\mathsf{M}^2 = (L - Zy + Yz)^2 + (M - Xz + Zx)^2 + (N - Yx + Xy)^2$$

nach den Koordinaten gleich Null zu setzen und erhalten sofort:

$$(M - Xz + Zx)\,Z - (N - Yx + Xy)\,Y = 0,$$
$$(N - Yx + Xy)\,X - (L - Zy + Yz)\,Z = 0,$$
$$(L - Zy + Yz)\,Y - (M - Xz + Zx)\,X = 0.$$

Diese Gleichungen stellen, da sie in x, y, z linear sind und eine von ihnen eine Folge der anderen beiden ist, eine gerade Linie dar, die Zentralachse[1]) des Kräftesystems. Mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors k können wir die gefundenen Gleichungen schreiben:

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} L - Zy + Yz &= kX, \\ M - Xz + Zx &= kY, \\ N - Yx + Xy &= kZ. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber, indem wir sie mit X, Y, Z multiplizieren und addieren:

$$(29) \qquad k = \frac{XL + YM + ZN}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

und für den zu den Punkten der Zentralachse gehörigen Minimalwert S des Momentes M ergibt sich aus ihnen:

$$(30) \qquad S = k \cdot \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{XL + YM + ZN}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

oder $S = k \cdot R$, wenn wir:

$$(31) \qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

setzen. Eine Liniengröße von der Länge 1, die in die Zentralachse fällt, bekommt nach (28) die Koordinaten [vgl. S. 40]:

$$\mathfrak{x} = \frac{X}{R}, \quad \mathfrak{y} = \frac{Y}{R}, \quad \mathfrak{z} = \frac{Z}{R}, \quad \mathfrak{l} = \frac{L - kX}{R}, \quad \mathfrak{m} = \frac{M - kY}{R}, \quad \mathfrak{n} = \frac{N - kZ}{R}.$$

Das Moment des Kräftesystems für die Zentralachse wird also:

$$\Theta_0 = \frac{1}{R}\{LX + MY + NZ + X(L - kX) + Y(M - kY) + Z(N - kZ)\}$$
$$= \frac{XL + YM + ZN}{R} = S,$$

mithin gleich dem Werte des Momentes M für irgendeinen Punkt der Zentralachse.

Lassen wir die z-Achse des Koordinatensystems mit der Zentralachse zusammenfallen, so müssen die Gleichungen der letzteren sich auf $x = 0$, $y = 0$ reduzieren. Daraus folgt, daß dann:

1) Unter dieser Bezeichnung hat sie Poinsot eingeführt

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad L = 0, \quad M = 0$$

sein muß, es wird einfach $k = N/Z$, $R = Z$ und für einen beliebigen Punkt (x, y, z):

$$\mathsf{M}^2 = Z^2(x^2 + y^2) + N^2.$$

Bezeichnet man mit r den Abstand des Punktes von der Zentralachse, so kann man die letzte Gleichung in einer von der besonderen Wahl des Koordinatensystems unabhängigen Gestalt schreiben:

$$(32) \qquad \mathsf{M}^2 = R^2(r^2 + k^2) \quad \text{oder} \quad \mathsf{M} = R\sqrt{r^2 + k^2}.$$

Diese Gleichung macht sofort sichtbar, daß für die Punkte der Zentralachse ein Minimum eintritt.

Achtes Kapitel.

Grundlegung der Liniengeometrie.

Die Entwicklungen der letzten beiden Kapitel legen es nahe, wie man Punkte und Ebenen als Elemente des Raumes auffaßt, ohne dabei von Punktgrößen oder Ebenengrößen zu sprechen, so auch die geraden Linien als selbständige Elemente des Raumes anzusehen, ohne auf die Liniengrößen einzugehen. Die gerade Linie ist ein Begriff, in dem sich translatorische und rotatorische Liniengrößen verschmelzen. Mit einem Streckenwert und einem Richtungssinn behaftet wird die gerade Linie zu einer translatorischen, mit einem Winkelwert und einem Drehungssinn versehen wird sie zu einer rotatorischen Liniengröße. Man kann diese doppelte Funktion der geraden Linie auch in der Bezeichnung unterscheiden, indem man sie als Träger einer translatorischen Liniengröße einen Strahl und als Träger einer rotatorischen Liniengröße eine Achse nennt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wie Pluecker es tut,[1]) die gerade Linie, sofern sie als Verbindungslinie zweier Punkte auftritt, als Strahl von der Schnittlinie zweier Ebenen als Achse unterscheidet. Wir werden aber, dem herrschenden Sprachgebrauch folgend, gewöhnlich unterschiedlos „Strahl" für „gerade Linie" sagen.

Die Bezugslinie für das Moment eines Kräftesystems hatten wir im vorigen Kapitel durch die Koordinaten einer translatorischen Liniengröße vom Zahlwerte 1, die ihr angehört, festgelegt. Diese Koordinaten könnte man als Strahlkoordinaten bezeichnen und ihnen als Achsenkoordinaten die Koordinaten einer rotatorischen Linien-

---

1) On a new geometry of space, Philos. Transact. Vol. 155, 1865, p. 726, Ges. Abh. I, p. 470.

größe vom Zahlwerte 1 gegenüberstellen. Die ersteren verknüpfen mit der durch sie fixierten geraden Linie einen bestimmten Richtungssinn, die letzteren einen bestimmten Drehungssinn. Kehrt man die Vorzeichen aller Koordinatenwerte um, so schlägt auch der Richtungs- oder Drehungssinn in den entgegengesetzten um. Will man die gerade Linie an sich ohne Zuschreibung eines solchen Sinnes betrachten, so darf man nicht mehr die absoluten Werte der Koordinaten, sondern nur ihre Verhältnisse ins Auge fassen. Dann bleibt der Zahlwert der durch sie festgelegten Liniengröße völlig unbestimmt, und ebenso kann es unentschieden bleiben, ob sie sich auf eine translatorische oder auf eine rotatorische Liniengröße beziehen. Es müssen aber alle Gleichungen, in denen diese Koordinaten auftreten, in denselben homogen sein, wenn sie eine Bedeutung behalten sollen.

Demnach betrachten wir als homogene Koordinaten einer geraden Linie sechs lediglich ihren Verhältnissen nach festgelegte Werte

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \mathfrak{l},\ \mathfrak{m},\ \mathfrak{n},$$

zwischen denen die Beziehung

$$\mathfrak{x}\mathfrak{l} + \mathfrak{y}\mathfrak{m} + \mathfrak{z}\mathfrak{n} = 0 \tag{1}$$

statthaben muß.[1]) Sehen wir die gerade Linie als Verbindungslinie zweier Punkte mit den Koordinaten x, y, z und x', y', z' an, so haben wir zu setzen:

$$\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} : \mathfrak{l} : \mathfrak{m} : \mathfrak{n} = x' - x : y' - y : z' - z \\ : yz' - zy' : zx' - xz' : xy' - yx'. \tag{2}$$

Sehen wir dagegen die gerade Linie an als Schnittlinie zweier Ebenen, welche die nicht homogenen Koordinaten u, v, w und u', v', w' haben, deren Gleichungen also lauten:

$$ux + vy + wz = 1 \quad \text{und} \quad u'x + v'y + w'z = 1,$$

so wird:

$$\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} : \mathfrak{l} : \mathfrak{m} : \mathfrak{n} = u - u' : v - v' : w - w' \\ : vw' - wv' : wu' - uw' : uv' - vu'. \tag{2a}$$

Diese Linienkoordinaten rühren von Pluecker[2]) her, der in seiner „Neuen Geometrie des Raumes“ (1868) die erste systematische Darstellung der analytischen Liniengeometrie gegeben hat.

---

1) Diese Linienkoordinaten hat Cayley 1860 (Quarterly Journal, vol. 3 p. 225, Papers IV, p. 446), merkwürdigerweise gleich in ihrer projektiven Verallgemeinerung, gegeben. Man vgl. von demselben Autor den Aufsatz Trans. of the Cambr. Philos. Soc. XI^2, 1869, p. 290, Papers VII, p. 66.

2) On a new geometry of space, Additional note (1865), Ges. Abh. I, p. 525.

Die Projektionen der geraden Linie mit den Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots$ auf die Koordinatenebenen haben die Gleichungen [vgl. S. 47]:

$$\mathfrak{l} - \mathfrak{z}y + \mathfrak{y}z = 0, \quad \mathfrak{m} - \mathfrak{x}z + \mathfrak{z}x = 0, \quad \mathfrak{n} - \mathfrak{y}x + \mathfrak{x}y = 0, \tag{3}$$

und die Ebene, welche die gerade Linie aus dem Koordinatenursprung projiziert, hat die Gleichung:

$$\mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z = 0. \tag{3a}$$

Die einfachste Gleichung von allgemeiner Form, die man nun zwischen den Linienkoordinaten aufstellen kann, ist die lineare Gleichung, die wir uns in folgender Gestalt geschrieben denken:

$$\mathrm{L}\mathfrak{x} + \mathrm{M}\mathfrak{y} + \mathrm{N}\mathfrak{z} + \mathrm{X}\mathfrak{l} + \mathrm{Y}\mathfrak{m} + \mathrm{Z}\mathfrak{n} = 0. \tag{4}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist uns aber aus dem vorigen Kapitel bereits bekannt, sie sagt aus, daß für die Linie mit den Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ das Moment des Kräftesystems, dessen statische Koordinaten X, Y, Z, L, M, N sind, verschwindet. Die Verteilung dieser Nullinien im Raume haben wir ebenfalls bereits untersucht. Die Nullinien, die durch einen bestimmten Punkt gehen, liegen in einer bestimmten Ebene, der Nullebene des Punktes, und die Nullinien, die in einer bestimmten Ebene liegen, gehen durch einen bestimmten Punkt, den Nullpunkt der Ebene. Diese Gesamtheit von geraden Linien bezeichnen wir als einen linearen Komplex, indem wir nach Pluecker allgemein die Gesamtheit der Linien, die durch eine homogene Gleichung zwischen den Linienkoordinaten dargestellt wird, einen Linienkomplex nennen.

Als Linienkongruenz bezeichnet man nach Pluecker das System der geraden Linien, die durch zwei Gleichungen zwischen den Linienkoordinaten aus allen Linien des Raumes herausgehoben werden, und allgemeiner jede Gesamtheit von zweifach unendlich vielen geraden Linien.[1] Wenn die Kongruenz durch zwei lineare Gleichungen festgelegt ist, spricht man von einer linearen Kongruenz. Die Theorie der Strahlenkongruenzen ist bereits vor Pluecker durch Kummer unter Zugrundelegung der althergebrachten Darstellung gerader Linien durch zwei lineare Gleichungen entwickelt worden.[2]

---

1) Pluecker spricht in der „Neuen Geometrie des Raumes" von der Kongruenz mehrerer Strahlenkomplexe, indem er darunter die Gesamtheit der Strahlen versteht, die diese Komplexe gemein haben. Später aber ist das Wort Kongruenz allgemein in dem oben angegebenen Sinne verstanden worden.

2) Die Theorie der allgemeinen Strahlenkongruenzen im Journ. f. Math. Bd. 57 (1859), die Theorie der algebraischen Kongruenzen in den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1866. Kummer bezeichnet ebenso wie Hamilton (Transact. of the R. Irish Acad. vol. 16) die Kongruenzen als Strahlensysteme. Die lineare Strahlenkongruenz hat er in der zweiten Arbeit, S. 14, nur kurz erwähnt.

Wir wollen nun beachten, daß, wenn die Koeffizienten in der linearen Gleichung (4) der Bedingung:

$$XL + YM + ZN = 0 \tag{5}$$

genügen, sie sich selbst als Koordinaten einer geraden Linie deuten lassen. Wir wollen sie dann mit $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ bezeichnen. Die so entstehende Gleichung:

$$\mathfrak{l}'\mathfrak{x} + \mathfrak{m}'\mathfrak{y} + \mathfrak{n}'\mathfrak{z} + \mathfrak{x}'\mathfrak{l} + \mathfrak{y}'\mathfrak{m} + \mathfrak{z}'\mathfrak{n} = 0 \tag{6}$$

drückt aber nach dem im vierten Kapitel Gesagten die Bedingung dafür aus, daß die beiden geraden Linien mit den Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \ldots$ und $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}' \ldots$ sich schneiden oder parallel sind. Alle Linien, die eine gegebene Linie treffen, d. h. mit ihr in einer Ebene liegen, bilden sonach einen singulären linearen Komplex.

Ist nun eine lineare Kongruenz durch zwei Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} L\mathfrak{x} + M\mathfrak{y} + N\mathfrak{z} + X\mathfrak{l} + Y\mathfrak{m} + Z\mathfrak{n} = 0, \\ L'\mathfrak{x} + M'\mathfrak{y} + N'\mathfrak{z} + X'\mathfrak{l} + Y'\mathfrak{m} + Z'\mathfrak{n} = 0 \end{array}\right. \tag{7}$$

gegeben, so läßt sich, für beliebiges $\varkappa$ und λ, aus diesen sofort die weitere Gleichung ableiten:

$$\begin{aligned} &(\varkappa L + \lambda L')\mathfrak{x} + (\varkappa M + \lambda M')\mathfrak{y} + (\varkappa N + \lambda N')\mathfrak{z} \\ &\qquad + (\varkappa X + \lambda X')\mathfrak{l} + (\varkappa Y + \lambda Y')\mathfrak{m} + (\varkappa Z + \lambda Z')\mathfrak{n} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Durch diese Gleichung werden unendlich viele lineare Komplexe dargestellt, denen allen die lineare Kongruenz angehört, und deren Gesamtheit wir als ein Büschel linearer Komplexe bezeichnen wollen. Wir fragen nun, wie viele singuläre Komplexe in dem Büschel enthalten sind. Die Werte der Parameter, zu denen ein singulärer Komplex gehört, müssen der Gleichung genügen:

$$\begin{aligned} &(\varkappa X + \lambda X')(\varkappa L + \lambda L') + (\varkappa Y + \lambda Y')(\varkappa M + \lambda M') \\ &\qquad + (\varkappa Z + \lambda Z')(\varkappa N + \lambda N') = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Diese Gleichung ist für $\varkappa : \lambda$ vom zweiten Grade. Hat sie zwei reelle Wurzeln, so finden wir zwei reelle gerade Linien, die von allen Linien der Kongruenz getroffen werden, und die Kongruenz besteht aus sämtlichen Treffgeraden der beiden „Leitlinien“.

Die quadratische Gleichung kann aber auch identisch erfüllt sein. Dann sind alle Komplexe des Komplexbüschels singuläre Komplexe. Damit dies eintritt, müssen zwischen den Koeffizienten der gegebenen linearen Gleichungen die folgenden drei Beziehungen bestehen:

$$\left\{\begin{array}{l} XL + YM + ZN = 0, \quad X'L' + Y'M' + Z'N' = 0, \\ XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ' = 0. \end{array}\right. \tag{10}$$

Diese drei Bedingungen drücken aber aus, daß die Linien der Kongruenz als die Linien, die zwei sich schneidende gerade Linien treffen, bestimmt sind. Demnach muß eine Linie der Kongruenz mit den gegebenen geraden Linien entweder in einer Ebene liegen oder durch ihren Schnittpunkt hindurchgehen. Die Linienkongruenz zerfällt also in ein ebenes Strahlenfeld und ein Strahlenbündel. Jeder Komplex des zugehörigen Komplexbüschels besteht dann aus den Linien, welche einen Strahl des durch die beiden gegebenen geraden Linien bestimmten Strahlenbüschels treffen.

Nehmen wir nun zwischen den Linienkoordinaten drei homogene lineare Gleichungen an, so läßt sich diesen noch durch unendlich viele gerade Linien genügen, von denen wir im allgemeinen Falle sagen, sie bilden eine Regelschar. Sind die Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} L\mathfrak{x} + M\mathfrak{y} + N\mathfrak{z} + X\mathfrak{l} + Y\mathfrak{m} + Z\mathfrak{n} = 0, \\ L'\mathfrak{x} + M'\mathfrak{y} + N'\mathfrak{z} + X'\mathfrak{l} + Y'\mathfrak{m} + Z'\mathfrak{n} = 0, \\ L''\mathfrak{x} + M''\mathfrak{y} + N''\mathfrak{z} + X''\mathfrak{l} + Y''\mathfrak{m} + Z''\mathfrak{n} = 0, \end{cases}$$

so wollen wir sie auffassen als drei lineare, nicht homogene Gleichungen für $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und sie benutzen, um diese Größen zu berechnen. Dies ist in eindeutiger Weise möglich, wenn die Determinante

$$(12)\qquad D = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Dann ergeben sich $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ als homogene, lineare Funktionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in folgender Form:

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathfrak{l} = \alpha_{11}\mathfrak{x} + \alpha_{12}\mathfrak{y} + \alpha_{13}\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{m} = \alpha_{21}\mathfrak{x} + \alpha_{22}\mathfrak{y} + \alpha_{23}\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{n} = \alpha_{31}\mathfrak{x} + \alpha_{32}\mathfrak{y} + \alpha_{33}\mathfrak{z}. \end{cases}$$

In diese Gleichungen wollen wir gemäß der Bedeutung der Linienkoordinaten [vgl. (3)] einsetzen:

$$(14)\qquad \mathfrak{l} = y\mathfrak{z} - z\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{m} = z\mathfrak{x} - x\mathfrak{z}, \quad \mathfrak{n} = x\mathfrak{y} - y\mathfrak{x}$$

und darauf aus ihnen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ eliminieren. Das Eliminationsresultat schreibt sich folgendermaßen:

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} + z & \alpha_{13} - y \\ \alpha_{21} - z & \alpha_{22} & \alpha_{23} + x \\ \alpha_{31} + y & \alpha_{32} - x & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante auf der linken Seite dieser Gleichung ergibt aber ausgerechnet eine Funktion zweiten Grades von x, y, z. Die sämtlichen geraden Linien, deren Koordinaten den Gleichungen (11) genügen, liegen also auf einer Fläche zweiten Grades, d. h. sie bilden die eine Regelschar eines einschaligen Hyperboloids.[1]) Die zweite Regelschar ergibt sich dann geometrisch sofort, indem man durch einen Strahl der ersten Regelschar die Ebenen legt; diese schneiden alle das Hyperboloid in je einer weiteren geraden Linie, die alle Strahlen der ersten Regelschar treffen muß. Die sämtlichen so gewonnenen geraden Linien bilden die zweite Regelschar der Fläche. Die Regelfläche kann in besonderen Fällen in zwei Ebenen zerfallen. Die beiden Regelscharen werden dann zu zwei Strahlenbüscheln in diesen Ebenen.

Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo die Determinante $D(12)$ verschwindet. Dann lassen sich aus den drei Gleichungen (11) die Koordinaten $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ zugleich eliminieren, und wir erhalten eine Gleichung:

$$\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y} + \nu\mathfrak{z} = 0,$$

die ausdrückt, daß die sämtlichen geraden Linien einer Ebene parallel sind. Wählen wir diese Ebene zur xy-Ebene des Koordinatensystems, so muß die obige Gleichung sich auf $\mathfrak{z} = 0$ reduzieren. Machen wir aber in den ersten beiden der Gleichungen (11) $\mathfrak{z} = 0$ und setzen in ihnen die Werte:

$$\mathfrak{l} = -z\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{m} = z\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{n} = x\mathfrak{y} - y\mathfrak{x},$$

die sich aus (14) für $\mathfrak{z} = 0$ ergeben, ein, so erhalten wir:

$$\begin{gathered}(\mathrm{L} - \mathrm{Z}y + \mathrm{Y}z)\mathfrak{x} + (\mathrm{M} - \mathrm{X}z + \mathrm{Z}x)\mathfrak{y} = 0,\\ (\mathrm{L}' - \mathrm{Z}'y + \mathrm{Y}'z)\mathfrak{x} + (\mathrm{M}' - \mathrm{X}'z + \mathrm{Z}'x)\mathfrak{y} = 0.\end{gathered}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Elimination von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$:

$$\begin{aligned}(16)\qquad &(\mathrm{L} - \mathrm{Z}y + \mathrm{Y}z)(\mathrm{M}' - \mathrm{X}'z + \mathrm{Z}'x)\\ &\quad - (\mathrm{M} - \mathrm{X}z + \mathrm{Z}x)(\mathrm{L}' - \mathrm{Z}'y + \mathrm{Y}'z) = 0.\end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloids, auf dem die Strahlen der Regelschar jetzt liegen. Die weiter sich darbietenden Spezialfälle wollen wir übergehen.

Wir wollen noch bemerken, daß, wenn

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1; \quad \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2; \quad \mathfrak{x}_3, \mathfrak{y}_3, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{l}_3, \mathfrak{m}_3, \mathfrak{n}_3$$

die Koordinaten dreier Linien sind, welche der durch die Gleichungen (11) festgelegten Regelschar angehören, die Koordinaten jeder vierten Linie dieser Schar von der Form sind:

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{x} &= \lambda_1\mathfrak{x}_1 + \lambda_2\mathfrak{x}_2 + \lambda_3\mathfrak{x}_3,\\ \mathfrak{y} &= \lambda_1\mathfrak{y}_1 + \lambda_2\mathfrak{y}_2 + \lambda_3\mathfrak{y}_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathfrak{n} &= \lambda_1\mathfrak{n}_1 + \lambda_2\mathfrak{n}_2 + \lambda_3\mathfrak{n}_3.\end{aligned}\right.$$

1) Der liniengeometrische Charakter der geradlinigen Flächen 2. Ordnung ist wohl zuerst von Monge und Hachette (Applications de l'analyse à la Géométrie 1807, 1809) erkannt und behandelt worden.

Die Parameter λ_1, λ_2, λ_3 sind hierbei nur ihren Verhältnissen nach festgelegt, außerdem sind sie an die quadratische Gleichung gebunden:

$$(18)\quad \begin{aligned}&(\lambda_1\mathfrak{x}_1 + \lambda_2\mathfrak{x}_2 + \lambda_3\mathfrak{x}_3)(\lambda_1\mathfrak{l}_1 + \lambda_2\mathfrak{l}_2 + \lambda_3\mathfrak{l}_3)\\ &\qquad + (\lambda_1\mathfrak{y}_1+\cdots)(\lambda_1\mathfrak{m}_1+\cdots) + (\lambda_1\mathfrak{z}_1+\cdots)(\lambda_1\mathfrak{n}_1+\cdots)=0.\end{aligned}$$

Wenn diese Gleichung identisch erfüllt ist, so bilden die geraden Linien, deren Koordinaten (17) den drei Gleichungen (11) genügen, ein Strahlenbündel oder ein ebenes Strahlenfeld.

Ist nun zu den drei Gleichungen (11) eine vierte Gleichung gegeben:

$$(19)\qquad \mathrm{L}'''\mathfrak{x} + \mathrm{M}'''\mathfrak{y} + \mathrm{N}'''\mathfrak{z} + \mathrm{X}'''\mathfrak{l} + \mathrm{Y}'''\mathfrak{m} + \mathrm{Z}'''\mathfrak{n} = 0,$$

so setzen wir in diese die Lösungsformen (17) der drei ersten Gleichungen ein und erhalten so eine lineare Gleichung für λ_1, λ_2, λ_3, die wir schreiben:

$$(20)\qquad \mathsf{A}_1\lambda_1 + \mathsf{A}_2\lambda_2 + \mathsf{A}_3\lambda_3 = 0.$$

Dann ergeben sich aus dieser Gleichung und (18) im allgemeinen zwei Lösungen für die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ und dementsprechend zwei Strahlen der Regelschar, die auch dem vierten Komplexe angehören; wir sehen demnach, daß allgemein vier lineare Strahlenkomplexe zwei Linien gemeinsam haben, die aber nicht reell und voneinander verschieden zu sein brauchen, sondern auch konjugiert komplex werden oder zusammenfallen können.

Wir haben die linearen Strahlenkomplexe aus der Theorie der Kräftesysteme hergeleitet, es ist aber ebenso leicht, sie an die Betrachtung der momentanen Bewegungen anzuknüpfen. Um dies zu tun, schreiben wir die Gleichung des linearen Komplexes jetzt in der Form:

$$(21)\qquad \mathrm{u}\mathfrak{x} + \mathrm{v}\mathfrak{y} + \mathrm{w}\mathfrak{z} + \mathrm{p}\mathfrak{l} + \mathrm{q}\mathfrak{m} + \mathrm{r}\mathfrak{n} = 0.$$

Setzen wir hierin für $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ die Werte (14) ein, so wird die Gleichung

$$(21\text{a})\quad (\mathrm{u} - \mathrm{r}y + \mathrm{q}z)\mathfrak{x} + (\mathrm{v} - \mathrm{p}z + \mathrm{r}x)\mathfrak{y} + (\mathrm{w} - \mathrm{q}x + \mathrm{p}y)\mathfrak{z} = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln (11) des sechsten Kapitels:

$$(21\text{b})\qquad \dot{x}\mathfrak{x} + \dot{y}\mathfrak{y} + \dot{z}\mathfrak{z} = 0.$$

Da $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ die Geschwindigkeitskomponenten für einen beliebigen Punkt des Komplexstrahls bedeuten, sagt die Gleichung aus, daß sich alle Punkte eines Komplexstrahls bei der momentanen Bewegung normal zu diesem Strahle verschieben. Eine andere, negative Bedeutung des durch die Gleichung (21) gegebenen Komplexes hatten wir bereits im sechsten Kapitel gefunden, wir sahen dort, daß es nicht möglich ist, die momentane Bewegung so durch zwei Drehungen zu ersetzen, daß die Achse der einen zu dem linearen Komplexe gehört.

Wir wollen noch die Linie ins Auge fassen, die durch den Punkt P mit den Koordinaten x, y, z geht, und für die

$$\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} = \dot{x} : \dot{y} : \dot{z}$$

wird, d. h. die Linie, in der sich der Punkt P verschiebt und die wir deshalb die Verschiebungslinie des Punktes P nennen wollen. Schreiben wir die vorstehende Proportion ausführlicher mit Benutzung eines Proportionalitätsfaktors ϱ:

$$(22) \qquad \begin{cases} \varrho\mathfrak{x} = \mathfrak{u} - \mathfrak{r}y + \mathfrak{q}z, \\ \varrho\mathfrak{y} = \mathfrak{v} - \mathfrak{p}z + \mathfrak{r}x, \\ \varrho\mathfrak{z} = \mathfrak{w} - \mathfrak{q}x + \mathfrak{p}y, \end{cases}$$

so folgt aus diesen Gleichungen, indem wir sie mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ multipliziert addieren:

$$(23) \qquad \varrho(\mathfrak{p}\mathfrak{x} + \mathfrak{q}\mathfrak{y} + \mathfrak{r}\mathfrak{z}) = \mathfrak{u}\mathfrak{p} + \mathfrak{v}\mathfrak{q} + \mathfrak{w}\mathfrak{r} = \mathfrak{M},$$

wenn wir das Moment der Bewegung mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen, das wir $\neq 0$ voraussetzen. Multiplizieren wir aber die Gleichungen mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und addieren sie, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Formeln (14):

$$(24) \qquad \varrho(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) = \mathfrak{u}\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\mathfrak{y} + \mathfrak{w}\mathfrak{z} + \mathfrak{p}\mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{m} + \mathfrak{r}\mathfrak{n}.$$

Eliminieren wir endlich aus (23) und (24) den Proportionalitätsfaktor ϱ, so erhalten wir:

$$(25) \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) = (\mathfrak{u}\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\mathfrak{y} + \mathfrak{w}\mathfrak{z} + \mathfrak{p}\mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{m} + \mathfrak{r}\mathfrak{n})(\mathfrak{p}\mathfrak{x} + \mathfrak{q}\mathfrak{y} + \mathfrak{r}\mathfrak{z}).$$

Diese Gleichung ist für die Linienkoordinaten homogen vom zweiten Grade, sie stellt also einen quadratischen Linienkomplex dar, den Komplex aller Verschiebungslinien oder, wie wir kürzer sagen wollen, den Bahnkomplex der Bewegung.[1]) Die Verschiebungslinien lassen sich auch dadurch charakterisieren, daß sie von den unendlich benachbarten Linien, in die sie durch die momentane Bewegung übergehen, geschnitten werden, und zwar ist der Schnittpunkt der Pol der Verschiebungslinie, d. h. der Punkt, der sich bei der Bewegung in ihr verschiebt.

Für die nähere Untersuchung des linearen und des quadratischen Strahlenkomplexes, die auf die gefundene Art mit einer momentanen Bewegung in Verbindung stehen, wollen wir uns den im sechsten Kapitel gewonnenen Satz, daß jede momentane Bewegung mit einer

1) Diesen Komplex hat A. Schoenflies studiert, Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 28, 1883, p. 229 und Geometrie der Bewegung p. 109.

Schraubung gleichbedeutend ist, zunutze machen und fortan die Achse dieser Schraubung zur z-Achse wählen. Dann werden u, v, p, q $= 0$, und die Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten schreiben wir:

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x, \quad \dot{z} = \omega \cdot k, \tag{26}$$

indem wir wie im sechsten Kapitel die Drehgeschwindigkeit um die Achse der Schraubung $= \omega$, die Gleitgeschwindigkeit längs dieser Achse $\vartheta = k\omega$ setzen. Die Gleichung (21) wird jetzt:

$$k\mathfrak{z} + \mathfrak{n} = 0 \tag{27}$$

oder, indem wir die Werte der Linienkoordinaten aus (2) einsetzen:

$$k(z' - z) = yx' - xy'. \tag{27a}$$

Sehen wir hierin x, y, z als fest und x', y', z' als veränderlich an, so ist dies die Gleichung für die Nullebene des Punktes (x, y, z). Denken wir uns nun noch das Koordinatensystem so um die Schraubenachse gedreht und längs der Schraubenachse verschoben, daß der Punkt, der vorher die Koordinaten x, y, z hat, jetzt auf die x-Achse im Abstande s vom Koordinatenursprung zu liegen kommt, so wird die vorige Gleichung einfach:

$$kz' = -sy'. \tag{27b}$$

Die Nullebene geht also durch die x-Achse, d. h. das vom Nullpunkte auf die Schraubenachse gefällte Lot hindurch, und nennt man φ den Winkel, den sie mit der Schraubenachse bildet, so wird $\operatorname{tang} \varphi = -\frac{y'}{z'}$, mithin:

$$s \operatorname{tang} \varphi = k.\text{[1]} \tag{28}$$

Hierbei ist der Sinn, in welchem man den Winkel φ, von der Schraubenachse ausgehend, positiv zu rechnen hat, der Sinn einer positiven Drehung (entgegen dem Uhrzeiger), wenn man sich auf diese Achse mit dem Kopfe nach dem Nullpunkte zu gestellt denkt.

Wir wollen nun den Nullpunkt sich auf einer geraden Linie bewegen lassen und fragen, wie sich hierbei die Nullebene verändert. Die gerade Linie l_1, auf welcher der Nullpunkt liegen soll, können wir unbeschadet der Allgemeinheit so annehmen, daß sie die x-Achse im Abstande s_1 vom Koordinatenursprunge unter rechtem Winkel trifft. φ_1 sei der ebenso wie oben gerechnete Winkel, unter dem sie die Schraubenachse kreuzt; dann sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes der geraden Linie l_1 von der Form:

1) Moebius, Werke I, p. 506.

$$x = s_1, \quad y = -\varrho \sin \varphi_1, \quad z = \varrho \cos \varphi_1,$$

wobei ϱ einen veränderlichen Parameter bezeichnet. Wir setzen diese Werte in die Gleichung (27a) der Nullebene ein und finden:

$$s_1 y' + k z' = \varrho (k \cos \varphi_1 - x' \sin \varphi_1).$$

Die Nullebenen der Punkte von l_1 bilden also ein Ebenenbüschel, da sie alle durch die Schnittlinie der durch die Gleichungen:

$$s_1 y' + k z' = 0, \quad k \cos \varphi_1 - x' \sin \varphi_1 = 0$$

dargestellten Ebenen hindurchgehen. Da nach diesen Gleichungen für einen Punkt auf der Achse des Ebenenbüschels:

$$\frac{y'}{z'} = -\frac{k}{s_1}, \quad x' = k \operatorname{cotg} \varphi_1$$

wird, schneidet auch diese Achse l_2 die x-Achse, d. h. die gemeinsame Normale der Schraubenachse und der Linie l_1 unter rechtem Winkel, und zwar im Abstande:

$$s_2 = k \operatorname{cotg} \varphi_1 \tag{29}$$

von der Schraubenachse. Der Winkel φ_2, unter dem sie die Schraubenachse kreuzt, ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\operatorname{tang} \varphi_2 = \frac{k}{s_1}. \tag{30}$$

Die beiden Gleichungen lassen sich in die Doppelgleichung:

$$s_1 \operatorname{tang} \varphi_2 = s_2 \operatorname{tang} \varphi_1 = k \tag{31}$$

zusammenziehen[1]), die zeigt, daß die Beziehung zwischen den Linien l_1 und l_2 durchaus wechselseitig ist. Also auch, wenn ein Punkt sich auf der zweiten bewegt, dreht sich seine Nullebene um die erste. Wir nennen die beiden Linien reziproke Polaren des Nullsystems. Ist die Schraubenachse und der Parameter k gegeben, so läßt sich zu jeder Linie die reziproke Polare finden vermöge der Formeln (31) und des Satzes, daß die beiden reziproken Polaren zusammen mit der Schraubenachse dieselbe gemeinsame Normale besitzen. In jedem Strahle des linearen Komplexes fallen zwei reziproke Polaren zusammen, denn für $s_1 = s_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ geht aus (31) die Gleichung (28) hervor.

Die Strahlen, die zwei reziproke Polaren treffen, gehören immer zu dem linearen Komplex, denn die Ebene, die sie mit der einen der reziproken Polaren verbindet, ist jedesmal die Nullebene des Punktes, in dem sie die andere treffen. Die Paare reziproker Polaren bilden also die Leitlinien von linearen Kongruenzen,

1) Chasles, Comptes Rendus 16 (1843), p. 1426.

die zu dem linearen Komplex gehören. Zwei solche Kongruenzen haben aber, da sie durch die lineare Gleichung des Komplexes in Verbindung mit je noch einer linearen Gleichung zwischen den Linienkoordinaten dargestellt werden, die durch diese drei Gleichungen zusammen dargestellte Regelschar gemein. Die zwei Paar Leitlinien der Kongruenzen gehören der zweiten Regelschar derselben Regelfläche an; so sieht man, daß zwei Paar reziproker Polaren immer auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen.

Wir wollen nun noch den wichtigen Satz beweisen[1]), daß zwei reziproke Polaren des Nullsystems immer die Achsen zweier Drehungen sind, die zusammengenommen die vorgelegte momentane Bewegung ersetzen. Seien ω_1, ω_2 die noch unbekannten Winkelgeschwindigkeiten dieser Drehungen, so werden die Koordinaten derselben nach den für ihre Achsen gegebenen Gleichungen, indem z. B. die erste dieser Achsen als Verbindungslinie der Punkte mit den Koordinaten:

$$s_1,\ 0,\ 0 \quad \text{und} \quad s_1,\ -\sin\varphi_1,\ \cos\varphi_1$$

aufgefaßt werden kann:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_1 &= 0, & \mathrm{q}_1 &= -\,\omega_1 \sin\varphi_1, & \mathrm{r}_1 &= \omega_1 \cos\varphi_1, \\ \mathrm{u}_1 &= 0, & \mathrm{v}_1 &= -\,\omega_1 s_1 \cos\varphi_1, & \mathrm{w}_1 &= -\,\omega_1 s_1 \sin\varphi_1 \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_2 &= 0, & \mathrm{q}_2 &= -\,\omega_2 \sin\varphi_2, & \mathrm{r}_2 &= \omega_2 \cos\varphi_2, \\ \mathrm{u}_2 &= 0, & \mathrm{v}_2 &= -\,\omega_2 s_2 \cos\varphi_2, & \mathrm{w}_2 &= -\,\omega_2 s_2 \sin\varphi_2. \end{aligned}$$

Soll aus diesen beiden Drehungen die vorgelegte Schraubung hervorgehen, so müssen außer:

$$\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 = 0, \quad \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 = 0$$

auch die Gleichungen:

$$\mathrm{q}_1 + \mathrm{q}_2 = 0, \quad \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = 0$$

oder:

$$\text{(a)}\quad \omega_1 \sin\varphi_1 + \omega_2 \sin\varphi_2 = 0, \quad \text{(b)}\quad \omega_1 s_1 \cos\varphi_1 + \omega_2 s_2 \cos\varphi_2 = 0$$

erfüllt sein. Von diesen ist aber wegen der Beziehungen (31) die zweite eine Folge der ersten. Ferner muß:

$$\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2 = \omega, \quad \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = k\omega$$

oder:

$$\text{(c)}\quad \omega_1 \cos\varphi_1 + \omega_2 \cos\varphi_2 = \omega, \quad \text{(d)}\quad -(\omega_1 s_1 \sin\varphi_1 + \omega_2 s_2 \sin\varphi_2) = k\omega$$

sein. Multipliziert man die linke und rechte Seite von (c) mit k, so kann man die entstehende Gleichung nach (31) schreiben:

---

1) Diesen Satz gab Chasles (Rendus t. 16, p. 1423) in der umgekehrten Form. Vgl. auch Mannheim, Journ. de l'École polyt., Cah. 43 (1870), p. 66. Diese Autoren bezeichnen die reziproken Polaren des Nullsystems als „droites conjuguées" und den Nullpunkt einer Ebene als deren „foyer".

$$\omega_1 s_2 \sin\varphi_1 + \omega_2 s_1 \sin\varphi_2 = k\omega,$$

und hieraus kann man, da nach (a) $\omega_1 \sin\varphi_1 = -\omega_2 \sin\varphi_2$ ist, die Gleichung (d) herleiten, die sonach ebenfalls eine Folge der übrigen ist. Aus (a) und (c) kann man aber leicht die Werte von ω_1 und ω_2 berechnen und findet:

$$(32) \qquad \omega_1 = \omega \cdot \frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad \omega_2 = -\omega \cdot \frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Aus zwei Drehungen um die reziproken Polaren des Nullsystems mit diesen Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 läßt sich, da so alle zu erfüllenden Gleichungen befriedigt werden, die Schraubung in der Tat zusammensetzen. Die Gleichungen (32) zeigen, daß sich ω, ω_1, ω_2 als die Seiten eines Dreiecks darstellen lassen, von dem zwei Winkel $-\varphi_1$ und φ_2 sind, oder anders ausgedrückt: Wenn man zwei Vektoren an Richtung gleich den beiden reziproken Polaren, an Größe gleich den zugehörigen Rotationsgeschwindigkeiten macht, so stellt der durch Addition dieser beiden resultierende Vektor der Richtung nach die Schraubenachse und der Größe nach die Drehgeschwindigkeit um diese Schraubenachse dar. Kreuzen die beiden reziproken Polaren einander senkrecht, so wird $\varphi_2 - \varphi_1 = 90^0$, und dann folgt aus (32):

$$\omega_1 = \omega \sin\varphi_2 = \omega\cos\varphi_1, \quad \omega_2 = -\omega \sin\varphi_1 = \omega\cos\varphi_2.$$

Die Verschiebungslinie eines Punktes steht auf dessen Nullebene senkrecht. Hat also der Punkt von der Schraubenachse den Abstand s_1 und ist φ_1 der Winkel, unter dem die Verschiebungslinie die Schraubenachse kreuzt, so folgt unmittelbar aus der Gleichung (28), daß

$$(33) \qquad \operatorname{tang}\varphi_1 = -\frac{s_1}{k}$$

werden muß. Nimmt man aber in (31) $\operatorname{tang}\varphi_1 \cdot \operatorname{tang}\varphi_2 = -1$, d. h. die beiden reziproken Polaren senkrecht zueinander an, so sieht man, daß dann:

$$(33\text{a}) \qquad \operatorname{tang}\varphi_1 = -\frac{s_1}{k}, \quad \operatorname{tang}\varphi_2 = -\frac{s_2}{k} \quad \text{und} \quad s_1 \cdot s_2 = -k^2$$

wird. *Jede Verschiebungslinie wird also von ihrer reziproken Polare rechtwinklig gekreuzt, und diese reziproke Polare ist wieder eine Verschiebungslinie.* Die Pole dieser beiden Verschiebungslinien sind deren Schnittpunkte mit ihrer gemeinsamen Normalen. Die Ebene, die durch die eine Linie senkrecht zur anderen gelegt wird, schneidet aus dieser ihren Pol aus, und die erstere Linie ist nach Chasles' Ausdruck die *Charakteristik* dieser Ebene.

Für diese Charakteristik hat Chasles eine Reihe von Sätzen aufgestellt, von denen wir nur einige anführen wollen. Nach dem früher Gesagten können wir den Satz aussprechen: Die Strahlen des linearen Komplexes, die eine gerade Linie treffen, treffen auch deren reziproke Polare. Lassen wir den Treffpunkt mit der ersten Linie insbesondere in unendliche Entfernung rücken, so ergibt sich: Die Strahlen des linearen Komplexes, die einer geraden Linie parallel sind, treffen deren reziproke Polare. Nehmen wir nun für die erste Linie eine Verschiebungslinie, so sind alle zu ihr parallelen Strahlen zu der Nullebene ihres Poles normal, die reziproke Polare der Verschiebungslinie ist aber die Chaslessche Charakteristik dieser Nullebene, und somit finden wir: Die Strahlen des linearen Komplexes, die zu einer Ebene normal sind, treffen die Charakteristik dieser Ebene. Einen solchen Komplexstrahl bekommt man jedesmal, wenn man eine zu der Ebene senkrechte Linie sucht, die irgendein Paar reziproker Polaren schneidet. Der Schnittpunkt dieser Linie mit der Ebene ist aber allemal der Schnittpunkt der orthogonalen Projektionen der beiden reziproken Polaren auf die Ebene, und so ergibt sich der Satz: Die orthogonalen Projektionen zweier reziproken Polaren auf eine Ebene schneiden sich immer auf der Chaslesschen Charakteristik dieser Ebene.

Sind λ, μ, ν die Winkel, welche die Verschiebungslinie eines Punktes (x, y, z) mit den positiven Koordinatenrichtungen einschließt, so muß die Nullebene dieses Punktes die Gleichung:

$$\cos\lambda\,(x'-x) + \cos\mu\,(y'-y) + \cos\nu\,(z'-z) = 0$$

haben. Da diese Gleichung aber nach (27a):

$$-\,y(x'-x) + x(y'-y) + k(z'-z) = 0$$

ist, so folgt:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = -\,y : x : k,$$

und mithin werden die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der Verschiebungslinie:

$$(34) \qquad x_1 = x + \varrho y, \quad y_1 = y - \varrho x, \quad z_1 = z - \varrho k,$$

wenn ϱ einen variablen Parameter bezeichnet. Dies ist die einfache Darstellung der Verschiebungslinie mit Hilfe der Koordinaten x, y, z ihres Poles.

Sieht man in den Gleichungen (34) die Koordinaten x_1, y_1, z_1 als fest gegeben an, verlangt man also, daß die Verschiebungslinie durch einen bestimmten Punkt P_1 gehen soll, so erhält man für den Ort ihres Poles die Darstellung:

$$(35) \qquad x = \frac{x_1 - \varrho y_1}{1+\varrho^2}, \quad y = \frac{y_1 + \varrho x_1}{1+\varrho^2}, \quad z = z_1 + \varrho k.$$

Dieser Ort ist eine rationale Raumkurve, und zwar von der dritten Ordnung[1]), da durch Einsetzen der Werte für x, y, z in die Gleichung einer Ebene:

$$ux + vy + wz = 1$$

eine Gleichung dritten Grades für ϱ folgt, deren drei Wurzeln drei Schnittpunkte der Kurve mit der Ebene entsprechen. Für $\varrho = 0$ wird $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, die Raumkurve geht also selbst durch den Punkt P_1 hindurch.

Wählt man das Koordinatensystem so, daß der Punkt P_1 auf die x-Achse im Abstande s von dem Koordinatenursprung zu liegen kommt, so werden die Gleichungen (35) einfach:

$$(35a) \qquad x = \frac{1}{1+\varrho^2} s, \quad y = \frac{\varrho}{1+\varrho^2} s, \quad z = \varrho k.$$

Eliminiert man aus den ersten beiden Gleichungen ϱ, so findet man:

$$(36) \qquad x^2 + y^2 = s \cdot x.$$

Dies ist die Gleichung eines Rotationszylinders, auf dem die Raumkurve dritter Ordnung liegt und von dem die Schraubenachse und die zu ihr durch P_1 gelegte Parallele p_1 zwei diametral gegenüberliegende Seitenlinien bilden.

Gibt man den Gleichungen (35a) die Form:

$$(35b) \qquad s - x = \frac{\varrho^2}{1+\varrho^2} s, \quad y = \frac{\varrho}{1+\varrho^2} s, \quad z = \varrho k,$$

so läßt sich aus ihnen leicht die weitere Gleichung ableiten:

$$(37) \qquad (s-x)^2 + y^2 = \frac{s}{k} y z.$$

Dies ist die Gleichung des Kegels, welcher die Raumkurve aus dem Punkte P_1 projiziert und sie aus dem Zylinder, mit dem er außerdem die gerade Linie p_1 gemein hat, ausschneidet. Es ist dies aber gleichzeitig der Kegel, den die durch den Punkt P_1 gehenden Verschiebungslinien erfüllen. Der Kegel ist ein orthogonaler[2]), seine Kreisschnittebenen bilden zwei Scharen paralleler Ebenen, die zu je einer seiner Seitenlinien orthogonal sind. Eine dieser Seitenlinien ist die Linie p_1, die durch den Punkt P_1 parallel zur Schraubenachse, d. h. zur z-Achse gezogen ist und für die $x = s$, $y = 0$, wodurch die Gleichung (37) unabhängig von z befriedigt wird. In der Tat schneiden

1) Die Raumkurven dritter Ordnung sind zuerst von Moebius in seinem „baryzentrischen Calcul" 1827 (Werke I, p. 117 ff.) untersucht worden. Ihre analytische Behandlung betreffend vergleiche man Cremona, Annali di matem. (1), vol. 1 (1858), p. 164, 278; 2 (1859), p. 19 und Journ. f. Math. Bd. 58 (1861), p. 149.

2) Diese Bezeichnung stammt von Schroeter (Journ. f. Math. Bd. 85, S. 41 und 79).

die zu dieser Linie senkrechten Ebenen, d. h. die Ebenen, für die $z =$ const., den Kegel in Kreisen.

Aus den Formeln (35a) und (35b) leitet man mit Leichtigkeit ab:

$$\frac{y}{x} = \frac{s-x}{y} = \frac{z}{k} = \varrho. \tag{38}$$

Dies ist die einfachste Darstellung der Kurve. Schreibt man aber die Gleichungen in der folgenden Gestalt:

$$y - \varrho x = 0, \quad s - x - \varrho y = 0, \quad z - \varrho k = 0, \tag{38a}$$

so sieht man sofort, daß hierdurch drei projektive Ebenenbüschel dargestellt werden, welche die Raumkurve erzeugen, indem drei entsprechende Ebenen aus diesen Büscheln, die zu demselben Werte des Parameters ϱ gehören, sich jedesmal in einem Punkte der Raumkurve schneiden. Diese Raumkurve dritter Ordnung spielt in gewisser Weise für die Raumgeometrie eine ähnliche Rolle wie der Kreis für die Ebene und kann deswegen einfach als ein R a u m k r e i s bezeichnet werden.

Wie wir die Verschiebungslinien, die durch einen bestimmten Punkt gehen, gesucht haben und dabei fanden, daß sie auf einem orthogonalen Kegel liegen, dessen Kreisschnittebenen senkrecht zur Schraubenachse sind, so wollen wir auch nach den Verschiebungslinien fragen, die in einer bestimmten Ebene π liegen, und wir werden sehen, daß sie eine Parabel umhüllen.

Das Koordinatensystem denken wir uns so gewählt, daß die x-Achse in die Ebene π fällt. Die Gleichung der Ebene ist dann von der Form:

$$z = \alpha y. \tag{39}$$

Soll diese Gleichung für einen beliebigen Punkt (mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1) der zu dem Punkte (x, y, z) gehörigen Verschiebungslinie erfüllt sein, so muß nach den Formeln (34):

$$z - \varrho k = \alpha(y - \varrho x)$$

oder, weil die Gleichung für jedes ϱ erfüllt sein soll:

$$z = \alpha y \quad \text{und} \quad k = \alpha x \tag{40}$$

sein. Durch diese beiden Gleichungen ist als Ort der Pole aller in π liegenden Verschiebungslinien eine gerade Linie p der Ebene π dargestellt, welche die x-Achse im Abstande:

$$s = \frac{k}{\alpha} \tag{41}$$

von der Schraubenachse (d. h. der z-Achse) unter rechtem Winkel trifft, und zwar ist sie die Verschiebungslinie dieses Treffpunktes P. Denn nimmt man in den Gleichungen (34):

$$x = \frac{k}{\alpha}, \; y = 0, \; z = 0$$

an, so werden sie:

$$x_1 = \frac{k}{\alpha}, \quad y_1 = -\varrho \frac{k}{\alpha}, \quad z_1 = -\varrho k,$$

woraus in der Tat:

$$\alpha x_1 = k, \quad \alpha y_1 = z_1$$

hervorgeht. Die Linie p ist ferner die reziproke Polare der auf der Ebene π in ihrem Nullpunkte P_0 errichteten Normalen p_0, d. h. der Verschiebungslinie dieses Nullpunktes P_0. Denn P_0 hat die Koordinaten $x = s_0 = -\alpha k$, $y = 0$, $z = 0$, wie man sofort sieht, wenn man die Gleichung (27a) in der Form $kz = -s_0 y$ mit (39) identifiziert. Die Punkte P_0 und P liegen also auf einem Lote der Schraubenachse (nämlich auf der x-Achse), und ihre Abstände s_0, s von der Schraubenachse (d. h. ihre x-Koordinaten) genügen der Beziehung:

$$s_0 s = -k^2. \tag{42}$$

Darum aber sind [vgl. (33a)] ihre Verschiebungslinien p_0 und p reziproke Polaren und kreuzen sich rechtwinklig, die Linie p ist nichts anderes wie die Chaslessche Charakteristik der Ebene π.

Diese Linie ist demnach der Ort der Pole aller der Verschiebungslinien, die ganz der Ebene π angehören. Die Punkte der Linie p sind die einzigen Punkte von π, die bei der unendlich kleinen Bewegung in dieser Ebene bleiben. Man kann dies auch so ausdrücken, daß man sagt, die Ebene π muß von der unendlich benachbarten Ebene, in die sie durch die unendlich kleine Bewegung übergeht, in einer der Linie p unendlich nahe gelegenen Linie geschnitten werden. Wir wollen mit einem einfacheren Ausdruck die Linie p die A c h s e der Ebene π nennen. Jede Verschiebungslinie p ist Achse einer einzigen Ebene. Man findet diese, indem man durch die Linie p die Ebene legt, die senkrecht zu der reziproken Polaren p_0 von p ist. Die Verschiebungslinie eines beliebigen Punktes Q von p muß senkrecht auf der Ebene stehen, die diesen Punkt Q mit der reziproken Polaren p_0 verbindet, denn das ist die Nullebene des Punktes Q, sie steht in der Ebene π also senkrecht auf der Linie, die den Punkt Q mit dem Nullpunkte P_0 der Ebene (als deren Schnittpunkte mit der reziproken Polaren p_0) verbindet. Daraus ist sofort zu sehen, daß die Verschiebungslinien der Punkte von p in der Ebene π eine Parabel umhüllen, von welcher der Nullpunkt P_0 der Brennpunkt und p die Scheiteltangente ist.

Wir wollen diese Parabel auch analytisch festlegen und suchen zunächst eine Parameterdarstellung ihrer Tangenten. Ein Punkt Q der Linie p hat Koordinaten:

$$s, \quad y, \quad \alpha y,$$

und machen wir hierbei gemäß (41):

$$y = s \cdot \eta = \frac{k}{\alpha}\eta, \tag{43}$$

indem η einen der Bequemlichkeit halber eingeführten Parameter bezeichnet, so erhalten wir nach (40) folgende einfache Parameterdarstellung der Linie p:

$$x = s, \quad y = s\eta, \quad z = k\eta \tag{44}$$

und dann aus den Formeln (34) sofort die Parameterdarstellung der Verschiebungslinie eines beliebigen Punktes von p:

$$x_1 = s(1 + \varrho\eta), \quad y_1 = s(\eta - \varrho), \quad z_1 = k(\eta - \varrho). \tag{45}$$

Eliminieren wir ϱ aus den ersten beiden der so gewonnenen Gleichungen, so erhalten wir die Gleichung für die Projektion dieser Verschiebungslinie auf die xy-Ebene:

$$x_1 + \eta y_1 = s(1 + \eta^2).$$

Um die Kurve zu finden, die von den Projektionen aller Verschiebungslinien in der Ebene π umhüllt wird, differenzieren wir die vorstehende Gleichung nach dem Parameter η; so ergibt sich:

$$y_1 = 2s\eta.$$

Eliminieren wir ferner mit Hilfe dieser Gleichung aus der vorigen Gleichung das η, so erhalten wir:

$$y_1^2 = 4s(s - x_1). \tag{46}$$

Dies ist die Gleichung für die Projektion der Parabel in der Ebene π auf die xy-Ebene.

Die Verschiebungslinien, die in der Ebene π liegen und die Parabel umhüllen, sind wieder Achsen je einer bestimmten Ebene, und alle Ebenen, die wir so erhalten, umhüllen eine abwickelbare Fläche, sie bilden, wie wir sagen, ein Ebenengewinde, zu dem auch die Ebene π selbst gehört, denn ihre Achse gehört mit zu den Verschiebungslinien, die in ihr liegen, und bildet die Scheiteltangente der Parabel. In jeder Ebene des Ebenengewindes liegen nun immer die Verschiebungslinien der Punkte ihrer Schnittlinie mit der Ebene π, und die Schnittlinie irgend zweier Ebenen des Gewindes ist die Verschiebungslinie ihres Schnittpunktes mit der Ebene π. Greifen wir also eine beliebige Ebene π' aus dem Gewinde heraus, so schneiden die übrigen Ebenen des Gewindes aus ihr die sämtlichen Verschiebungslinien aus, die in ihr liegen, und das Gewinde spielt so für diese Ebene π' genau dieselbe Rolle wie für die Ebene π, die letztere ist unter den Ebenen des Gewindes in keiner Weise ausgezeichnet.

Wir suchen nun eine analytische Darstellung der Ebenen des Gewindes. Zu dem Zwecke greifen wir unter den Verschiebungslinien eine beliebige v heraus und suchen von irgendeinem Punkte (x, y, z) auf ihr wieder die Verschiebungslinie, von der dann die Koordinaten irgendeines Punktes, x_1, y_1, z_1, berechnet werden sollen. So finden wir die Koordinaten eines beliebigen Punktes in der durch v gehenden Ebene des Gewindes. Wir setzen also in den Formeln (34) gemäß (45):

$$x = s(1 + \varrho_0 \eta), \quad y = s(\eta - \varrho_0), \quad z = k(\eta - \varrho_0),$$

dann werden sie, wenn wir:

$$1 - \varrho_0 \varrho = \mu, \quad \varrho_0 + \varrho = \nu$$

machen:

$$\begin{aligned} x_1 &= s(\mu + \nu\eta), \\ y_1 &= s(\mu\eta - \nu), \\ z_1 &= k(\eta - \nu). \end{aligned}$$

Durch Elimination von μ und ν erhalten wir die Gleichung der Ebene des Gewindes:

$$k(\eta x_1 - y_1) + s(1 + \eta^2)(z_1 - k\eta) = 0,$$

indem den verschiedenen Werten des Parameters η die verschiedenen Ebenen des Gewindes entsprechen. Das Gewinde ist von der dritten Klasse, durch jeden Punkt gehen drei Ebenen von ihm. In der Tat wird die vorstehende Gleichung, wenn man in ihr die Koordinaten x_1, y_1, z_1 als fest gegeben ansieht, für η vom dritten Grade. Sie lautet geordnet, nachdem man sie durch $-ks$ geteilt hat:

$$\eta^3 - \frac{z_1}{k}\eta^2 + \left(1 - \frac{x_1}{s}\right)\eta - \left(\frac{z_1}{k} - \frac{y_1}{s}\right) = 0. \tag{47}$$

Fallen ihre drei Wurzeln zusammen, so erhalten wir einen Punkt der Raumkurve, deren Tangentenfläche das Ebenengewinde umhüllt und aus deren Schmiegungsebenen es besteht. Dann gelangen wir aber zu den folgenden Beziehungen, welche die Koeffizienten der Gleichung durch ihre einzige Wurzel η auszudrücken lehren:

$$\frac{z_1}{k} = 3\eta, \quad 1 - \frac{x_1}{s} = 3\eta^2, \quad \frac{z_1}{k} - \frac{y_1}{s} = \eta^3, \tag{48}$$

und aus diesen folgt sofort die Parameterdarstellung der Raumkurve:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= s(1 - 3\eta^2), \\ y_1 &= s\eta(3 - \eta^2), \\ z_1 &= 3k\eta. \end{aligned} \right. \tag{49}$$

Es ist, wie wir aus dieser Darstellung sofort sehen, eine Raumkurve dritter Ordnung.[1]) Eliminieren wir aus der ersten und dritten der vorstehenden Gleichungen η, so erhalten wir die Gleichung:

$$z_1^2 = 3\frac{k^2}{s}(s - x_1) \tag{50}$$

eines parabolischen Zylinders, auf dem die Raumkurve liegt. Sie wird, da sie eine gewisse Analogie mit der ebenen Parabel zeigt, eine Raumparabel[2]) genannt. Die Gesamtheit aller der geraden Linien, in denen sich je zwei Schmiegungsebenen der Raumparabel schneiden, bezeichnen wir als deren Achsenkongruenz. Man kann leicht beweisen, daß diese Achsenkongruenz von der ersten Klasse und dritten Ordnung ist, d. h. daß in einer beliebigen Ebene eine Linie der Kongruenz liegt und durch einen beliebigen Punkt drei Linien der Kongruenz gehen. Wir können dann den Satz, der zu der Betrachtung der Raumparabel geführt hat, formulieren wie folgt: Die Verschiebungslinien der Punkte einer Ebene bilden die Achsenkongruenz einer Raumparabel.

Neuntes Kapitel.

Gleichgewicht.

Wir wollen jetzt zu Systemen von Kräften zurückkehren, die im statischen Gleichgewichte sind, und untersuchen, welche geometrischen Bestimmungen sich für solche Kräfte aufstellen lassen. Der Bedingung des absoluten statischen Gleichgewichtes läßt sich die Bedingung des Gleichgewichtes für eine bestimmte Achse oder einen bestimmten Punkt als die weniger umfassende voranstellen.

Ein Kräftesystem heißt im statischen Gleichgewichte für eine bestimmte Achse, wenn sein Moment für diese Achse verschwindet. Ein beliebiges Kräftesystem ist also im Gleichgewichte für alle Achsen, welche seinem linearen Strahlenkomplexe angehören, und die Bedeutung der Nullinien eines Kräftesystems ist einfach die, daß das Kräftesystem für diese Nullinien im Gleichgewichte ist. Ein linearer Strahlenkomplex ist durch fünf seiner Strahlen, die keiner linearen

1) Den so hervortretenden dualen Charakter der Raumkurven dritter Ordnung hat zuerst Schroeter [Journ. f. Math. Bd. 56 (1858), S. 27] richtig erkannt.

2) Seydewitz [Archiv d. Math. u. Phys. Bd. 10 (1847) S. 212] nennt sie „räumliche Parabel". Den Ausdruck Raumparabel findet man in der neuesten Auflage von Reyes Geometrie der Lage.

Strahlenkongruenz angehören, bestimmt. Denn sind $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$, $\mathfrak{l}_i$, $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{n}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) die Koordinaten der fünf Strahlen, so lassen sich unter der angegebenen Voraussetzung aus den fünf Gleichungen:

$$(1) \qquad \mathrm{L}\,\mathfrak{x}_i + \mathrm{M}\,\mathfrak{y}_i + \mathrm{N}\,\mathfrak{z}_i + \mathrm{X}\,\mathfrak{l}_i + \mathrm{Y}\,\mathfrak{m}_i + \mathrm{Z}\,\mathfrak{n}_i = 0$$

die Verhältnisse der Koeffizienten L, M, N, X, Y, Z in der linearen Gleichung bestimmen, welcher die Koordinaten irgendeines sechsten, mit den fünf ersten einem linearen Komplex angehörenden Strahles genügen müssen. Ist sonach ein Kräftesystem im Gleichgewicht für sechs Achsen, die nicht einem linearen Strahlenkomplex angehören, so ist es überhaupt im Gleichgewicht. Denn für ein Kräftesystem, das nicht im absoluten statischen Gleichgewicht ist, kann Gleichgewicht nur für die Achsen, die zu einem bestimmten linearen Komplex gehören, stattfinden; wenn also noch für eine nicht zu diesem Komplex gehörende Achse Gleichgewicht vorhanden ist, so ist das Kräftesystem im absoluten statischen Gleichgewicht und ist im Gleichgewicht für jede Achse.

Ein Kräftesystem heißt im statischen Gleichgewicht für einen bestimmten Punkt, wenn sein Vektormoment für diesen Punkt verschwindet. Es muß das Kräftesystem dann einer Einzelkraft statisch äquivalent sein, welche in dem Bezugspunkte angreift. Das sieht man am einfachsten ein, wenn man in diesen Punkt den Koordinatenursprung legt. Dann sind die Komponenten des Vektormomentes einfach die drei letzten Koordinaten L, M, N des Kräftesystems, und diese müssen, wenn Gleichgewicht für den Punkt vorhanden, sonach verschwinden. Deswegen sind die statischen Koordinaten des Kräftesystems der Reihe nach:

$$\mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z},\ 0,\ 0,\ 0,$$

und dies sind auch die Koordinaten einer Einzelkraft mit den Komponenten X, Y, Z, die im Koordinatenursprung angreift. Da man den Angriffspunkt aber beliebig in der Richtung der Kraft verschieben darf, muß das Kräftesystem im Gleichgewicht sein für jeden Punkt auf der Wirkungslinie dieser Kraft. Wenn ein Kräftesystem sonach im Gleichgewicht ist für einen Punkt, so ist es für alle Punkte einer bestimmten Linie im Gleichgewicht und einer in dieser Linie wirkenden Kraft statisch äquivalent.

Wir wollen nun die drei Hauptfälle aufzählen, in denen das Kräftesystem einer Einzelkraft äquivalent wird.

Der erste Fall ist der, wo alle Kräfte des Systems in einer Ebene wirken. Wählen wir für diese Ebene die xy-Ebene, so wird die dritte Komponente Z_ϱ jeder Kraft $= 0$ und ebenso die dritte Koordinate z_ϱ des Angriffspunktes $= 0$. Also wird von den Koordinaten des Kräftesystems:

$$\mathrm{Z} = \sum \mathrm{Z}_\varrho = 0, \quad \mathrm{L} = \sum (\mathrm{Z}_\varrho y_\varrho - \mathrm{Y}_\varrho z_\varrho) = 0, \quad \mathrm{M} = \sum (\mathrm{X}_\varrho z_\varrho - \mathrm{Z}_\varrho x_\varrho) = 0.$$

Soll nun eine Einzelkraft gefunden werden, die dem Kräftesystem statisch äquivalent ist, so müssen deren Koordinaten der Reihe nach sein:

$$X, \; Y, \; 0, \; 0, \; 0, \; N.$$

Die Komponenten der resultierenden Kraft müssen sonach X, Y, 0 sein, von den Koordinaten x, y, z ihres Angriffspunktes muß $z = 0$ werden, während x, y nur der Gleichung zu genügen brauchen:

$$N = Y x - X y.$$

Wir erhalten also in der Tat eine dem Kräftesystem äquivalente Kraft, die in der durch die vorstehende Gleichung dargestellten geraden Linie der xy-Ebene wirkt. Nur wenn X, Y verschwinden, ist das Kräftesystem nicht einer Einzelkraft, sondern nur einem Kräftepaar äquivalent.

Der zweite Fall ist der, wo alle Kräfte in einem Punkte angreifen oder in Linien wirken, die durch einen und denselben Punkt gehen. Wählen wir diesen Punkt zum Koordinatenursprung, so verschwinden von allen Kräften des Systems die drei letzten Koordinaten L_ϱ, M_ϱ, N_ϱ, mithin wird auch

$$L = \sum L_\varrho = 0, \quad M = \sum M_\varrho = 0, \quad N = \sum N_\varrho = 0,$$

das Vektormoment des Kräftesystems für den Koordinatenursprung ist Null und das System somit einer in diesem Punkte angreifenden Einzelkraft äquivalent.

Der dritte Fall ist der, wo alle Kräfte des Systems parallel gerichtet sind.[1]) Wir wollen diese Richtung festlegen durch die Winkel λ, μ, ν, die sie mit den positiven Koordinatenrichtungen einschließt. Nennen wir dann R_ϱ die positiv oder negativ gerechnete Größe einer Kraft des Systems, so werden ihre Komponenten:

$$X_\varrho = R_\varrho \cos \lambda, \quad Y_\varrho = R_\varrho \cos \mu, \quad Z_\varrho = R_\varrho \cos \nu.$$

Setzen wir also

$$\sum R_\varrho = R, \tag{2}$$

so werden die drei ersten Koordinaten des Kräftesystems:

$$X = \sum X_\varrho = R \cos \lambda, \quad Y = \sum Y_\varrho = R \cos \mu, \quad Z = \sum Z_\varrho = R \cos \nu.$$

Um auch die drei letzten Koordinaten in einer ähnlichen Form auszudrücken, machen wir:

$$\sum R_\varrho x_\varrho = R x_0, \quad \sum R_\varrho y_\varrho = R y_0, \quad \sum R_\varrho z_\varrho = R z_0. \tag{3}$$

1) Die allgemeinen Formeln für diesen Fall hat Varignon gegeben, Hist. de l'Acad. de Paris, Année 1714.

Dann wird z. B.:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mathrm{L} = \sum (\mathrm{Z}_\varrho y_\varrho - \mathrm{Y}_\varrho z_\varrho) &= \sum (\mathrm{R}_\varrho y_\varrho \cos\nu - \mathrm{R}_\varrho z_\varrho \cos\mu) \\ &= \mathrm{R}\,(y_0 \cos\nu - z_0 \cos\mu) \\ &= \mathrm{Z}\,y_0 - \mathrm{Y}\,z_0 \end{aligned}$$

und ähnlich:

$$(4)\qquad \mathrm{M} = \mathrm{X}\,z_0 - \mathrm{Z}\,x_0, \quad \mathrm{N} = \mathrm{Y}\,x_0 - \mathrm{X}\,y_0.$$

Das ganze Kräftesystem ist also einer Einzelkraft äquivalent, deren Komponenten X, Y, Z sind und die in dem Punkte mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 angreift. Die Lage dieses Punktes ist seiner Definitionsweise nach nicht abhängig von der gemeinsamen Richtung der parallelen Kräfte, er heißt der Mittelpunkt derselben. Die resultierende Kraft ist den Kräften des Systems gleichgerichtet, und ihre Größe ist die algebraische Summe von den Größen der letzteren. Denkt man sich alle Kräfte des Systems einer gemeinsamen Drehung um ihre Angriffspunkte unterworfen, so daß sie einander parallel bleiben, dann dreht sich auch ihre resultierende Kraft mit um ihren Angriffspunkt, den Mittelpunkt der parallelen Kräfte, ohne ihre Größe zu ändern.

Die auseinandergesetzte Reduktion des Systems paralleler Kräfte versagt nur dann, wenn

$$\sum \mathrm{R}_\varrho = 0$$

ist, woraus X, Y, Z $= 0$ folgt. Dann nehme man für R_0 eine beliebige Größe und setze:

$$\sum \mathrm{R}_\varrho x_\varrho = \mathrm{R}_0(x - x'), \quad \sum \mathrm{R}_\varrho y_\varrho = \mathrm{R}_0(y - y'), \quad \sum \mathrm{R}_\varrho z_\varrho = \mathrm{R}_0(z - z'),$$

so wird, wenn man $\mathrm{R}_0 \cos\lambda = \mathrm{X}_0$, $\mathrm{R}_0 \cos\mu = \mathrm{Y}_0$, $\mathrm{R}_0 \cos\nu = \mathrm{Z}_0$ macht:

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = \sum (\mathrm{Z}_\varrho y_\varrho - \mathrm{Y}_\varrho z_\varrho) &= \mathrm{R}_0[(y - y')\cos\nu - (z - z')\cos\mu] \\ &= \mathrm{Z}_0(y - y') - \mathrm{Y}_0(z - z') \end{aligned}$$

und ebenso:

$$\mathrm{M} = \mathrm{X}_0(z - z') - \mathrm{Z}_0(x - x'), \quad \mathrm{N} = \mathrm{Y}_0(x - x') - \mathrm{X}_0(y - y').$$

Das Kräftesystem ist demnach einem Kräftepaar äquivalent, von dem eine Kraft die Komponenten X_0, Y_0, Z_0 und die Angriffspunkte die Koordinaten x, y, z und x', y', z' haben. Die Kräfte dieses Paares drehen sich mit den Kräften des Systems um ihre Angriffspunkte, so daß die Äquivalenz erhalten bleibt.

Die Bedingung dafür, daß ein Kräftesystem im statischen Gleichgewichte ist, haben wir in analytischer Fassung durch das Verschwinden der sechs statischen Koordinaten des Kräftesystems gegeben. Es ist aber von Interesse, auch eine geometrische Formulierung dafür zu finden.[1]) Wir gehen dabei aus von dem Gleichgewichte der an einem Punkte angreifenden Kräfte. Nennen wir R_ϱ die Größe einer dieser Kräfte, φ_ϱ den Winkel, den sie mit einer fest gegebenen Richtung r bildet, dann muß der Ausdruck:

$$\sum R_\varrho \cos \varphi_\varrho = 0 \tag{5}$$

sein, wie auch die Richtung r, nach der die Komponenten genommen werden, gewählt sei. Nehmen wir nun irgendein Polyeder, dessen Seitenflächen die Inhalte $R_1, R_2 \ldots$ haben, während ihre nach außen gerichteten Normalen mit einer fest gegebenen Richtung die Winkel $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ einschließen, so wird ebenfalls, wie auch die feste Richtung gewählt sei:

$$\sum R_\varrho \cos \varphi_\varrho = 0.$$

Daraus sehen wir: Nimmt man die an einem bestimmten Punkte angreifenden Kräfte so an, daß sie der Richtung und dem Sinne nach mit den nach außen gerichteten Normalen eines Polyeders übereinstimmen, während sie an Größe dem Inhalte der betreffenden Seitenflächen dieses Polyeders proportional werden, so sind die Kräfte im Gleichgewichte.[2])

Wenn nun die Kräfte nicht mehr an einem Punkte angreifen, dann ist die formulierte Bedingung nicht mehr ausreichend für das Gleichgewicht. Sie bedeutet vielmehr nur das Verschwinden der drei ersten statischen Koordinaten X, Y, Z des Kräftesystems, d. h. das Gleichgewicht der an einen Punkt verlegten Kräfte, und es ist noch eine geometrische Konstruktion zu ersinnen, welche das Verschwinden der drei letzten Koordinaten L, M, N ersetzt. Wir denken uns wieder ein Polyeder, zu dessen Seitenflächen die Kräfte des Systems normal gerichtet und an Größe proportional sind. Dies Polyeder nennen wir das Kräftepolyeder. Von diesem Kräftepolyeder nehmen wir nun die Polarfigur bezüglich irgendeiner Kugel, deren Mittelpunkt wir S nennen und, um die Vorstellung zu fixieren, im Inneren des Kräftepolyeders annehmen wollen. Die Polarfigur ist wieder ein Polyeder, das ebensoviel Seitenflächen hat wie das Kräftepolyeder Ecken und ebensoviel Ecken wie das letztere Seitenflächen. Seine Seitenflächen sind den Ecken, seine Ecken den Seitenflächen, seine Kanten den Kanten des Kräftepolyeders in eindeutiger Weise zugeordnet. Seine Seitenflächen sind senkrecht zu den Strahlen, die von dem Mittelpunkte S nach den entsprechenden Ecken des Kräftepolyeders hinführen, seine Kanten sind also senkrecht zu den Ebenen, welche den

1) Hierzu kann man vergleichen Zucchetti, Atti della R. Accad. di Torino, XII, 1876, p. 44.

2) Rankine, A Manual of applied Mechanics, 1857, p. 137.

Punkt S mit den entsprechenden Kanten des Kräftepolyeders verbinden. Statt dieses polaren Polyeders können wir nun irgendein anderes Polyeder von derselben Struktur nehmen, dessen Seitenflächen denen des polaren Polyeders parallel sind. Ein solches Polyeder wollen wir als Seilpolyeder bezeichnen. Von demselben gelten alle die Eigenschaften, die von dem polaren Polyeder aufgezählt sind. Bringt man nun in jeder Ecke des Seilpolyeders eine Kraft an, die zu der entsprechenden Seitenfläche des Kräftepolyeders normal gerichtet und ihr an Größe proportional ist, so sind alle diese Kräfte im Gleichgewicht.

Um dieses nachzuweisen, bringt man in den Kanten des Seilpolyeders je zwei Kräfte an, die einander entgegengesetzt gleich sind. Ihre Größe soll proportional sein der zu der betreffenden Kante normalen Dreiecksfläche, welche der Punkt S mit einer Kante des Kräftepolyeders bestimmt. Die Kräfte, die man dann in den von einer Ecke des Seilpolyeders ausgehenden Kanten erhält, sind so den Dreiecksflächen zugeordnet, die den Punkt S mit dem Rande der entsprechenden Seitenfläche des Kräftepolyeders verbinden. Diese Dreiecksflächen bilden aber mit der zugehörigen Seitenfläche des Kräftepolyeders zusammen wieder ein geschlossenes Polyeder, nämlich eine Pyramide, und wenn man den Sinn der Kräfte in den Kanten des Seilpolyeders entsprechend wählt, nämlich so, daß er der nach außen gerichteten Normalen auf der zugehörigen Seitenfläche der Pyramide entspricht (vorausgesetzt, daß die Kraft, die der gemeinsamen Seitenfläche der Pyramide und des Kräftepolyeders entspricht, die Richtung der nach dem Äußeren der Pyramide gehenden Normale hat), so besteht Gleichgewicht zwischen den Kräften, die an der Ecke des Seilpolyeders wirken, denn diese Kräfte sind mit den äußeren Normalen der Pyramide gleichgerichtet und ihnen der Größe nach proportional. Dies gilt in gleicher Weise für alle Ecken des Seilpolyeders. Dabei kommen die Kräfte in jeder Kante des Polyeders doppelt vor, und zwar in der Tat mit gleicher Größe, aber entgegengesetztem Sinne, denn dieselbe Dreiecksfläche kommt bei zwei Pyramiden vor, und die Normale, die für die eine Pyramide nach außen gerichtet, ist für die andere nach innen gerichtet. Die Kräfte in den Kanten des Seilpolyeders beeinflussen also das Gleichgewicht des ganzen Systems nicht, indem sie sich paarweise aufheben. Besteht mithin, wie wir gesehen haben, an jeder Ecke des Seilpolyeders Gleichgewicht, so ist auch das ganze Kräftesystem im Gleichgewicht, w. z. b. w.[1])

Nur von sieben und mehr Kräften, die im Gleichgewichte sind, können die Linien, in denen sie wirken, beliebig gewählt werden.

1) Man vgl. zu diesem Abschnitte Rankine, Philos. Magaz. (4), vol. 27 (1864), p. 92.

Beträgt die Anzahl der Kräfte nicht über sechs, so unterliegt die Lage dieser Linien gewissen Einschränkungen. Diese Beziehungen zwischen den Wirkungslinien im Gleichgewicht befindlicher Kräfte wollen wir jetzt aufsuchen.

Ist die Zahl der Kräfte zwei, so müssen die Wirkungslinien zusammenfallen, die Kräfte selbst haben gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung. Ist die Zahl der Kräfte drei und sind diese nicht parallel, so müssen ihre Wirkungslinien durch einen Punkt gehen und in einer Ebene liegen. Tragen wir von dem gemeinsamen Angriffspunkt O aus die Kräfte der Größe und Richtung nach als Strecken OA, OB, OC ab, so ist O der Schwerpunkt, d. h. der Schnittpunkt der Mittellinien des Dreiecks ABC. Dieser Satz ist als eine einfache Umformung des Parallelogrammgesetzes leicht zu beweisen und schon von Varignon (1722) angegeben worden.[1] Die Wirkungslinien der Kräfte können auch parallel sein und in einer Ebene liegen.

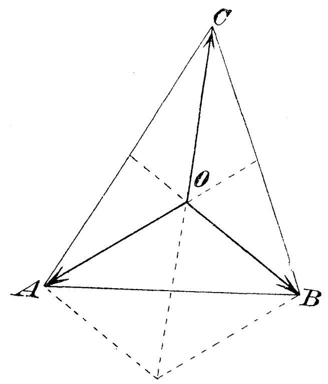

Fig. 12.

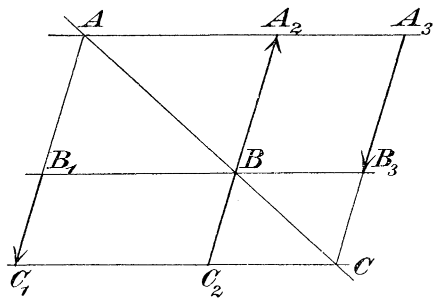

Fig. 13.

Die Bestimmung der Größe dieser Kräfte erfolgt dann nach dem Archimedischen Hebelgesetze, dem man folgende geometrische Fassung geben kann: Man schneide die drei parallelen Wirkungslinien durch irgendeine Transversale. Durch die Schnittpunkte A, B, C derselben ziehe man parallele Linien von beliebiger Richtung, von diesen schneide die durch A gehende die zweite und dritte Wirkungslinie in A_2 und A_3, die durch B gehende die erste und dritte Wirkungslinie in B_1 und B_3, die durch C gehende die erste und zweite Wirkungslinie in C_1 und C_2, dann stellen die Strecken $B_1 C_1$, $C_2 A_2$, $A_3 B_3$ drei Kräfte in den drei Wirkungslinien dar, die im Gleichgewichte sind. Es wird nämlich $C_2 A_2 = -(B_1 C_1 + A_3 B_3)$ und das Parallelogramm $B_1 C_1 C_2 B$ inhaltsgleich dem Parallelogramm $B A_2 A_3 B_3$, worin das Hebelgesetz liegt.

1) Nouvelle Mécanique, vol. I, p. 127.

Beträgt die Zahl der Kräfte vier bis sechs, so wollen wir annehmen, daß keine zwei ihrer Wirkungslinien in einer Ebene liegen, da solche zwei Kräfte sich sofort zu einer Kraft vereinigen lassen. Wir wollen ferner die Koordinaten ihrer Wirkungslinien bezeichnen mit

$$\mathfrak{x}_i, \quad \mathfrak{y}_i, \quad \mathfrak{z}_i, \quad \mathfrak{l}_i, \quad \mathfrak{m}_i, \quad \mathfrak{n}_i, \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, \nu)$$

wenn ν eine der Zahlen 4, 5, 6 bedeutet. Die Forderung des Gleichgewichtes bedingt es dann, daß sechs Gleichungen von der Form:

$$\sum R_i \mathfrak{x}_i = 0, \quad \sum R_i \mathfrak{y}_i = 0, \quad \sum R_i \mathfrak{z}_i = 0,$$
$$\sum R_i \mathfrak{l}_i = 0, \quad \sum R_i \mathfrak{m}_i = 0, \quad \sum R_i \mathfrak{n}_i = 0$$

bestehen. Diese Beziehungen haben aber zur Folge, daß jede lineare Gleichung:

$$(1) \qquad L\,\mathfrak{x}_i + M\,\mathfrak{y}_i + N\,\mathfrak{z}_i + X\,\mathfrak{l}_i + Y\,\mathfrak{m}_i + Z\,\mathfrak{n}_i = 0,$$

die für die Koordinaten von $\nu - 1$ der ν Wirkungslinien befriedigt ist, auch für die letzte dieser Linien gilt. Diese letzte Linie gehört also immer dem linearen Strahlensysteme an, das durch die übrigen bestimmt ist. Indem wir die einzelnen Fälle sondern, finden wir: Wenn vier Kräfte im Gleichgewichte sind, gehören ihre vier Wirkungslinien der einen Regelschar einer Regelfläche zweiten Grades an. Wenn fünf Kräfte im Gleichgewichte sind, gehören ihre Wirkungslinien einer linearen Strahlenkongruenz an, und wenn sechs Kräfte im Gleichgewichte sind, gehören ihre Wirkungslinien immer zu demselben linearen Komplex. Die analytische Bedingung hierfür wird durch das Verschwinden der folgenden Determinante[1]) gegeben:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & L_1 & M_1 & N_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & L_2 & M_2 & N_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & L_3 & M_3 & N_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & L_4 & M_4 & N_4 \\ X_5 & Y_5 & Z_5 & L_5 & M_5 & N_5 \\ X_6 & Y_6 & Z_6 & L_6 & M_6 & N_6 \end{vmatrix}$$

Den vorletzten der vorstehenden Sätze kann man auch so formulieren: Wenn zwei gerade Linien vier von den fünf Wirkungslinien treffen, so schneiden sie auch die fünfte. Solche zwei reelle Linien brauchen aber nicht notwendig vorhanden zu sein, und wenn sie es nicht sind, versagt das Kriterium. Man kann aber auch eine Beschreibung von der gegenseitigen Lage der fünf Wirkungslinien geben, die von einem jeden Imaginärwerden unabhängig ist. Z. B. kann man eine beliebige der fünf Linien, p, herausgreifen und mit den übrigen vier paarweise durch eine Regelfläche zweiten Grades

1) Charakter und Bedeutung dieser Determinante sind von Walton untersucht worden, Quarterly Journal, vol. 4, p. 252.

verbinden. So erhält man zwei Regelflächen, die zusammen alle fünf Linien enthalten und sich in einer derselben schneiden. Sie durchschneiden sich dann notwendig noch in einer zweiten, zur ersten windschiefen, reellen geraden Linie p'. (Die beiden Leitlinien der Kongruenz, welche den zwei Regelflächen als zwei alle fünf Wirkungslinien treffende Strahlen außerdem gemeinsam sein müssen, übergehen wir jetzt, da sie auch imaginär werden können.) Es ergibt sich so: Greifen wir eine der fünf Wirkungslinien heraus und teilen die übrigen vier in zwei Paare ein, ziehen wir dann durch einen beliebigen Punkt der ersten Linie die Strahlen l und l', welche die Linien je eines Paares treffen, so geht die Verbindungsebene dieser beiden Strahlen l, l' immer durch eine und dieselbe gerade Linie p' hindurch, wie auch der Punkt auf der ersten Wirkungslinie angenommen werden mag. Diese gerade Linie p' haben die beiden Regelflächen gemein, und sie wird auf beiden Flächen von jedem Strahl der anderen Regelschar geschnitten. Die Strahlen l und l' gehören aber, der eine auf der einen, der andere auf der anderen Regelfläche, der Regelschar an, die p' nicht enthält, und da sie deshalb beide p' schneiden, muß ihre Verbindungsebene durch p' hindurchgehen, was die Behauptung war.[1])

Wir wollen nun zu den Wirkungslinien der ν Kräfte, deren Größen wir mit $R_1, R_2 \ldots R_\nu$ bezeichnen, eine beliebige Bezugslinie einführen. Wir nennen d_ϱ ihren kürzesten Abstand von der ϱ^{ten} Wirkungslinie und φ_ϱ den Winkel, unter dem sie diese kreuzt. Dann ist die erste Bedingung des Gleichgewichts, daß die algebraische Summe der Projektionen aller ν Kräfte auf die angenommene Bezugslinie verschwindet. Diese Bedingung führt zu der Gleichung:

$$\sum R_\varrho \cos \varphi_\varrho = 0. \tag{5}$$

Die zweite Bedingung ist die, daß das Moment des Kräftesystems für die Bezugslinie verschwindet, und wird durch die Gleichung gegeben:

$$\sum R_\varrho d_\varrho \sin \varphi_\varrho = 0. \tag{6}$$

Wir wählen insbesondere für die Bezugslinie die σ^{te} Wirkungslinie und schreiben dann $\varphi_{\varrho\sigma}$ für φ_ϱ und $d_{\varrho\sigma}$ für d_ϱ, wobei zu beachten ist, daß $\varphi_{\sigma\sigma} = 0$ und $d_{\sigma\sigma} = 0$ wird. So erhalten wir statt der vorhergehenden beiden Gleichungen die folgenden:

$$\sum R_\varrho \cos \varphi_{\varrho\sigma} = 0, \quad \sum R_\varrho d_{\varrho\sigma} \sin \varphi_{\varrho\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1, 2 \ldots \nu). \tag{7}$$

---

1) Man vgl. auch den kleinen Aufsatz von Chasles, Comptes Rendus, t. 52, 1861, p. 745, in dem er die geometrischen und kinematischen Beziehungen zwischen Kräften, die im Gleichgewicht sind, auseinandersetzt.

Wir führen der Einfachheit halber die abkürzende Bezeichnung ein:

$$d_{\varrho\sigma} \sin \varphi_{\varrho\sigma} = (\varrho\,\sigma), \tag{8}$$ [1]

wobei $(\varrho\,\sigma) = (\sigma\,\varrho)$ wird [vgl. S. 50 oben], und schreiben dann die zweite der Gleichungen für $\sigma = 1, 2 \ldots \nu$ ausführlicher:

$$\begin{array}{r} (12)R_2 + (13)R_3 + \cdots + (1\nu)R_\nu = 0 \\ (21)R_1 + (23)R_3 + \cdots + (2\nu)R_\nu = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\nu 1)R_1 + (\nu 2)R_2 + (\nu 3)R_3 + \cdots\cdots \qquad = 0 \end{array} \tag{7a}$$

Durch Elimination von $R_1, R_2 \ldots R_\nu$ aus diesen Gleichungen[2]) folgt:

$$D = 0, \tag{9^0}$$

wenn:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) \ldots (1\nu) \\ (21) & 0 & (23) \ldots (2\nu) \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots \\ (\nu 1) & (\nu 2) & (\nu 3) \ldots \; 0 \end{vmatrix} \tag{9}$$

gesetzt wird.[3]). Wir bezeichnen noch mit $D_{\varrho\sigma}$ die Unterdeterminante dieser Determinante D, die dem σ^{ten} Elemente der ϱ^{ten} Zeile adjungiert ist. Mit Hilfe dieser Unterdeterminanten ist es dann leicht, die Auflösung der Gleichungen (7a) hinzuschreiben. Von diesen Gleichungen wird infolge der Bedingung $D = 0$ eine überzählig. Lassen wir z. B. die erste von ihnen weg, so ergibt sich nach den allgemeinen Regeln für die Auflösung homogener linearer Gleichungen:

$$R_1 : R_2 = D_{11} : D_{12}.$$

Ebenso ergibt sich bei Weglassung der zweiten Gleichung:

$$R_1 : R_2 = D_{21} : D_{22}.$$

Da aber die Determinante D symmetrisch ist, d. h. $(\varrho\,\sigma) = (\sigma\,\varrho)$, wird auch $D_{\varrho\sigma} = D_{\sigma\varrho}$, insbesondere $D_{12} = D_{21}$. Wenn wir demnach die vorstehenden Proportionen miteinander multiplizieren, ergibt sich:

$$R_1{}^2 : R_2{}^2 = D_{11} : D_{22},$$

und wir können das Lösungssystem der Gleichungen (7a) schreiben:

$$R_1 : R_2 : R_3 \ldots : R_\nu = \sqrt{D_{11}} : \sqrt{D_{22}} : \sqrt{D_{33}} \ldots : \sqrt{D_{\nu\nu}}. \tag{10}$$

1) Diese Größe heißt nach Cayley (Comptes Rendus, t. 61 (1865), p. 829, Collected Papers V, p. 542) das Moment der beiden Linien. Diese Bezeichnung ist mit der unsrigen identisch, wenn man Linie und Liniengröße von der Länge 1 identifiziert.

2) Dieselben rühren von Spottiswoode her, Comptes Rendus, t. 66 (1868), p. 97.

3) Dies hat schon Sylvester gefunden, Comptes Rendus, t. 52 (1861), p. 815.

Im Falle $\nu = 4$ wird die Gleichung $D = 0$:

$$(11) \qquad \sqrt{(23)(14)} + \sqrt{(31)(24)} + \sqrt{(12)(34)} = 0.$$ [1]

Wenn man diese Gleichung rational macht, ergibt sich in der Tat dasselbe, als wenn die Determinante D für $\nu = 4$ ausgerechnet gleich Null gesetzt wird. Da die vier Wirkungslinien nur der Bedingung unterliegen, daß sie der einen Regelschar einer Regelfläche zweiten Grades angehören, muß für vier solche Linien die Gleichung (11) immer erfüllt sein. In dem vorliegenden Falle wird die Proportion (10):

$$(12) \qquad R_1 : R_2 : R_3 : R_4 = \sqrt{(23)(34)(42)} : \sqrt{(34)(41)(13)} \\ : \sqrt{(41)(12)(24)} : \sqrt{(12)(23)(31)}.$$

Diese Darstellung hat schon Moebius gefunden.[2]) Es folgt aus derselben z. B.:

$$R_1 R_2 (12) = R_3 R_4 (34)$$

oder:

$$(13) \qquad R_1 R_2 d_{12} \sin \varphi_{12} = R_3 R_4 d_{34} \sin \varphi_{34}.$$

Diese Gleichung hat aber folgende Bedeutung: *Stellen wir die vier im Gleichgewicht befindlichen Kräfte durch Strecken auf ihren Wirkungslinien dar und teilen diese vier Strecken irgendwie in zwei Paare ein, dann werden die beiden Tetraeder, welche die Strecken jedes der beiden Paare als zwei Gegenkanten bestimmen, einander an Volumen gleich.* Dieser Satz rührt von Chasles her. Es ist derselbe Satz, der früher am Ende des siebenten Kapitels gegeben ist, da irgend zwei der vier Kräfte dieselbe Dyname ergeben wie die übrigen zwei, wenn man deren Richtung umkehrt.

Wir können im Falle von vier Kräften die Größe derselben auch aus den ersten der Gleichungen (7) berechnen, die sich jetzt schreiben:

$$(14) \qquad \begin{cases} R_1 + \cos\varphi_{12} R_2 + \cos\varphi_{13} R_3 + \cos\varphi_{14} R_4 = 0, \\ \cos\varphi_{21} R_1 + R_2 + \cos\varphi_{23} R_3 + \cos\varphi_{24} R_4 = 0, \\ \cos\varphi_{31} R_1 + \cos\varphi_{32} R_2 + R_3 + \cos\varphi_{34} R_4 = 0, \\ \cos\varphi_{41} R_1 + \cos\varphi_{42} R_2 + \cos\varphi_{43} R_3 + R_4 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind genau ebenso wie oben die Gleichungen (7a) aufzulösen. Dabei ist aber zu beachten, daß z. B. die Determinante

1) Cayley hat (Comptes Rendus, t. 61, p. 830, Papers V, p. 543) die allgemeine Bedeutung dieser Gleichung dahin erklärt, daß für vier Strahlen, die ihr genügen, die beiden sie alle treffenden geraden Linien zusammenfallen oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß jede von ihnen die durch die übrigen drei bestimmte Regelfläche berührt. Daß die vier Strahlen einer Regelschar angehören, ist eine weitergehende Spezialisierung. 2) Lehrbuch der Statik I, § 103.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_{12} & \cos\varphi_{13} \\ \cos\varphi_{21} & 1 & \cos\varphi_{23} \\ \cos\varphi_{31} & \cos\varphi_{32} & 1 \end{vmatrix},$$

die hier die Stelle des D_{44} vertritt, eine einfache geometrische Bedeutung hat. Sie ist nämlich gleich dem Quadrate des Sinus der räumlichen Ecke, welche die Richtungen der drei ersten Wirkungslinien bestimmen. Wenn für den Augenblick die Richtungskosinus dieser drei Linien mit

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1; \quad \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2; \quad \xi_3,\ \eta_3,\ \zeta_3$$

bezeichnet werden, so läßt sich der genannte Sinus definieren durch die Gleichung:

$$\sin(123) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}.$$

Erheben wir die linke und rechte Seite dieser Gleichung ins Quadrat, so entsteht nach einer bekannten Rechenregel für Determinanten:

$$\sin(123)^2 = \begin{vmatrix} \xi_1^{\,2} + \eta_1^{\,2} + \zeta_1^{\,2} & \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2 & \xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3 + \zeta_1\zeta_3 \\ \xi_2\xi_1 + \eta_2\eta_1 + \zeta_2\zeta_1 & \xi_2^{\,2} + \eta_2^{\,2} + \zeta_2^{\,2} & \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3 \\ \xi_3\xi_1 + \eta_3\eta_1 + \zeta_3\zeta_1 & \xi_3\xi_2 + \eta_3\eta_2 + \zeta_3\zeta_2 & \xi_3^{\,2} + \eta_3^{\,2} + \zeta_3^{\,2} \end{vmatrix}.$$

Die auf der rechten Seite stehende Determinante ist aber, da:

$$\xi_1^{\,2} + \eta_1^{\,2} + \zeta_1^{\,2} = 1, \quad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2 = \cos\varphi_{12} \quad \text{usw.}$$

wird, mit der vorher angegebenen Determinante identisch. So erhalten wir als Lösung der Gleichungen (14):

$$(15) \qquad R_1 : R_2 : R_3 : R_4 = \sin(234) : \sin(341) : \sin(412) : \sin(123).$$

Für das Quadrat des $\sin(123)$ bekommen wir nach einer Formel für die Beziehung einer Determinante zu der aus ihren Unterdeterminanten gebildeten Determinante die weitere Gleichung:

$$\sin(123)^2 = \begin{vmatrix} \eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2 & \zeta_2\xi_3 - \zeta_3\xi_2 & \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 \\ \eta_3\zeta_1 - \eta_1\zeta_3 & \zeta_3\xi_1 - \zeta_1\xi_3 & \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 \\ \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1 & \zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1 & \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \end{vmatrix}.$$

Betrachten wir aber die körperliche Ecke, welche drei zu den drei Wirkungslinien normale Ebenen bilden, und nennen

$$\xi_1',\ \eta_1',\ \zeta_1'; \quad \xi_2',\ \eta_2',\ \zeta_2'; \quad \xi_3',\ \eta_3',\ \zeta_3'$$

die Richtungskosinus der Kanten dieser Ecke, so numeriert, daß die erste der Kanten zu der zweiten und dritten Wirkungslinie normal ist usw., dann finden wir, da:

$$\sqrt{(\eta_2\zeta_3-\eta_3\zeta_2)^2+(\zeta_2\xi_3-\zeta_3\xi_2)^2+(\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2)^2}=\sin\varphi_{23},$$
$$\sqrt{(\eta_3\zeta_1-\eta_1\zeta_3)^2+(\zeta_3\xi_1-\zeta_1\xi_3)^2+(\xi_3\eta_1-\xi_1\eta_3)^2}=\sin\varphi_{31},$$
$$\sqrt{(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)^2+(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)^2+(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)^2}=\sin\varphi_{12},$$

daß:

$$\xi_1'=\frac{\eta_2\zeta_3-\eta_3\zeta_2}{\sin\varphi_{23}},\quad \eta_1'=\frac{\zeta_2\xi_3-\zeta_3\xi_2}{\sin\varphi_{23}},\quad \zeta_1'=\frac{\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2}{\sin\varphi_{23}}$$

usw.

wird, mithin erhalten wir für den Sinus der von den drei Ebenen gebildeten räumlichen Ecke [123]:

$$(16)\qquad \sin[123]=\begin{vmatrix}\xi_1' & \eta_1' & \zeta_1'\\ \xi_2' & \eta_2' & \zeta_2'\\ \xi_3' & \eta_3' & \zeta_3'\end{vmatrix}=\frac{\sin(123)^2}{\sin\varphi_{23}\sin\varphi_{31}\sin\varphi_{12}}.$$

Denkt man sich den hieraus folgenden Wert von $\sin(123)$ und die entsprechenden Werte von $\sin(234)$ usw. in die Proportion (15) eingesetzt und vergleicht die sich so ergebenden Verhältniswerte von R_1^2, $R_2^2 \ldots$ mit den durch (12) gegebenen, so wird z. B.:

$$\frac{(23)(34)(42)}{\sin\varphi_{23}\sin\varphi_{34}\sin\varphi_{42}\sin[234]}=\frac{(34)(41)(13)}{\sin\varphi_{34}\sin\varphi_{41}\sin\varphi_{13}\sin[341]},$$

und wenn wir die Werte der Symbole (23), (34) ... gemäß (8) einsetzen, vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$\frac{d_{23}d_{24}}{\sin[234]}=\frac{d_{13}d_{14}}{\sin[134]}.$$

So sieht man, daß:

$$(17)\qquad d_{12}d_{13}d_{14}\sin[234]=d_{23}d_{24}d_{21}\sin[341]$$
$$=d_{34}d_{31}d_{32}\sin[412]=d_{41}d_{42}d_{43}\sin[123]$$

ist, und aus dem Vergleich dieser Formel mit der Formel, die auf vierfache Art dasselbe Tetraedervolumen darstellt, ist zu erkennen, daß wenn die Kanten eines Tetraeders an Länge gleich den kürzesten Abständen der vier Wirkungslinien gemacht werden, die Sinus der räumlichen Ecken dieses Tetraeders proportional sind den Sinus der räumlichen Ecken des Tetraeders, dessen Seitenflächen normal zu den Wirkungslinien sind. Gleichzeitig werden die in den Linien wirkenden Kräfte nach einem früher gefundenen Satze an Größe proportional den Seitenflächen des letzteren Tetraeders.

Zehntes Kapitel.

Die Ballschen Schrauben.

Die Dynamen, welche wir im siebenten Kapitel eingeführt haben, stehen in einer durchgehenden Analogie zu den momentanen Bewegungen oder Schraubungen. Diese Analogie ist als die unmittelbare Erweiterung derjenigen anzusehen, die sich zwischen translatorischen und rotatorischen Liniengrößen ergibt. Eine Dyname wird nämlich durch einen Ausdruck von folgender Gestalt gegeben:

$$(1) \qquad \Delta = X[0i] + Y[0j] + Z[0k] + L[jk] + M[ki] + N[ij].$$

Diesem steht der analoge Ausdruck gegenüber:

$$(2) \qquad \mathsf{E} = p[JK] + q[KI] + r[IJ] + u[I\Omega] + v[J\Omega] + w[K\Omega],$$

in dem die binären Produkte der Punkteinheiten durch die binären Produkte der Ebeneneinheiten ersetzt sind. Diese Ausdrücke sind von denen für die beiden Arten von Liniengrößen nur dadurch unterschieden, daß die Bedingungen:

$$XL + YM + ZN = 0 \quad \text{und} \quad pu + qv + rw = 0$$

in Wegfall kommen, sie sind also als die unmittelbare analytische Erweiterung dieser Liniengrößen anzusehen. Wir wollen für den Augenblick in Rücksicht auf die völlig übereinstimmende analytische Darstellung die kinematischen und dynamischen Begriffe mit den entsprechenden geometrischen Begriffen direkt identifizieren, also eine Kraft mit einer translatorischen Liniengröße, eine momentane Drehung mit einer rotatorischen Liniengröße für gleichbedeutend halten, was sie in Wirklichkeit nur dann sind, wenn wir die Kraft direkt als Strecke geben und bei der Messung des sehr kleinen Ebenenwinkels eine unendlich kleine Einheit verwenden, die den Charakter einer Zeit hat. Es ist hierbei also eine Konvention über die zugrunde gelegte Einheit und eine Abstraktion von deren spezifischer Eigenart nötig.[1])

Wir können unter diesen Voraussetzungen den Ausdruck E als die Darstellung einer Schraubung ansehen und ihn, um ein neues Wort zu sparen, direkt als eine Schraubung bezeichnen. So tritt er dem Ausdrucke Δ, der eine Dyname bedeutet, als dualistisch entsprechender Ausdruck gegenüber, genau ebenso wie früher der translatorischen die rotatorische Liniengröße gegenübergestellt wurde.

---

1) Die Bedeutung der Einheiten für die Charakterisierung einer Größenart hat F. Klein in der S. 58 Anm. zitierten Arbeit hervorgehoben.

Diese Gegenüberstellung läßt sich auf eine einfache Darstellungsform bringen, wenn wir die auf S. 57 verwendete Bezeichnung der Einheiten benutzen. Danach haben wir zu setzen:

$$\text{(1a)} \qquad \mathsf{\Delta} = \mathrm{X}\boldsymbol{\mathfrak{i}} + \mathrm{Y}\boldsymbol{\mathfrak{j}} + \mathrm{Z}\boldsymbol{\mathfrak{k}} + \mathrm{L}\mathfrak{i} + \mathrm{M}\mathfrak{j} + \mathrm{N}\mathfrak{k},$$

$$\text{(2a)} \qquad \mathsf{E} = \mathrm{p}|\boldsymbol{\mathfrak{i}} + \mathrm{q}|\boldsymbol{\mathfrak{j}} + \mathrm{r}|\boldsymbol{\mathfrak{k}} + \mathrm{u}|\mathfrak{i} + \mathrm{v}|\mathfrak{j} + \mathrm{w}|\mathfrak{k}.$$

Bei dieser Bezeichnung liegt es nahe:

$$\text{(3)} \qquad \mathsf{\Delta} = |\mathsf{E}$$

zu setzen, wenn:

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{X} = \mathrm{p}, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{q}, \quad \mathrm{Z} = \mathrm{r}, \quad \mathrm{L} = \mathrm{u}, \quad \mathrm{M} = \mathrm{v}, \quad \mathrm{N} = \mathrm{w}$$

ist.

Hiernach wird $[\mathsf{\Delta}|\mathsf{E}]$ das Produkt der zwei Dynamen:

$$\text{(1a)} \qquad \mathsf{\Delta} = \mathrm{X}\boldsymbol{\mathfrak{i}} + \mathrm{Y}\boldsymbol{\mathfrak{j}} + \mathrm{Z}\boldsymbol{\mathfrak{k}} + \mathrm{L}\mathfrak{i} + \mathrm{M}\mathfrak{j} + \mathrm{N}\mathfrak{k},$$

$$\text{(5)} \qquad |\mathsf{E} = \mathrm{p}\boldsymbol{\mathfrak{i}} + \mathrm{q}\boldsymbol{\mathfrak{j}} + \mathrm{r}\boldsymbol{\mathfrak{k}} + \mathrm{u}\mathfrak{i} + \mathrm{v}\mathfrak{j} + \mathrm{w}\mathfrak{k}.$$

Dieses Produkt besteht aus der Größe ε und einem Zahlfaktor. Den Zahlfaktor wollen wir schreiben $\mathsf{\Delta}|\mathsf{E}$ und finden dann:

$$\text{(5)} \qquad \mathsf{\Delta}|\mathsf{E} = \mathrm{Xu} + \mathrm{Yv} + \mathrm{Zw} + \mathrm{Lp} + \mathrm{Mq} + \mathrm{Nr}.$$

Die Bedeutung dieses Ausdruckes ist von früher her bekannt, er stellt die Arbeitsleistung eines Kräftesystems, das zu der Dyname $\mathsf{\Delta}$ gehört, bei der Schraubung E dar. Er ist, da diese Arbeitsleistung sich ursprünglich als eine Summe von inneren Produkten ergibt, notwendig ein Skalar erster Art.

Um die durch die Gleichungen (4) gegebene Zuordnung zu analysieren, legt man am einfachsten die z-Achse in die Achse der Schraubung, dann wird unter Anwendung der früheren Bezeichnungen:

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{p} = 0, \quad \mathrm{q} = 0, \quad \mathrm{r} = \omega, \quad \mathrm{u} = 0, \quad \mathrm{v} = 0, \quad \mathrm{w} = \vartheta.$$

Die z-Achse wird gleichzeitig die Zentralachse der zugeordneten Dyname, und wir haben zu setzen:

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = \mathrm{R}, \quad \mathrm{L} = 0, \quad \mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = \mathrm{S}.$$

Die Schraubung ist zerlegt in die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Schraubenachse und die Gleitung mit der Geschwindigkeit ϑ längs dieser Achse. Die Dyname ist erzeugt durch eine Einzelkraft R in der Zentralachse, d. h. der z-Achse, und ein Kräftepaar vom Moment S in der xy-Ebene oder einer dazu parallelen, d. h. zur Zentralachse normalen Ebene.

Es muß also bei der in Rede stehenden Zuordnung erstens die Achse der Schraubung mit der Zentralachse der Dyname zusammenfallen, zweitens der Sinn der Drehung um die Schraubenachse mit dem Sinn der Einzelkraft in der Zentralachse der Dyname gleichstimmig sein und ebenso der Sinn der Gleitung längs der Schraubenachse mit dem Drehungssinn des zu der Dyname gehörigen Kräftepaares, endlich muß drittens die Translationsgeschwindigkeit dem Moment des Kräftepaares und die Drehgeschwindigkeit der Größe der Einzelkraft gleich sein.

Die Zuordnung setzt also eine Konvention über das Entsprechen von Drehungs- und Richtungssinn voraus, die wir uns so getroffen denken, daß für einen aufrecht in den Richtungssinn gestellten Beobachter der Drehungssinn entgegen dem Uhrzeiger ist. Die Zuordnung setzt ferner voraus, daß die Zeit- und Längeneinheiten ein für allemal festgelegt sind, und wenn man sich die Kräfte nicht sogleich als Längen gegeben denkt, auch eine Festsetzung über die Beziehung von Krafteinheit und Längeneinheit. Diese letztere Festsetzung läßt sich vermeiden, wenn man die Koordinaten der Dyname und der Schraubung nicht unmittelbar einander gleich setzt, sondern einander proportional annimmt. Die Verschiedenheit der zugrunde liegenden Einheiten kann dann in den Proportionalitätsfaktor hineingelegt werden. Die durchgängige Analogie zwischen Dynamen und Schraubungen, die aus der angegebenen Zuordnung folgt, bleibt auch bei dieser veränderten Form der letzteren erhalten.

Statt nun aber die Koordinaten der Dyname und der Schraubung einander direkt proportional anzunehmen, kann man sie auch den Koordinaten einer dritten, analogen Größe proportional setzen. Diese dritte Größe muß, soweit nur das Geometrische in Frage kommt, den Charakter der mit ihr in Beziehung gesetzten Größen, der Dynamen und Schraubungen, besitzen, dagegen kann man voraussetzen, daß alles nicht Geometrische, das Dynamische oder Kinematische, von ihr abgestreift ist. Dieses geometrische Gebilde erscheint dann als der gemeinsame Träger der Dyname und der Schraubung, und dieser geometrische Träger ist es, den Sir Robert St. Ball als Schraube bezeichnet hat.[1])

Wir können ihn durch seine Koordinaten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ einführen, mit denen die Koordinaten der Dyname und der Schraubung in folgender Weise zusammenhängen sollen:

$$(8)\quad X = \mathfrak{R}\mathfrak{p},\quad Y = \mathfrak{R}\mathfrak{q},\quad Z = \mathfrak{R}\mathfrak{r},\quad L = \mathfrak{R}\mathfrak{u},\quad M = \mathfrak{R}\mathfrak{v},\quad N = \mathfrak{R}\mathfrak{w},$$

$$(9)\quad p = \omega\mathfrak{p},\quad q = \omega\mathfrak{q},\quad r = \omega\mathfrak{r},\quad u = \omega\mathfrak{u},\quad v = \omega\mathfrak{v},\quad w = \omega\mathfrak{w}.$$

$\mathfrak{R}$ ist hierbei die resultierende Einzelkraft der Dyname, ω die Winkelgeschwindigkeit der in der Schraubung enthaltenen Rotation. Da:

1) Zuerst in der am 13. Nov. 1871 der irischen Akademie überreichten Arbeit The Theory of Screws (Transactions of the Roy. Ir. Acad. vol. 25, p. 137). Alle früheren Untersuchungen Balls sind zusammengefaßt in dem Werke Theory of Screws, Cambridge 1900.

$$(10) \qquad \mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}, \quad \omega = \sqrt{\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2}$$

ist, muß:

$$(11) \qquad \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2 = 1$$

werden. Wenn wir nun die geometrischen Bestimmungen zusammensuchen, welche die sechs Werte $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \ldots$ involvieren, so sind dies: erstens eine bestimmte gerade Linie, welche die Schraubenachse der Schraubung oder Zentralachse der Dyname bildet, zweitens ein bestimmter Richtungs- oder Drehungssinn, der mit dieser geraden Linie verknüpft ist, was beides infolge der Zuordnung von Richtungs- und Drehungssinn auf dasselbe hinauskommt, endlich drittens ein bestimmter Parameter[1]), der jener geraden Linie beigeschrieben wird. Denn $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \ldots$ lassen sich auch als die Koordinaten einer Schraubung ansehen, für die $\omega = 1$ wird. Die Translationsgeschwindigkeit $\vartheta = k$ dieser Schraubung ist dann der in Rede stehende Parameter, dieser wird also gegeben durch den Ausdruck:

$$(12) \qquad k = \mathfrak{u}\mathfrak{p} + \mathfrak{v}\mathfrak{q} + \mathfrak{w}\mathfrak{r}.$$

Er ist der Parameter irgendeiner Dyname oder Schraubung, welche zu der Schraube gehört.

Der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen wollen wir uns den Gedanken, welcher der Einführung der Schrauben zugrunde liegt, noch auf die folgende Weise klarmachen:

Es liegt nahe, die Achse einer Drehung als den Träger der Drehung zu bezeichnen. Ebenso kann man auch von dem Träger einer Kraft sprechen. Denn soweit es sich nur um statische Äquivalenz handelt, kann der Angriffspunkt einer Kraft auf einer geraden Linie, deren Richtung mit der Richtung der Kraft zusammenfällt, beliebig gewählt werden, und diese Linie nennen wir den Träger der Kraft. Soll nun aber Kraft oder Drehung durch die Angabe eines einzigen positiven oder negativen Zahlwertes, der dem Sinne und der Größe nach die Kraft oder die Drehung festlegt, völlig bestimmt sein, so darf der Träger nicht als einfache gerade Linie, sondern muß mit einem bestimmten Richtungs- oder Drehsinn behaftet gegeben sein. Beides können wir auf Grund der getroffenen Konvention über Zuordnung von Richtungs- und Drehsinn als gleichbedeutend ansehen, denn wird eine Kraft mit einem bestimmten Richtungssinn positiv gerechnet, so gilt Gleiches auch für eine positive Drehung um die mit diesem Richtungssinn genommene Linie der Kraft.

1) Bei Ball „pitch". Italienische Autoren sagen „passo". Fiedler hat (Geometrie und Geomechanik) den Ausdruck „Pfeil" vorgeschlagen. Es ist aber wohl am besten, der alten Plueckerschen Bezeichnung „Parameter" treu zu bleiben.

Handelt es sich nun nicht um eine einfache Drehung, sondern um eine Schraubung, so ist diese bestimmt durch die mit einem bestimmten Richtungssinne behaftete Schraubenachse, die in diesem Sinne positiv, im entgegengesetzten Sinne negativ gerechnete Translationsgeschwindigkeit ϑ längs der Achse und die in dem Sinne entgegen dem Uhrzeiger positiv, mit dem Uhrzeiger negativ gerechnete Drehungsgeschwindigkeit ω um die in dem bestimmten Sinne angenommene Schraubenachse. Der Parameter:

$$k = \frac{\vartheta}{\omega} \tag{13}$$

ist dann positiv, wenn die Schraubung eine Rechtsschraubung, und negativ, wenn sie eine Linksschraubung ist. Sondern wir nun die Drehungsgeschwindigkeit ab, so ist das, was übrigbleibt, die in bestimmtem Sinne genommene Schraubenachse zusammen mit dem Schraubenparameter k, in dem Ballschen Sinne eine Schraube. Diese Schraube ist der Träger der Schraubung, die Schraubung geht aus ihr hervor durch Hinzunahme der Winkelgeschwindigkeit ω, die nach der angegebenen Weise positiv oder negativ zu rechnen ist. Die Winkelgeschwindigkeit der Schraubung wollen wir gelegentlich ihre Amplitude nennen.

Die Schraube ist aber gleichzeitig der Träger einer Dyname, deren Zentralachse mit der Schraubenachse zusammenfällt, und für welche:

$$k = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}} \tag{14}$$

wird, indem R die Größe der in der Zentralachse wirkenden Einzelkraft und S das Moment des zugehörigen, zu der Zentralachse senkrecht gestellten Kräftepaares oder, was dasselbe ist, das Moment der Dyname für die Zentralachse bezeichnet. Hierbei ist R positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem die Richtung der Resultante mit dem der Schraubenachse gegebenen Richtungssinn übereinstimmt oder nicht, und S positiv oder negativ, je nachdem der Drehungssinn des Kräftepaares für die Richtung der Schraubenachse positiv oder negativ ist. Ist die Schraube gegeben, so geschieht die Festlegung einer Dyname in dieser Schraube durch die Angabe eines einzigen Zahlwertes, nämlich der resultierenden Einzelkraft eines die Dyname repräsentierenden Kräftesystems, kurz gesagt, der Resultante der Dyname. Das Vorzeichen des Zahlwertes hat bestimmte Bedeutung, dieser zeigt die Dimensionen und den Charakter einer dynamischen Größe, während durch das Hinzutreten einer kinematischen Größe eine Schraubung in der Schraube festgelegt wird. So erscheint die Schraube in der Tat als die Absonderung des geometrisch Gemeinsamen, das in den Schraubungen und Dynamen steckt, während deren Verschiedenheit in dem Charakter der noch hinzukommenden, nicht geometrischen Größe zutage tritt.[1]

Dies ist auch analytisch klar, denn nach den Gleichungen (8) und (9) bekommen wir die Koordinaten der Schraube aus denen einer zugehörigen Schraubung durch die folgenden Gleichungen:

$$(15) \qquad \mathfrak{p} = \frac{\mathrm{p}}{\omega}, \quad \mathfrak{q} = \frac{\mathrm{q}}{\omega}, \quad \mathfrak{r} = \frac{\mathrm{r}}{\omega}, \quad \mathfrak{u} = \frac{\mathrm{u}}{\omega}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\mathrm{v}}{\omega}, \quad \mathfrak{w} = \frac{\mathrm{w}}{\omega},$$

und aus den Koordinaten einer Dyname durch die Gleichungen:

$$(16) \qquad \mathfrak{p} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}}, \quad \mathfrak{q} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R}}, \quad \mathfrak{r} = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{R}}, \quad \mathfrak{u} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}, \quad \mathfrak{w} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}.$$

Der in der zugrunde liegenden Einheit zum Ausdruck kommende Charakter der betreffenden Größe verschwindet also beim Übergang zu der zugehörigen Schraube, da durch eine gleichgeartete Größe durchdividiert wird.

Wenn wir die Schrauben durch einen symbolischen Ausdruck darstellen wollen, so können wir hierfür eine Dyname, deren Resultante $\mathrm{R} = 1$, wählen, wobei wir uns nur klar sein müssen, daß den Koeffizienten in diesem symbolischen Ausdrucke jede kinematische Bedeutung fehlt. Wenn wir sie aber durch andere Lettern bezeichnen, ist eine Verwechslung wohl kaum möglich. Wir nehmen daher:

$$(17) \qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{p}[0\mathrm{i}] + \mathfrak{q}[0\mathrm{j}] + \mathfrak{r}[0\mathrm{k}] + \mathfrak{u}[\mathrm{jk}] + \mathfrak{v}[\mathrm{ki}] + \mathfrak{w}[\mathrm{ij}],$$ [2]

wobei:

$$\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2 = 1.$$

Die Koordinaten der Achse dieser Schraubung werden dann durch die Proportion gegeben:

$$(18) \qquad \mathfrak{x}:\mathfrak{y}:\mathfrak{z}:\mathfrak{l}:\mathfrak{m}:\mathfrak{n} = \mathfrak{p}:\mathfrak{q}:\mathfrak{r}:\mathfrak{u} - k\mathfrak{p}:\mathfrak{v} - k\mathfrak{q}:\mathfrak{w} - k\mathfrak{r},$$

wobei:

$$k = \mathfrak{u}\mathfrak{p} + \mathfrak{v}\mathfrak{q} + \mathfrak{w}\mathfrak{r}.$$

Wird $k = 0$, so reduziert sich die Schraube auf eine gerade Linie, die mit einem bestimmten Richtungssinn und einem damit

---

1) Die Ausdrücke Balls sind wrench für Dyname und twist für Schraubung. In Deutschland scheinen die im Text gebrauchten Bezeichnungen sich dauernd einbürgern zu wollen. Für Schraubung sagten die ersten deutschen Autoren, die über Schraubentheorie schrieben, „Windung“. Doch hat dieses Wort bereits eine abweichende Bedeutung, während „Schraubung“ durchaus unmißverständlich und klar ist. Das exotische Wort Dyname, das Plücker eingebürgert hat, drückt die größere Abstraktion, die in diesem Begriffe gegenüber dem der Schraubung liegt, m. E. recht glücklich aus.

2) Vgl. Hyde, The directional theory of Screws, Annals of Math. IV, 1880, p. 137, Everett, Messenger of Math. Vol. 4, 1874, p. 36, 135.

gleichstimmigen Drehungssinn behaftet ist. Wir wollen dann von einer Nullschraube sprechen. Die zugehörigen Schraubungen reduzieren sich auf einfache Drehungen, die zugehörigen Dynamen lassen sich durch eine Einzelkraft repräsentieren.

Fragen wir nach der Schraube, die zu einer Translation gehört, so hat man in den Gleichungen (15) p, q, r unendlich klein werden zu lassen, aber so, daß ihre Verhältnisse bestimmt bleiben. Dann behalten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ endliche Werte, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ dagegen werden unendlich groß, doch so, daß sie den Richtungskosinus der Translation proportional bleiben. Eine jede (reelle) Schraube, für die der Parameter:

$$k = \mathfrak{u}\mathfrak{p} + \mathfrak{v}\mathfrak{q} + \mathfrak{w}\mathfrak{r}$$

unendlich wird, ergibt eine solche Translation, da infolge der Bedingung $\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2 = 1$ $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ nicht unendlich werden können. Wir wollen diese Schrauben als die singulären Schrauben bezeichnen. Ihre Achse ist nicht mehr eindeutig festgelegt, vielmehr nur der Richtung nach gegeben.

Sind:

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathfrak{s} = \mathfrak{p}\,[0\mathrm{i}] + \mathfrak{q}\,[0\mathrm{j}] + \mathfrak{r}\,[0\mathrm{k}] + \mathfrak{u}\,[\mathrm{jk}] + \mathfrak{v}\,[\mathrm{ki}] + \mathfrak{w}\,[\mathrm{ij}], \\ \mathfrak{s}' = \mathfrak{p}'[0\mathrm{i}] + \mathfrak{q}'[0\mathrm{j}] + \mathfrak{r}'[0\mathrm{k}] + \mathfrak{u}'[\mathrm{jk}] + \mathfrak{v}'[\mathrm{ki}] + \mathfrak{w}'[\mathrm{ij}] \end{cases}$$

irgend zwei Schrauben, so wollen wir den durch ihre Multiplikation hervorgehenden Ausdruck:

$$(20)\qquad \gamma = \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}' = \mathfrak{p}\mathfrak{u}' + \mathfrak{q}\mathfrak{v}' + \mathfrak{r}\mathfrak{w}' + \mathfrak{u}\mathfrak{p}' + \mathfrak{v}\mathfrak{q}' + \mathfrak{w}\mathfrak{r}'$$

mit einem von Lord Kelvin herrührenden Worte als ihre Konkurrenz bezeichnen, während Ball hierfür die Benennung „virtueller Koeffizient“ gebraucht. Wenn die Konkurrenz verschwindet, nennen wir die Schrauben korreziprok.[1])

Den geometrischen Ausdruck für die Konkurrenz zweier Schrauben können wir leicht ableiten, wenn wir die Achsen der beiden Schrauben einführen. Bezeichnen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ die Koordinaten zweier Liniengrößen von der Länge 1, die in diese Schraubenachsen fallen, und sind k, k' die Parameter der beiden Schrauben, so wird:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p},\quad \mathfrak{y} = \mathfrak{q},\quad \mathfrak{z} = \mathfrak{r},\quad \mathfrak{l} = \mathfrak{u} - k\mathfrak{p},\quad \mathfrak{m} = \mathfrak{v} - k\mathfrak{q},\quad \mathfrak{n} = \mathfrak{w} - k\mathfrak{r},$$
$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{p}',\quad \mathfrak{y}' = \mathfrak{q}',\quad \mathfrak{z}' = \mathfrak{r}',\quad \mathfrak{l}' = \mathfrak{u}' - k'\mathfrak{p}',\quad \mathfrak{m}' = \mathfrak{v}' - k'\mathfrak{q}',\quad \mathfrak{n}' = \mathfrak{w}' - k'\mathfrak{r}'.$$

Ist aber d der kürzeste Abstand der beiden Schraubenachsen, φ der Winkel, unter dem sie sich kreuzen, positiv gerechnet, wenn der

1) Der Ausdruck reziprok (reciprocal), den Ball verwendet, steht nicht in Einklang mit der Bedeutung, die dasselbe Wort in der projektiven Geometrie hat. Wir ziehen daher das Wort korreziprok vor, das der Ballschen Bezeichnung nahe verwandt ist und sich gleichzeitig der üblichen geometrischen Terminologie besser anpaßt.

Übergang von der mit dem richtigen Sinne genommenen ersten Achse zu der ebenso genommenen zweiten Achse eine Linksschraubung um die gemeinsame Normale bedeutet, so wird:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{l}' + \mathfrak{y}\mathfrak{m}' + \mathfrak{y}\mathfrak{n}' + \mathfrak{l}\mathfrak{x}' + \mathfrak{m}\mathfrak{y}' + \mathfrak{n}\mathfrak{z}' = d \sin \varphi.$$

Setzt man hierin die obenstehenden Werte der Koordinaten ein und beachtet noch, daß:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}' = \mathfrak{p}\mathfrak{p}' + \mathfrak{q}\mathfrak{q}' + \mathfrak{r}\mathfrak{r}' = \cos \varphi$$

ist, so erhält man sofort:

$$\gamma = (k + k') \cos \varphi + d \sin \varphi. \tag{21}$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck für die Konkurrenz der beiden Schrauben.[1]) Wenn er verschwindet, sind die Schrauben korreziprok. Man sieht sofort, daß dies u. a. eintritt, wenn $k' = -k$ und $d = 0$ oder $\varphi = 0$. Zwei Schrauben mit entgegengesetzt gleichen Parametern sind korreziprok, wenn ihre Achsen sich schneiden oder parallel sind. Ferner wird $\gamma = 0$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $d = 0$. Zwei Schrauben mit beliebigen Parametern sind korreziprok, wenn ihre Achsen sich rechtwinklig schneiden.

Wenn wir nun von einer fest gegebenen Schraube $\mathfrak{S}$ ausgehen, deren Koordinaten wir mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ bezeichnen, so genügen die Koordinaten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ aller der Schrauben $\mathfrak{s}$, die zu dieser Schraube korreziprok sind, einer homogenen linearen Gleichung:

$$\mathfrak{U}\mathfrak{p} + \mathfrak{V}\mathfrak{q} + \mathfrak{W}\mathfrak{r} + \mathfrak{P}\mathfrak{u} + \mathfrak{Q}\mathfrak{v} + \mathfrak{R}\mathfrak{w} = 0,$$

die wir in die kürzere symbolische Form $\mathfrak{S} \times \mathfrak{s} = 0$ zusammenziehen können.

Die Gesamtheit dieser Schrauben bezeichnen wir als ein lineares Schraubensystem fünfter Stufe. Wir nennen es von der fünften Stufe, weil, wenn $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_3$, $\mathfrak{s}_4$, $\mathfrak{s}_5$ irgend fünf Schrauben des Systems sind, die aber nicht alle einer zweiten linearen Gleichung $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{s} = 0$ genügen, d. h. einem linearen System vierter Stufe angehören dürfen, dann jede sechste Schraube $\mathfrak{s}$ des Systems sich in der Form darstellen läßt:

$$\mathfrak{s} = \sigma_1 \mathfrak{s}_1 + \sigma_2 \mathfrak{s}_2 + \sigma_3 \mathfrak{s}_3 + \sigma_4 \mathfrak{s}_4 + \sigma_5 \mathfrak{s}_5. \tag{22}$$

Diese eine Gleichung ist nur der abgekürzte Ausdruck für die sechs Gleichungen:

1) Er ist von F. Klein gegeben worden (Math. Ann. Bd. 2, 1870, p. 366).

$$
(22\text{a}) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{p} &= \sum_1^5 \sigma_\varrho \mathfrak{p}_\varrho, & \mathfrak{q} &= \sum_1^5 \sigma_\varrho \mathfrak{q}_\varrho, & \mathfrak{r} &= \sum_1^5 \sigma_\varrho \mathfrak{r}_\varrho, \\ \mathfrak{u} &= \sum_1^5 \sigma_\varrho \mathfrak{u}_\varrho, & \mathfrak{v} &= \sum_1^5 \sigma_\varrho \mathfrak{v}_\varrho, & \mathfrak{w} &= \sum_1^5 \sigma_\varrho \mathfrak{w}_\varrho, \end{aligned}
$$

in denen $\mathfrak{p}_\varrho,\ \mathfrak{q}_\varrho,\ \mathfrak{r}_\varrho,\ \mathfrak{u}_\varrho,\ \mathfrak{v}_\varrho,\ \mathfrak{w}_\varrho\ (\varrho = 1, 2, 3, 4, 5)$ die Koordinaten der fünf Schrauben $\mathfrak{S}_\varrho$ bedeuten. Aus diesen sechs Gleichungen geht durch Elimination der σ_ϱ in der Tat eine einzige homogene lineare Gleichung zwischen den Schraubenkoordinaten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \ldots$ hervor, wenn die Determinanten aus den $\mathfrak{p}_\varrho, \mathfrak{q}_\varrho, \ldots \mathfrak{w}_\varrho$ nicht verschwinden. Diese Determinanten verschwinden aber nur dann allesamt, wenn sich von den fünf Schrauben die Koordinaten einer durch die der übrigen linear ausdrücken lassen, d. h. wenn die fünf Schrauben einem linearen System 4. Stufe angehören, entgegen der Voraussetzung.

Wir bezeichnen allgemein die Gesamtheit der Schrauben, die durch zwei, drei, vier homogene lineare Gleichungen zwischen den Schraubenkoordinaten dargestellt wird, als ein lineares Schraubensystem vierter, dritter, zweiter Stufe. Durch fünf voneinander unabhängige homogene lineare Gleichungen wird eine einzige Schraube festgelegt. Sind $\mathfrak{S}_1 \ldots \mathfrak{S}_\mu$ μ Schrauben eines linearen Systems μ^{ter} Stufe, die nicht einem System niedrigerer Stufe angehören, so ist jede weitere Schraube $\mathfrak{S}$ des Systems in der Form darstellbar:

$$
(22^1) \qquad \mathfrak{S} = \sigma_1 \mathfrak{S}_1 + \cdots + \sigma_\mu \mathfrak{S}_\mu.
$$

Durch die μ homogenen linearen Gleichungen:

$$
(23) \qquad \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}' = 0 \cdots \mathfrak{S}_\mu \times \mathfrak{S}' = 0,
$$

aus denen man sofort die allgemeine Gleichung:

$$
(23\text{a}) \qquad (\sigma_1 \mathfrak{S}_1 + \cdots \sigma_\mu \mathfrak{S}_\mu) \times \mathfrak{S}' = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}' = 0
$$

ableitet, wird ein lineares System $(6-\mu)^{\text{ter}}$ Stufe dargestellt, und die Gleichung $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}' = 0$ zeigt, daß jede Schraube $\mathfrak{S}'$ dieses Systems zu jeder Schraube $\mathfrak{S}$ des Systems μ^{ter} Stufe korreziprok ist. Zu den Schrauben eines linearen Systems μ^{ter} Stufe sind also immer die Schrauben eines linearen Systems $(6-\mu)^{\text{ter}}$ Stufe korreziprok, insbesondere ist zu einem System fünfter Stufe eine einzige Schraube korreziprok.

Die linearen Schraubensysteme spielen eine wichtige Rolle bei beschränkter Bewegungsfreiheit eines starren Körpers. Wir wollen zunächst erörtern, was wir unter diesem Begriffe zu verstehen haben.[1])

1) Er ist in seiner allgemeinen Bedeutung durch Lagranges Mécanique analytique eingeführt worden.

Wir denken uns jede besondere Lage des starren Körpers, dessen Dimensionen wieder unbestimmt bleiben und bis ins Unendliche ausgedehnt werden können, durch sechs Parameter fixiert, die wir als Lagenparameter bezeichnen. Diese Lagenparameter sollen die Bewegung festlegen, durch die der Körper aus einer bestimmten Anfangslage in die gerade vorliegende Stellung gebracht werden kann, und zwar denken wir uns die Bewegung zusammengesetzt aus einer Parallelverschiebung und einer Drehung um einen im Körper festen Punkt, ebenso wie wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem in ein anderes überführen durch eine Parallelverschiebung, die den alten Koordinatenursprung an die Stelle des neuen bringt, und eine Drehung um diesen neuen Koordinatenursprung. Die Parallelverschiebung wird festgelegt durch ihre Komponenten a, b, c nach den Koordinatenachsen. Dies sind dann die Komponenten der Verschiebung, die ein beliebiger Punkt bei ihr erfährt. Die Drehung wird zunächst festgelegt durch die Winkel λ, μ, ν, welche die Rotationsachse mit den (ursprünglichen) Richtungen der Koordinatenachsen bildet, und den Rotationswinkel ω. Diese Größen aber können wir ersetzen durch die drei Parameter:

$$(24)\qquad \alpha = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\cos\lambda,\quad \beta = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\cos\mu,\quad \gamma = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\cos\nu.$$

Es folgt dann aus $\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$ die Beziehung:

$$(24a)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}^2.$$

Denken wir uns die gerade erreichte Lage als die Anfangslage für eine neue Bewegung des Körpers, die, soweit nur ihre Anfangs- und Endlage in Frage kommt, wieder durch sechs Parameter a', b', c', α', β', γ' gegeben ist, so wird auch die nach dieser zweiten Bewegung erreichte Endlage rücksichtlich der zuerst angenommenen Anfangslage durch sechs Parameter a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 fixiert. Während nun die durch die Parameter α, β, γ . . . gegebenen Drehungen untereinander nicht vertauscht werden können, können sie es doch mit den Parallelverschiebungen, so daß man erst die Parallelverschiebungen und dann die Drehungen zusammensetzen kann. Nach der einfachen Regel für die Zusammensetzung der Parallelverschiebungen ergibt sich demnach:

$$(25a)\qquad a_1 = a + a',\quad b_1 = b + b',\quad c_1 = c + c'.$$

Um auch die Drehungen zusammenzusetzen, haben wir in den Gleichungen (37) des dritten Kapitels:

$$-\frac{L_1}{K_1} = \alpha,\quad -\frac{M_1}{K_1} = \beta,\quad -\frac{N_1}{K_1} = \gamma,\quad -\frac{L_2}{K_2} = \alpha' \ldots,\quad -\frac{L}{K} = \alpha, \ldots$$

zu machen und erhalten dann sofort:

$$
(25\,\mathrm{b})\qquad
\begin{cases}
\alpha_1 = \dfrac{\alpha + \alpha' - \beta\gamma' + \gamma\beta'}{1-(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')},\\[2mm]
\beta_1 = \dfrac{\beta + \beta' - \gamma\alpha' + \alpha\gamma'}{1-(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')},\\[2mm]
\gamma_1 = \dfrac{\gamma + \gamma' - \alpha\beta' + \beta\alpha'}{1-(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')}.
\end{cases}
$$

Wir nehmen insbesondere an, die hinzukommende Lagenänderung, die durch die Parameter a', b', c', α', β', γ' festgelegt wird, sei unendlich klein und setzen demgemäß:

$$
a' = \mathrm{u}\,\delta t,\quad b' = \mathrm{v}\,\delta t,\quad c' = \mathrm{w}\,\delta t,\quad \alpha' = \frac{1}{2}\mathrm{p}\,\delta t,\quad \beta' = \frac{1}{2}\mathrm{q}\,\delta t,\quad \gamma' = \frac{1}{2}\mathrm{r}\,\delta t,
$$

indem wir so zu den für diese unendlich kleinen Bewegungen eingeführten Parametern oder Koordinaten zurückkehren. Machen wir dann entsprechend:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a + \delta a, & b_1 &= b + \delta b, & c_1 &= c + \delta c,\\
\alpha_1 &= \alpha + \delta\alpha, & \beta_1 &= \beta + \delta\beta, & \gamma_1 &= \gamma + \delta\gamma,
\end{aligned}
$$

so ergeben die vorigen Gleichungen sofort bei Vernachlässigung des unendlich Kleinen höherer Ordnung:

$$
(26)\qquad
\begin{cases}
\delta a = \mathrm{u}\,\delta t,\quad \delta b = \mathrm{v}\,\delta t,\quad \delta c = \mathrm{w}\,\delta t,\\[1mm]
\delta\alpha = \{(1+\alpha^2)\mathrm{p} + (\alpha\beta + \gamma)\mathrm{q} + (\gamma\alpha - \beta)\mathrm{r}\}\dfrac{\delta t}{2},\\[1mm]
\delta\beta = \{(\alpha\beta - \gamma)\mathrm{p} + (1+\beta^2)\mathrm{q} + (\beta\gamma + \alpha)\mathrm{r}\}\dfrac{\delta t}{2},\\[1mm]
\delta\gamma = \{(\gamma\alpha + \beta)\mathrm{p} + (\beta\gamma - \alpha)\mathrm{q} + (1+\gamma^2)\mathrm{r}\}\dfrac{\delta t}{2}.
\end{cases}
$$

Aus diesen letzten Gleichungen würde umgekehrt, wenn man noch:

$$
(27^0)\qquad \tilde{\omega} = \frac{2}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = 2\cos\frac{\omega}{2}^{\,2}
$$

setzt, folgen:

$$
(27)\qquad
\begin{cases}
\mathrm{p}\,\delta t = \tilde{\omega}\,(\delta\alpha - \gamma\cdot\delta\beta + \beta\cdot\delta\gamma),\\
\mathrm{q}\,\delta t = \tilde{\omega}\,(\delta\beta - \alpha\cdot\delta\gamma + \gamma\cdot\delta\alpha),\\
\mathrm{r}\,\delta t = \tilde{\omega}\,(\delta\gamma - \beta\cdot\delta\alpha + \alpha\cdot\delta\beta).
\end{cases}
$$

Wir nennen nun die Bewegungsfreiheit des starren Körpers beschränkt, wenn er nicht mehr jede beliebige Lage annehmen kann. Soll diese Beschränkung ihren Ausdruck durch eine analytische Gleichung finden, so muß diese Gleichung die Lagenparameter a, b, c, α, β, γ in gegenseitige Abhängigkeit bringen. Sie muß also von der Form sein:

$$
(28)\qquad f(a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma) = 0,
$$

wenn durch das Zeichen f irgendeine Funktion der in die Klammer gesetzten Größen bezeichnet wird. Durch Variation der veränderlichen Größen in dieser Gleichung folgt aber, da dieselbe für alle möglichen Lagen des Körpers erfüllt sein soll:

$$(29)\qquad \frac{\partial f}{\partial a}\delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\delta b + \frac{\partial f}{\partial c}\delta c + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta \alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\delta \beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\delta \gamma = 0.$$

Setzt man hierin die Werte (26) für die Variationen ein, so wird sie von der Form:

$$(30)\qquad \mathfrak{P}\mathfrak{u} + \mathfrak{Q}\mathfrak{v} + \mathfrak{R}\mathfrak{w} + \mathfrak{U}\mathfrak{p} + \mathfrak{V}\mathfrak{q} + \mathfrak{W}\mathfrak{r} = 0.$$

Diese Form ist aber allgemeiner als die vorhergehende, denn zwischen den Koeffizienten von δa, δb ... in der Gleichung (29) bestehen bestimmte Beziehungen, wenn man diese Koeffizienten als Funktionen der Lage des starren Körpers auffaßt. Also dürfen auch die daraus abgeleiteten Koeffizienten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ ... nicht beliebige Funktionen der Lage bedeuten, sondern müssen in einer bestimmten Abhängigkeit voneinander stehen, z. B. muß:

$$\mathfrak{P}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial b} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial c}\right) + \mathfrak{Q}\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial c} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial a}\right) + \mathfrak{R}\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial a} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial b}\right) = 0$$

sein, damit die Gleichung eine Beziehung zwischen den möglichen Lagen des Körpers ausdrückt. Aber auch, wenn die Koeffizienten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ ... beliebige Funktionen der Lage des Körpers bezeichnen, drückt die Gleichung (30) eine Beschränkung der Bewegungsfreiheit des Körpers aus, nur trifft die Beschränkung nicht unmittelbar die möglichen Lagen, sondern die möglichen Lagenänderungen des Körpers. Eine Kugel, die auf einer Ebene ohne Gleitung rollt, kann jede Lage auf der Ebene einnehmen, aber nicht jede Bewegung ausführen. Die Gleichungen (28) und (30) repräsentieren deshalb zwei verschiedene Formen der beschränkten Bewegungsfreiheit. Die erste schränkt die Bewegung für alle Zeit auf gewisse Lagen ein, die der Körper allein erreichen kann, die zweite in jedem Augenblick auf gewisse Lagenänderungen, die er allein erfahren kann. Die erste Form bezeichnet Hertz[1]) als die holonome Form der Bedingungsgleichungen, die zweite Form, die nur in besonderen Fällen mit der ersten zusammenfällt, kann man als die allgemeine kinematische Beschränkung der Bewegungsfreiheit bezeichnen. Das Wesentliche an jeder von uns betrachteten Beschränkung der Bewegungsfreiheit ist, daß sie keine Einschränkung in bezug auf die Geschwindigkeit der Bewegung einschließt. In der Tat bleibt die Gleichung (30) ungeändert, wenn $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ ... alle in demselben Verhältnisse vergrößert oder vermindert werden. Was wir

1) Die Prinzipien der Mechanik, Werke Bd. 3, p. 91.

für eine einzige Bedingungsgleichung ausgeführt haben, gilt ungeändert auch für mehrere solcher Gleichungen. Ist die Zahl der Gleichungen 5, so wird die Bewegung zwangläufig, dem Körper ist seine Bahn vorgeschrieben. Die meisten Maschinenteile repräsentieren solche Körper. Ist die Zahl der Gleichungen $6-\mu$, so sagt man, der Körper besitzt μ Grade der Freiheit.[1])

Wird nur die momentane Bewegung des Körpers in Betracht gezogen, so spielen in der Gleichung (30) die Koeffizienten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}\ldots$ die Rolle von Konstanten. Damit wird die Unterscheidung von holonomen und nicht holonomen Bedingungen hinfällig, denn wir können sogar eine lineare Gleichung zwischen den Lagenparametern ansetzen, die diese momentane Beschränkung der Bewegungsfreiheit ergibt. Stellt man aber für die ganze Dauer der Bewegung die Gleichung (30) auf, indem man in ihr die Koeffizienten als Konstanten ansieht, so ist dies keine holonome Beschränkung der Bewegungsfreiheit. Denn führen wir in die Gleichung (30) die Variationen der Lagenparameter durch die Gleichungen (27) ein, so ergibt sich:

$$(31)\qquad \mathfrak{P}\delta a+\mathfrak{Q}\delta b+\mathfrak{R}\delta c+\tilde{\omega}(\mathfrak{A}\delta\alpha+\mathfrak{B}\delta\beta+\mathfrak{C}\delta\gamma)=0,$$

indem wir zur Abkürzung setzen:

$$(31\text{a})\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}=\mathfrak{U}-\mathfrak{W}\beta+\mathfrak{V}\gamma,\\ \mathfrak{B}=\mathfrak{V}-\mathfrak{U}\gamma+\mathfrak{W}\alpha,\\ \mathfrak{C}=\mathfrak{W}-\mathfrak{V}\alpha+\mathfrak{U}\beta. \end{cases}$$

Soll nun Holonomie vorhanden sein, so müssen diese Größen u. a. der Gleichung genügen:

$$(32)\qquad \mathfrak{A}\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\beta}-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\gamma}\right)+\mathfrak{B}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\gamma}-\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\alpha}\right)+\mathfrak{C}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\alpha}-\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\beta}\right)=0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ergibt ausgerechnet:

$$(\mathfrak{U}-\mathfrak{W}\beta+\mathfrak{V}\gamma)\cdot 2\mathfrak{U}+(\mathfrak{V}-\mathfrak{U}\gamma+\mathfrak{W}\alpha)\cdot 2\mathfrak{V}+(\mathfrak{W}-\mathfrak{V}\alpha+\mathfrak{U}\beta)\cdot 2\mathfrak{W}$$
$$=2(\mathfrak{U}^2+\mathfrak{V}^2+\mathfrak{W}^2),$$

man sieht also, daß die Gleichung nur dadurch befriedigt werden kann, daß man zugleich:

$$\mathfrak{U}=0,\quad \mathfrak{V}=0,\quad \mathfrak{W}=0$$

setzt. Dann aber wird die Bedingungsgleichung einfach:

$$(33)\qquad \mathfrak{P}\delta a+\mathfrak{Q}\delta b+\mathfrak{R}\delta c=0,$$

1) Vgl. Thomson und Tait, A treatise on natural philosophy, 1. Band, 1. Abschnitt. Hier ist eine sehr anschauliche Schilderung der beschränkten Bewegungsfreiheit mit vielen Beispielen gegeben.

woraus in der Tat eine Bedingungsgleichung in endlicher Form:

$$(33\text{a})\qquad \mathfrak{P}a + \mathfrak{Q}b + \mathfrak{R}c = \text{const.}$$

folgt, so daß in diesem Falle die Beschränkung der Bewegungsfreiheit wirklich eine holonome ist.

Kehren wir zu dem einfachen Falle zurück, wo es sich nur um die momentane Bewegung des Körpers handelt, so verschwindet die Scheidung zwischen holonomen und nicht holonomen Bedingungsgleichungen. Dieser Fall liegt vor, wenn der Körper unendlich kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage ausführt. Der Untersuchung dieser letzteren ist daher die Schraubentheorie vornehmlich angepaßt und von den kleinen Schwingungen eines starren Körpers aus ist auch Sir Robert Ball auf diese Theorie gekommen.

Wir nehmen an, der Körper habe μ Grade der Freiheit, so bestehen $6-\mu$ Bedingungsgleichungen:

$$(34)\qquad \mathfrak{P}_i \mathrm{u} + \mathfrak{Q}_i \mathrm{v} + \mathfrak{R}_i \mathrm{w} + \mathfrak{U}_i \mathrm{p} + \mathfrak{V}_i \mathrm{q} + \mathfrak{W}_i \mathrm{r} = 0 \qquad (i=1,\ldots 6-\mu).$$

Hierin sind nun u, v ... die Koordinaten der Schraubung, in der die mögliche momentane Bewegung des Körpers besteht. Führen wir die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2}$ dieser Schraubung ein, so werden die Koordinaten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ... der zu der Schraubung gehörenden Schraube durch die Gleichungen gegeben:

$$(35)\qquad \mathrm{u} = \omega\mathfrak{u},\quad \mathrm{v} = \omega\mathfrak{v},\quad \mathrm{w} = \omega\mathfrak{w},\quad \mathrm{p} = \omega\mathfrak{p},\quad \mathrm{q} = \omega\mathfrak{q},\quad \mathrm{r} = \omega\mathfrak{r},$$

und dadurch reduzieren sich die Bedingungsgleichungen auf die folgenden Gleichungen zwischen den Schraubenkoordinaten:

$$(34\text{a})\qquad \mathfrak{P}_i \mathfrak{u} + \mathfrak{Q}_i \mathfrak{v} + \mathfrak{R}_i \mathfrak{w} + \mathfrak{U}_i \mathfrak{p} + \mathfrak{V}_i \mathfrak{q} + \mathfrak{W}_i \mathfrak{r} = 0 \qquad (i=1\ldots, 6-\mu).$$

Wir finden so: Bei μ Graden der Freiheit eines starren Körpers sind die möglichen momentanen Bewegungen des Körpers als die Schraubungen in den Schrauben eines linearen Schraubensystems μ^{ter} Stufe bestimmt.

Sind $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ die Koordinaten irgendeiner Schraube $\mathfrak{s}'$ des korreziproken Schraubensystems, so sind dieselben von der Form:

$$\mathfrak{p}' = \sum_1^{6-\mu} \varrho_i \mathfrak{P}_i, \quad \mathfrak{q}' = \sum_1^{6-\mu} \varrho_i \mathfrak{Q}_i \ldots \mathfrak{w}' = \sum_1^{6-\mu} \varrho_i \mathfrak{W}_i,$$

und es wird allgemein:

$$(34\text{b})\qquad \mathfrak{p}'\mathfrak{u} + \mathfrak{q}'\mathfrak{v} + \mathfrak{r}'\mathfrak{w} + \mathfrak{u}'\mathfrak{p} + \mathfrak{v}'\mathfrak{q} + \mathfrak{w}'\mathfrak{r} = 0$$

oder kurz $\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s} = 0$. Nehmen wir nun irgendeine Dyname Δ in der Schraube $\mathfrak{s}'$, deren Resultante R sei, die sich demnach symbolisch schreiben läßt:

$$\Delta = \mathrm{R}\mathfrak{s}',$$

und führen für die Schraube $\mathfrak{s}$ wieder die Schraubung $\mathsf{E} = \omega \,|\, \mathfrak{s}$ ein, so wird die vorige Gleichung:

$$\Delta \,|\, \mathsf{E} = 0, \tag{34c}$$

oder, wenn X, Y, Z, L, M, N die Koordinaten der Dyname sind:

$$\mathrm{Xu} + \mathrm{Yv} + \mathrm{Zw} + \mathrm{Lp} + \mathrm{Mq} + \mathrm{Nr} = 0. \tag{34d}$$

Diese Gleichung bedeutet aber nach (5), daß die Arbeitsleistung eines diese Dyname ergebenden Kräftesystems bei jeder möglichen Schraubung verschwindet. Wir können dann sagen, das Kräftesystem sei in Rücksicht auf die Beschränkung, der die Bewegungsfreiheit des Körpers unterliegt, im Gleichgewichte, und nennen die Dyname, zu der es gehört, eine Reaktionsdyname. Die Schrauben, die zu den Schrauben der möglichen Schraubungen korreziprok, sind also die Träger der Reaktionsdynamen und bilden ein lineares Schraubensystem $(6-\mu)^{\text{ter}}$ Stufe, das die Beschränkung in der Bewegungsfreiheit des Körpers ebenso dynamisch darstellt, wie sie das von den Schrauben der möglichen Schraubungen gebildete System kinematisch repräsentiert.

Sind $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Koordinaten einer Schraube, so sind:

$$\mathrm{p} = \omega\mathfrak{p}, \quad \mathrm{q} = \omega\mathfrak{q}, \quad \mathrm{r} = \omega\mathfrak{r}, \quad \mathrm{u} = \omega\mathfrak{u}, \quad \mathrm{v} = \omega\mathfrak{v}, \quad \mathrm{w} = \omega\mathfrak{w} \tag{35}$$

die Koordinaten einer Schraubung in dieser Schraube. Sind aber $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{u}_i$, $\mathfrak{v}_i$, $\mathfrak{w}_i$ $(i = 1 \ldots \nu)$ die Koordinaten von ν Schrauben eines linearen Systems μ^{ter} Stufe, wobei $\nu \leqq \mu$ sein muß, damit die Schrauben voneinander linear unabhängig bleiben, dann gehört die Schraube einer jeden Schraubung, deren Koordinaten in der Form darstellbar sind:

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{p} = \sum \omega_i \mathfrak{p}_i, & \mathrm{q} = \sum \omega_i \mathfrak{q}_i, & \mathrm{r} = \sum \omega_i \mathfrak{r}_i, \\ \mathrm{u} = \sum \omega_i \mathfrak{u}_i, & \mathrm{v} = \sum \omega_i \mathfrak{v}_i, & \mathrm{w} = \sum \omega_i \mathfrak{w}_i, \end{array}\right. \tag{36}$$

zu dem linearen System. Denn wenn $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i \ldots$ den Gleichungen des Systems genügen, so genügen diesen Gleichungen auch p, q ... selbst und nach Division durch die Winkelgeschwindigkeit ω auch die Koordinaten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \ldots$ der zugehörigen Schraube. Ist $\nu = \mu$, so kann man auf diese Weise alle Schrauben des linearen Systems μ^{ter} Stufe erhalten. Die linearen Schraubensysteme kann man also deuten als die Schrauben aller Schraubungen, die sich aus Schraubungen in gewissen festen Schrauben zusammensetzen lassen.

Elftes Kapitel.

Schraubengeometrie.

Die Schraubengeometrie, zu der wir jetzt übergehen, und die in gewissem Sinne als eine Erweiterung und besondere Ausgestaltung der Liniengeometrie anzusehen ist, hat zu ihrem Gegenstande die Untersuchung der Schraubensysteme oder analytischen Mannigfaltigkeiten von Schrauben.[1]) Ihren ersten Gegenstand bilden naturgemäß die linearen Schraubensysteme, die durch homogene lineare Gleichungen zwischen den Schraubenkoordinaten dargestellt werden. Wir wollen über diese überhaupt nicht hinausgehen[2]) und zunächst einige allgemeine Bemerkungen über die Art ihrer Behandlung machen. Alle näheren Ausführungen sollen den folgenden Kapiteln vorbehalten bleiben, in denen wir die prinzipiell wichtigsten linearen Schraubensysteme im einzelnen auf Grund einer möglichst einfachen analytischen Darstellung besprechen.

Zunächst wollen wir hervorheben, daß der Begriff der Schraube im engsten Zusammenhange mit dem Begriffe des linearen Strahlenkomplexes steht. In der Tat ist der Komplex der Nullinien derselbe für alle Dynamen, die zu derselben Schraube gehören. Durch die

1) Die Schraubentheorie hat Sir Robert Ball in Buchform zuerst 1876 herausgegeben unter dem Titel: The theory of Screws. A study in the dynamics of a rigid body (Dublin). Auszüge in den Math. Ann., Bd. 9, p. 541 und in der Nature, Vol. 13, p. 463. Für die neue Disziplin trat darauf zunächst besonders Fiedler ein in der kleinen Schrift „Geometrie und Geomechanik" (Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. Zürich, Bd. 21. 1876). Die Bezeichnung Geomechanik für die Mechanik fester Körper hat sich leider nicht eingebürgert. Unter Fiedlers Einfluß entstand die Dissertation von Goebel, Die wichtigsten Sätze der neueren Statik, Zürich 1877. (Vgl. auch dessen Arbeit in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 25, 1880, S. 281.) Später gab Padeletti im Rendic. della R. Accad. di Napoli, vol. 21, 1882 eine kurze Darstellung der Schraubentheorie (als teoria delle dinami). Auf Grund des Ballschen Buches von 1876 und einiger seither erschienenen Arbeiten veröffentlichte 1889 Gravelius eine deutsche Bearbeitung als: Theoretische Mechanik starrer Systeme. Diese Bearbeitung ist durch Balls neues Werk antiquiert. In humoristischer Weise gab Ball über seine Ziele 1887 in Bd. 36 der Nature Auskunft durch die „dynamische Parabel", die in der Theory of Screws von 1900 wieder abgedruckt ist. Als Besprechung des Graveliusschen Werkes schrieb Henrici (Nature 62, 1890, S. 127) eine knappe, aber originelle und tiefgründende Darstellung des Gegenstandes. Inzwischen hat die Schraubentheorie in die Lehrbücher der Mechanik Eingang gefunden. Namentlich berücksichtigte sie Schell in der 2. Auflage seiner Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1879, 1880, darauf E. Budde, Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme, Berlin 1890, und neuerdings Webster, Dynamics of particles and of rigid bodies, Leipzig 1904.

2) Die Theorie der quadratischen Schraubensysteme hat Joly in Angriff genommen in einer Abhandlung Trans. of the R. Irish Acad. 32^{A}, p. 155.

Schraube ist also dieser lineare Strahlenkomplex bestimmt und umgekehrt, nur der Sinn der Schraube bleibt hierbei unbestimmt, er kommt aber bei der Untersuchung der linearen Schraubensysteme nicht in Frage, denn mit einer Schraube gehört auch immer die entgegengesetzte Schraube, die sich nur durch die Umkehrung des Sinnes von der ersten unterscheidet, zu einem linearen System. Für die Schraubengeometrie kann man daher direkt eine jede Schraube mit ihrer entgegengesetzten Schraube zusammenfallen lassen, d. h. von dem der Schraube zugeschriebenen Sinn abstrahieren. Dann aber läßt sich die Schraube vollständig durch den zugehörigen linearen Strahlenkomplex ersetzen, und an Stelle eines linearen Schraubensystems können wir demnach auch eine lineare Mannigfaltigkeit von linearen Strahlenkomplexen betrachten. Die Schraubengeometrie würde so direkt zusammenfallen mit der nach einer bestimmten Seite hin ausgebildeten Liniengeometrie, welche darauf beruht, daß die gewonnenen linearen Gesamtheiten aufs neue als Elemente einer linearen Systembildung angesehen werden. Doch ist sicher nicht zu leugnen, daß einer solchen Auffassung gegenüber der Begriff der Schraube als eines selbständigen Raumelements, nämlich einer mit einem Parameter verbundenen Achse, den Vorzug der größeren Anschaulichkeit und Einfachheit besitzt.

Die Untersuchung eines linearen Schraubensystems[1]) führen wir nach Balls Vorgange auf die Liniengeometrie zurück, indem wir die Betrachtung wesentlich auf die Art, wie sich die Schraubenachsen des Systems im Raume verteilen, beschränken. Dabei werden zunächst jedesmal die Achsen des Systems mit gleichem Parameter zusammengenommen und darauf die Gesamtheit aller überhaupt vorhandenen Achsen ins Auge gefaßt. Wir wollen zunächst allgemein die Frage beantworten, welches der Charakter der so auftretenden Liniensysteme ist.

Seien die Gleichungen des Schraubensystems in der allgemeinen Form gegeben:

$$(1)\qquad \mathfrak{P}_i\mathfrak{u} + \mathfrak{Q}_i\mathfrak{v} + \mathfrak{R}_i\mathfrak{w} + \mathfrak{U}_i\mathfrak{p} + \mathfrak{V}_i\mathfrak{q} + \mathfrak{W}_i\mathfrak{r} = 0 \qquad (i = 1 \ldots \nu),$$

so führen wir statt der Koordinaten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}\ldots$ der Schraube selbst die Koordinaten $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}\ldots$ ihrer Achse ein durch die Proportion:

$$(2)\qquad \mathfrak{l}:\mathfrak{m}:\mathfrak{n}:\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:\mathfrak{z} = \mathfrak{u} - k\mathfrak{p} : \mathfrak{v} - k\mathfrak{q} : \mathfrak{w} - k\mathfrak{r} : \mathfrak{p} : \mathfrak{q} : \mathfrak{r}$$

oder umgekehrt:

$$(2\mathrm{a})\qquad \mathfrak{u}:\mathfrak{v}:\mathfrak{w}:\mathfrak{p}:\mathfrak{q}:\mathfrak{r} = \mathfrak{l} + k\mathfrak{x} : \mathfrak{m} + k\mathfrak{y} : \mathfrak{n} + k\mathfrak{z} : \mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z},$$

1) Man vgl. auch die Arbeit von A. Grünwald, Ztschr. f. Math. u. Phys. 48, 1902, p. 49 und die frühere Abhandlung von d'Emilio: Gli assoidi nella statica e nella cinematica, Atti del R. Ist. Veneto di scienze (6) 3, p. 1135 (1885). Asse bedeutet bei d'Emilio Schraube und assoide Schraubensystem.

wenn k den Parameter der Schraube bedeutet. Wir erhalten somit für die Koordinaten der Schraubenachsen ebensoviel lineare Gleichungen wie für die Schraubenkoordinaten selbst, und diese Gleichungen sind von folgender Form:

$$(3)\qquad (\mathfrak{P}_i\mathfrak{l} + \mathfrak{Q}_i\mathfrak{m} + \mathfrak{R}_i\mathfrak{n} + \cdots + \mathfrak{W}_i\mathfrak{z}) + k(\mathfrak{P}_i\mathfrak{x} + \mathfrak{Q}_i\mathfrak{y} + \mathfrak{R}_i\mathfrak{z}) = 0,$$

zu ihnen tritt noch die identisch erfüllte Relation:

$$(4)\qquad \mathfrak{l}\mathfrak{x} + \mathfrak{m}\mathfrak{y} + \mathfrak{n}\mathfrak{z} = 0$$

hinzu. Sieht man in den Gleichungen (3) nun k als eine gegebene Konstante an, so wird durch sie ein lineares Strahlensystem von einer im allgemeinen um 1 niedrigeren Stufe wie das vorliegende Schraubensystem dargestellt. Die Achsen der Schrauben von gleichem Parameter eines linearen Systems bilden also immer wieder ein lineares System.[1])

Fassen wir aber nicht bloß die Achsen gleichen Parameters, sondern die Gesamtheit aller Achsen des Systems ins Auge, so müssen wir, um die Gleichungen des von dieser Gesamtheit gebildeten Strahlensystems zu erhalten, aus den Gleichungen (3) den Parameter k eliminieren. Die Zahl dieser Gleichungen erniedrigt sich dadurch um 1, während gleichzeitig ihr Grad sich erhöht, so daß wir nicht mehr ein lineares Strahlensystem vor uns haben. Den Charakter der so auftretenden Strahlensysteme können wir nur von Fall zu Fall fortschreitend bestimmen.

Nehmen wir zunächst den einfachsten Fall, daß nur eine Gleichung vorgelegt, also das Schraubensystem von der 5. Stufe ist. Dann kann die jetzt vorhandene einzige Gleichung:

$$(5)\qquad (\mathfrak{P}\mathfrak{l} + \mathfrak{Q}\mathfrak{m} + \cdots + \mathfrak{W}\mathfrak{z}) + k(\mathfrak{P}\mathfrak{x} + \mathfrak{Q}\mathfrak{y} + \mathfrak{R}\mathfrak{z}) = 0$$

dazu dienen, um zu den gegebenen Koordinaten $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \ldots$ der Achse den Wert des zugehörigen Parameters zu bestimmen. Wir finden, daß derselbe eine gebrochene lineare Funktion der Linienkoordinaten wird, die, wie es sein muß, nur von den Verhältnissen, nicht aber den absoluten Werten dieser Koordinaten abhängt. So sehen wir, daß jede gegebene gerade Linie des Raumes die Achse einer einzigen Schraube des Systems ist. Nur wenn $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R} = 0$ werden, ergibt sich aus (5) eine von k unabhängige lineare Gleichung

1) Die Dimensionenzahl dieses Systems ist aber nicht immer um 1 niedriger als die des zugehörigen Schraubensystems. Dieser Umstand namentlich hat Study in seiner Geom. d. Dynamen dazu geführt, die Betrachtung der von den Schraubenachsen gebildeten Systeme überhaupt abzutrennen und durch das Wort Ketten zu charakterisieren. Seine Untersuchung geht durch das Hineinziehen des Unendlichfernen und Imaginären viel weiter als unsere Betrachtung, es kann deshalb auf die Studysche Darstellung in allem verwiesen werden, was im folgenden unausgeführt bleibt.

zwischen den Koordinaten der Schraubenachsen. Diese Gleichung lautet:

$$\mathfrak{U}\mathfrak{x} + \mathfrak{V}\mathfrak{y} + \mathfrak{W}\mathfrak{z} = 0,$$

sie bedeutet, daß die Schraubenachsen einer Ebene parallel sind. Jede von ihnen ergibt, mit einem beliebigen Parameter k zusammengenommen, eine Schraube des Systems.

Gehen wir jetzt zu dem linearen Schraubensystem 4. Stufe über, so erhalten wir zwei Gleichungen von der Form (3). Bilden wir also die Gleichung (3) zweimal, für $i = 1$ und $i = 2$, und eliminieren dann aus diesen zwei Gleichungen den Parameter k, so erhalten wir eine Gleichung:

$$(6) \quad \begin{aligned}(\mathfrak{P}_2\mathfrak{x} + \mathfrak{Q}_2\mathfrak{y} + \mathfrak{R}_2\mathfrak{z})(\mathfrak{P}_1\mathfrak{l} + \cdots + \mathfrak{W}_1\mathfrak{z})& \\ - (\mathfrak{P}_1\mathfrak{x} + \mathfrak{Q}_1\mathfrak{y} + \mathfrak{R}_1\mathfrak{z})(\mathfrak{P}_2\mathfrak{l} + \cdots + \mathfrak{W}_2\mathfrak{z}) &= 0,\end{aligned}$$

welche einen besonderen quadratischen Strahlenkomplex darstellt. Die Achsen der Schrauben eines Systems 4. Stufe bilden also im allgemeinen einen quadratischen Komplex. Nur wenn

$$\mathfrak{P}_2\mathfrak{x} + \mathfrak{Q}_2\mathfrak{y} + \mathfrak{R}_2\mathfrak{z} = c(\mathfrak{P}_1\mathfrak{x} + \mathfrak{Q}_1\mathfrak{y} + \mathfrak{R}_1\mathfrak{z})$$

wird, also:

$$\mathfrak{P}_2 : \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{Q}_2 : \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{R}_2 : \mathfrak{R}_1 = c,$$

wo c eine Konstante bedeutet, reduziert sich die quadratische Gleichung (6) auf eine lineare Gleichung, nämlich:

$$(c\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_2)\mathfrak{x} + (c\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2)\mathfrak{y} + (c\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}_2)\mathfrak{z} = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet wieder, daß die Schraubenachsen des Systems einer Ebene parallel sind und somit einen speziellen linearen Komplex bilden.

Werden $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{R}_1 = 0$ und $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{R}_2 = 0$, so reduzieren sich die Gleichungen für die Koordinaten der Schraubenachsen auf:

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{x} + \mathfrak{V}_1\mathfrak{y} + \mathfrak{W}_1\mathfrak{z} = 0, \quad \mathfrak{U}_2\mathfrak{x} + \mathfrak{V}_2\mathfrak{y} + \mathfrak{W}_2\mathfrak{z} = 0.$$

Sie bedeuten, daß die Schraubenachsen alle zu zwei Ebenen parallel sind, d. h. alle einander parallel sind, und jede von ihnen ergibt, mit einem beliebigen Parameter k zusammengenommen, eine Schraube des Systems.

Für ein lineares Schraubensystem 3. Stufe haben wir drei Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases}(\mathfrak{P}_1\mathfrak{l} + \mathfrak{Q}_1\mathfrak{m} + \cdots + \mathfrak{W}_1\mathfrak{z}) + k(\mathfrak{P}_1\mathfrak{x} + \mathfrak{Q}_1\mathfrak{y} + \mathfrak{R}_1\mathfrak{z}) = 0,\\ (\mathfrak{P}_2\mathfrak{l} + \mathfrak{Q}_2\mathfrak{m} + \cdots + \mathfrak{W}_2\mathfrak{z}) + k(\mathfrak{P}_2\mathfrak{x} + \mathfrak{Q}_2\mathfrak{y} + \mathfrak{R}_2\mathfrak{z}) = 0,\\ (\mathfrak{P}_3\mathfrak{l} + \mathfrak{Q}_3\mathfrak{m} + \cdots + \mathfrak{W}_3\mathfrak{z}) + k(\mathfrak{P}_3\mathfrak{x} + \mathfrak{Q}_3\mathfrak{y} + \mathfrak{R}_3\mathfrak{z}) = 0.\end{cases}$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Determinante:

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \mathfrak{P}_1 & \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{R}_1 \\ \mathfrak{P}_2 & \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{R}_2 \\ \mathfrak{P}_3 & \mathfrak{Q}_3 & \mathfrak{R}_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

von Null verschieden oder gleich Null ist. Diese Unterscheidung ist durchaus derjenigen analog, die bei den Flächen zweiter Ordnung auf die Diskriminante der Flächengleichung gegründet wird und zu der Trennung der Mittelpunktsflächen von den Paraboloiden führt.

Nehmen wir zuerst den Fall:

$$\mathfrak{D} \neq 0,$$

so können wir unter dieser Voraussetzung aus den drei gegebenen Gleichungen drei andere ableiten, welche $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ einzeln als homogene lineare Funktionen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ darstellen. Diese Gleichungen sind, wie man leicht sieht, von folgender Form:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{l} &= (\alpha_1 \mathfrak{x} + \beta_1 \mathfrak{y} + \gamma_1 \mathfrak{z}) - k\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{m} &= (\alpha_2 \mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} + \gamma_2 \mathfrak{z}) - k\mathfrak{y}, \\ \mathfrak{n} &= (\alpha_3 \mathfrak{x} + \beta_3 \mathfrak{y} + \gamma_3 \mathfrak{z}) - k\mathfrak{z}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und addieren sie, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Identität (4):

$$\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) - k(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) = 0, \tag{10}$$

wenn wir

$$\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = (\alpha_1 \mathfrak{x} + \beta_1 \mathfrak{y} + \gamma_1 \mathfrak{z})\mathfrak{x} + (\alpha_2 \mathfrak{x} + \cdots)\mathfrak{y} + (\alpha_3 \mathfrak{x} + \cdots)\mathfrak{z} \tag{11}$$

setzen und zunächst annehmen, daß diese Funktion Φ nicht identisch verschwindet und nicht von der Form $\alpha(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)$ ist.

Die Achsen aller Schrauben des Systems 3. Stufe bilden nun eine Kongruenz, die wir kurz als die Achsenkongruenz bezeichnen. Als den Grad dieser Kongruenz haben wir die Zahl der Linien anzusehen, die sie mit einer beliebigen linearen Kongruenz gemein hat. Diese letztere Kongruenz wird durch irgend zwei homogene lineare Gleichungen zwischen den Linienkoordinaten dargestellt. Suchen wir aber die Strahlen der linearen Kongruenz, die gleichzeitig der durch die Gleichungen (9) gegebenen Achsenkongruenz angehören, so können wir mit Hilfe dieser Gleichungen aus den Gleichungen der linearen Kongruenz $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ eliminieren und erhalten zwei Gleichungen von folgender Form:

$$\left\{\begin{aligned} (A_1 \mathfrak{x} + B_1 \mathfrak{y} + C_1 \mathfrak{z}) - k(A_1' \mathfrak{x} + B_1' \mathfrak{y} + C_1' \mathfrak{z}) = 0, \\ (A_2 \mathfrak{x} + B_2 \mathfrak{y} + C_2 \mathfrak{z}) - k(A_2' \mathfrak{x} + B_2' \mathfrak{y} + C_2' \mathfrak{z}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Eliminiert man aus denselben k, so findet man:

$$\begin{aligned} (A_1 \mathfrak{x} + B_1 \mathfrak{y} + C_1 \mathfrak{z})\,(A_2' \mathfrak{x} + B_2' \mathfrak{y} + C_2' \mathfrak{z}) \\ - (A_1' \mathfrak{x} + B_1' \mathfrak{y} + C_1' \mathfrak{z})\,(A_2 \mathfrak{x} + B_2 \mathfrak{y} + C_2 \mathfrak{z}) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Eliminiert man dagegen k aus (10) und je einer der Gleichungen (12), so ergibt sich:

$$(13\text{a})\quad \begin{cases} (A_1'\mathfrak{x}+B_1'\mathfrak{y}+C_1'\mathfrak{z})\,\Phi(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})-(A_1\mathfrak{x}+B_1\mathfrak{y}+C_1\mathfrak{z})(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)=0,\\ (A_2'\mathfrak{x}+B_2'\mathfrak{y}+C_2'\mathfrak{z})\,\Phi(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})-(A_2\mathfrak{x}+B_2\mathfrak{y}+C_2\mathfrak{z})(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)=0. \end{cases}$$

Jedem Wertesystem $\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:\mathfrak{z}$, das den drei Gleichungen (13) und (13a) genügt, entspricht ein Strahl, den die Achsenkongruenz mit der linearen Kongruenz gemein hat. Es ergeben sich aber fünf solche Wertesysteme, denn von den sechs, die gleichzeitig der quadratischen Gleichung (13) und der ersten der kubischen Gleichungen (13a) genügen, ist das *eine* auszuscheiden, welches sich aus den Gleichungen:

$$A_1\mathfrak{x}+B_1\mathfrak{y}+C_1\mathfrak{z}=0 \quad \text{und} \quad A_1'\mathfrak{x}+B_1'\mathfrak{y}+C_1'\mathfrak{z}=0$$

ergibt, da es i. a. nicht auch der zweiten Gleichung (13a) genügt. *Die Achsenkongruenz ist so vom fünften Grade.*

Als *Ordnung* einer Kongruenz bezeichnet man die Zahl der Kongruenzstrahlen, die durch einen beliebigen Punkt gehen, und als ihre *Klasse* die Zahl der Strahlen, die in einer beliebigen Ebene liegen.[1]) Die Summe von Ordnung und Klasse ist gleich dem Grade der Kongruenz. In der Tat bestehen die Strahlen, die zwei sich schneidende gerade Linien treffen, aus allen Strahlen, die durch einen bestimmten Punkt gehen, zusammen mit denen, die in einer bestimmten Ebene liegen, und bilden gleichzeitig eine besondere lineare Kongruenz. Es ist nun leicht zu zeigen, daß die vorliegende Achsenkongruenz von der *dritten Ordnung* und damit von der *zweiten Klasse* ist.

Verlangen wir nämlich, daß ein Strahl der durch die Gleichungen (9) gegebenen Kongruenz durch einen bestimmten Punkt mit den Koordinaten x, y, z gehen soll, so haben wir in diese Gleichungen einzusetzen:

$$(14)\qquad \mathfrak{l}=y\mathfrak{z}-z\mathfrak{y},\quad \mathfrak{m}=z\mathfrak{x}-x\mathfrak{z},\quad \mathfrak{n}=x\mathfrak{y}-y\mathfrak{x}$$

und erhalten dann die drei Gleichungen:

$$(15)\qquad \begin{cases} (\alpha_1-k)\mathfrak{x}+(\beta_1+z)\mathfrak{y}+(\gamma_1-y)\mathfrak{z}=0,\\ (\alpha_2-z)\mathfrak{x}+(\beta_2-k)\mathfrak{y}+(\gamma_2+x)\mathfrak{z}=0,\\ (\alpha_3+y)\mathfrak{x}+(\beta_3-x)\mathfrak{y}+(\gamma_3-k)\mathfrak{z}=0. \end{cases}$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so bekommen wir:

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1-k & \beta_1+z & \gamma_1-y\\ \alpha_2-z & \beta_2-k & \gamma_2+x\\ \alpha_3+y & \beta_3-x & \gamma_3-k \end{vmatrix}=0.$$

1) Diese Bezeichnungen rühren von Kummer her.

Diese Gleichung ist vom dritten Grade für k, und ihren drei Wurzeln entsprechend erhalten wir aus den Gleichungen (15) drei Wertesysteme $\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:\mathfrak{z}$, also drei Strahlen, die durch den angenommenen Punkt gehen.

Sieht man in der Gleichung (16) das k als gegeben, x, y, z aber als veränderlich an, so stellt sie die Regelfläche zweiten Grades dar, auf welcher die Achsen der Schrauben mit diesem bestimmten Parameter k liegen, und indem man k nach und nach alle möglichen Werte durchlaufen läßt, erhält man die Flächen einer bestimmten Flächenschar, auf welche sich die sämtlichen Strahlen der Achsenkongruenz verteilen. Für $k=0$ erhält man insbesondere die Fläche, auf welcher die zu dem Schraubensystem gehörenden einfachen Strahlen oder Nullschrauben enthalten sind. Die Gleichung dieser Fläche wollen wir schreiben:

$$\begin{aligned}(17)\qquad \alpha_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \gamma_3 z^2 + (\beta_3+\gamma_2)yz + (\gamma_1+\alpha_3)zx + (\alpha_2+\beta_1)xy \\ -(\beta_3'-\gamma_2')x - (\gamma_1'-\alpha_3')y - (\alpha_2'-\beta_1')z + \delta = 0.\end{aligned}$$

Es ist darin z. B. $\beta_3' = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2$ die in der Determinante:

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

zu β_3 adjungierte Unterdeterminante. Aus (17) erhält man die allgemeinere Gleichung der zum Werte k gehörenden Fläche, indem man $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ durch $\alpha_1 - k$, $\beta_2 - k$, $\gamma_3 - k$ ersetzt. Würde nun die Gleichung (17) ein Paraboloid darstellen, so müßte die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \frac{\alpha_2+\beta_1}{2} & \frac{\gamma_1+\alpha_3}{2} \\ \frac{\alpha_2+\beta_1}{2} & \beta_2 & \frac{\beta_3+\gamma_2}{2} \\ \frac{\gamma_1+\alpha_3}{2} & \frac{\beta_3+\gamma_2}{2} & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

sein, man könnte demnach die Bedingung hierfür so formulieren, daß man sagt, die Gleichung (16) muß, wenn man in ihr:

$$x = \frac{\beta_3-\gamma_2}{2},\quad y = \frac{\gamma_1-\alpha_3}{2},\quad z = \frac{\alpha_2-\beta_1}{2}$$

setzt, eine Wurzel $k=0$ haben. Wäre dies nun der Fall, so hätte man sich $k_0 + k$ für k gesetzt zu denken, wo k_0 keine Wurzel der Gleichung (16) unter der Voraussetzung der angeschriebenen besonderen Werte von x, y, z ist, und entsprechend hätte man $\alpha_1 + k_0$ für α_1, $\beta_2 + k_0$ für β_2 und $\gamma_3 + k_0$ für γ_3 zu setzen, dann erfährt die Gleichung (16) und die durch sie gegebene Flächenschar keine

Änderung und die Gleichung, in die (17) so übergeht, stellt keine parabolische Fläche dar. Sie hat demnach einen Mittelpunkt und (wenigstens) drei durch den Mittelpunkt gehende und zueinander senkrechte Hauptachsen, so daß, wenn man neue Koordinaten auf diese Hauptachsen bezieht, die Gleichung der Fläche von der Form wird:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0. \tag{17a}$$

Dann müssen aber die Koeffizienten der allgemeinen Gleichungsform (17) den folgenden Bedingungen genügen:

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_2 = \beta, \quad \gamma_3 = \gamma, \quad \beta_3 = -\gamma_2, \quad \gamma_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = -\beta_1,$$

$$\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1, \quad \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2,$$

$$\beta_3\gamma_1 - \gamma_3\beta_1 = \alpha_3\gamma_2 - \gamma_3\alpha_2.$$

Die letzten drei Bedingungen reduzieren sich infolge der vorhergehenden auf:

$$\beta_3 = \gamma_2, \quad \alpha_3 = \gamma_1, \quad \beta_1 = \alpha_3,$$

so daß $\beta_3, \gamma_2, \gamma_1, \alpha_3, \alpha_2, \beta_1 = 0$ wird und mithin:

$$\delta = \alpha\beta\gamma,$$

die Gleichung (17a) also die Form annimmt[1]):

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \alpha\beta\gamma = 0. \tag{17b}$$

Hieraus erhält man aber die Gleichung einer beliebigen der durch (16) gegebenen Flächen, indem man α, β, γ durch $\alpha - k$, $\beta - k$, $\gamma - k$ ersetzt. Es sind alle diese Flächengleichungen auf ihre Hauptachsen bezogen. Diese Hauptachsen sind also allen den Flächen gemeinsam, und sie sind alle Mittelpunktsflächen, so daß unter der Annahme $\mathfrak{D} \neq 0$ die Voraussetzung, (17) könne ein Paraboloid darstellen, sich als unzutreffend erweist.

Die Gleichungen (9) werden nun einfach:

$$\mathfrak{l} = (\alpha - k)\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{m} = (\beta - k)\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{n} = (\gamma - k)\mathfrak{z},$$

und wenn man durch die Gleichungen (2) wieder die Schraubenkoordinaten einführt, so erhält man:

$$\mathfrak{u} = \alpha\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = \beta\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{w} = \gamma\mathfrak{r} \tag{18}$$

als die einfachste Form der Gleichungen des Schraubensystems.

Um auch die zuerst ausgeschlossenen Fälle zu erledigen, nehmen wir jetzt an, daß:

$$\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \alpha(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)$$

werde. Dies tritt ein, wenn in den Gleichungen (9):

1) Vgl. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, p. 130.

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \alpha,$$
$$\beta_3 = -\gamma_2 = x_0, \quad \gamma_1 = -\alpha_3 = y_0, \quad \alpha_2 = -\beta_1 = z_0$$

gesetzt wird. Die Gleichung (10) zeigt, daß dann:

$$k = \alpha,$$

also dasselbe für alle Schrauben des Systems ist. Die Gleichungen (9) selbst reduzieren sich auf:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{z} y_0 - \mathfrak{y} z_0, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{x} z_0 - \mathfrak{z} x_0, \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{y} x_0 - \mathfrak{x} y_0$$

und zeigen, daß die Achse einer beliebigen Schraube des Systems durch den festen Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 hindurchgeht, also die Schraubenachsen des Systems ein Strahlenbündel bilden. Der Fall, wo $\Phi \equiv 0$ ist, ergibt dasselbe Resultat. Dann ist $\alpha = 0$ und damit $k = 0$. Alle Schrauben des Systems sind Nullschrauben und die zugehörigen Schraubungen einfache Drehungen.

Wenn wir nun an den zweiten Hauptfall:

$$\mathfrak{D} = 0$$

herantreten, so bemerken wir zunächst, daß unter dieser Voraussetzung sich aus den Gleichungen (7) $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ eliminieren lassen und diese Elimination ein Resultat von der Form:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}\mathfrak{z} = 0 \tag{19}$$

liefert. Die Linien der Achsenkongruenz sind also alle einer Ebene parallel.[1]) Wählen wir diese Ebene als xy-Ebene des Koordinatensystems, so wird einfach:

$$\mathfrak{z} = 0. \tag{19a}$$

Eliminieren wir dann noch weiter aus den beiden ersten der Gleichungen (7) zuerst $\mathfrak{m}$ und dann $\mathfrak{l}$, so erhalten wir zwei Gleichungen von folgender Form:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{l} + \lambda_1 \mathfrak{n} + \mu_1 \mathfrak{x} + \nu_1 \mathfrak{y} + k\mathfrak{x} = 0, \\ \mathfrak{m} + \lambda_2 \mathfrak{n} + \mu_2 \mathfrak{x} + \nu_2 \mathfrak{y} + k\mathfrak{y} = 0. \end{array}\right. \tag{20}$$

Eliminieren wir aus diesen k, so finden wir:

$$\mathfrak{y}(\mathfrak{l} + \lambda_1 \mathfrak{n} + \mu_1 \mathfrak{x} + \nu_1 \mathfrak{y}) - \mathfrak{x}(\mathfrak{m} + \lambda_2 \mathfrak{n} + \mu_2 \mathfrak{x} + \nu_2 \mathfrak{y}) = 0. \tag{21}$$

Diese quadratische Gleichung stellt in Verbindung mit der Gleichung $\mathfrak{z} = 0$ jetzt die Achsenkongruenz dar. Dieselbe wird, wie man leicht sieht, nunmehr vom vierten Grade, sie bleibt von der zweiten Klasse, ist aber nur noch von der zweiten Ordnung.

---

1) Deshalb gebraucht Study (Geom. d. Dynamen) für diese Kongruenzen den Ausdruck planar.

Dies erkennt man, wenn man in den Gleichungen (20) einsetzt [vgl. (14)]:

$$(14\text{a}) \qquad \mathfrak{l} = -z\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{m} = z\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{n} = x\mathfrak{y} - y\mathfrak{x}$$

und darauf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ eliminiert. So bekommt man:

$$(22) \quad (\mu_1 - \lambda_1 y + k)(\nu_2 + \lambda_2 x + k) - (\nu_1 + \lambda_1 x - z)(\mu_2 - \lambda_2 y + z) = 0.$$

Diese Gleichung ist, wenn man x, y, z als gegeben ansieht, quadratisch für k, man erhält also zwei Strahlen der Achsenkongruenz durch einen beliebigen Punkt. Sieht man k als gegeben und x, y, z als veränderlich an, so stellt die Gleichung ein Paraboloid dar. Sie lautet nämlich ausgeführt:

$$(22\text{a}) \qquad \begin{aligned} & z^2 - \{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \nu_1 - \mu_2\}z \\ & \quad - \{(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2) - \lambda_2 k\}x \\ & \quad - \{(\lambda_1\nu_2 - \nu_1\lambda_2) + \lambda_1 k\}y \\ & \quad + \{(\mu_1 + k)(\nu_2 + k) - \nu_1\mu_2\} = 0, \end{aligned}$$

und da in ihr die Glieder mit x^2, xy, y^2 fehlen, stellt sie in der Tat ein Paraboloid dar, dessen Durchmesser durch zwei Gleichungen:

$$(23) \qquad \lambda_1 x + \lambda_2 y = g, \quad z = h$$

bestimmt werden, wenn g und h beliebige Konstanten bezeichnen Läßt man k nach und nach alle Werte annehmen, so erhält man. eine Schar von Paraboloiden, auf welche sich jetzt die Achsen des Schraubensystems verteilen.

Die einfachste Form, die man in diesem Falle den Gleichungen des Schraubensystems geben kann, entsteht durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems und Drehung desselben um die z-Achse. So lassen sich $\nu_1, \mu_2, \lambda_2 = 0$ machen. Dann werden die Gleichungen (20) und (19a) von der Form:

$$\mathfrak{l} + \lambda\mathfrak{n} + \mu\mathfrak{x} + k\mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{m} + \nu\mathfrak{y} + k\mathfrak{y} = 0, \quad \mathfrak{z} = 0,$$

und wenn man hierin die Werte (14a) einsetzt und aus den Gleichungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ eliminiert, erhält man für die Schar der Paraboloide die Gleichung:

$$z(z - \lambda x) + (k + \nu)(k + \mu - \lambda y) = 0.$$

Setzt man noch:

$$k + \mu = \mathfrak{k}, \quad \mu - \nu = \mathfrak{k}_0,$$

so wird die vorige Gleichung:

$$z(z - \lambda x) + (\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)(\mathfrak{k} - \lambda y) = 0.$$

Für $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0$ ergibt sich eine in zwei Ebenen zerfallende Fläche. Diese Ebenen schneiden sich in der y-Achse.

Wenn die Determinante $\mathfrak{D}$, die durch die Formel (8) gegeben wird, mit allen Unterdeterminanten verschwindet, dann kann man aus den Gleichungen (7) zwei Gleichungen von der Form:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}\mathfrak{z} = 0,$$
$$\mathfrak{A}'\mathfrak{x} + \mathfrak{B}'\mathfrak{y} + \mathfrak{C}'\mathfrak{z} = 0$$

herleiten, die von dem Parameter k unabhängig sind. Diese Gleichungen bedeuten aber, daß die Schraubenachsen des Systems zwei Ebenen, d. h. einer geraden Linie parallel sind. Wählt man diese Linie zur x-Achse, so kann man die vorstehenden Gleichungen ersetzen durch die sehr einfachen Gleichungen:

$$\mathfrak{y} = 0, \quad \mathfrak{z} = 0.$$

Die erste der Gleichungen (7) ergibt dann:

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{l} + \mathfrak{Q}_1\mathfrak{m} + \mathfrak{R}_1\mathfrak{n} + (\mathfrak{U}_1 + k\mathfrak{P}_1)\mathfrak{x} = 0,$$

oder, da mit $\mathfrak{y} = 0$ und $\mathfrak{z} = 0$:

(14b) $$\mathfrak{l} = 0, \quad \mathfrak{m} = z\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{n} = -y\mathfrak{x}$$

wird, folgt:

$$\mathfrak{Q}_1 z - \mathfrak{R}_1 y + \mathfrak{U}_1 + k\mathfrak{P}_1 = 0,$$

woraus, wenn $\mathfrak{P}_1 \neq 0$:

$$k = \frac{\mathfrak{R}_1 y - \mathfrak{Q}_1 z - \mathfrak{U}_1}{\mathfrak{P}_1}.$$

Da k somit einer linearen Funktion von y und z gleich wird, findet man diesen Parameter proportional dem Abstande der zur x-Achse parallelen Schraubenachse von einer zu ihr, nämlich ebenfalls zur x-Achse parallelen Ebene, deren Gleichung lautet:

$$\mathfrak{R}_1 y - \mathfrak{Q}_1 z = \mathfrak{U}_1.$$

Die Schraubenachsen, denen derselbe Parameter zukommt, liegen also allemal in einer zu dieser Ebene parallelen Ebene, in der sie ein Parallelenbüschel bilden.

Wenn wir jetzt $\mathfrak{P}_1 = 0$ annehmen, so reduziert die zu den Gleichungen:

$$\mathfrak{y} = 0, \quad \mathfrak{z} = 0$$

hinzutretende Gleichung sich auf:

$$\mathfrak{Q}_1\mathfrak{m} + \mathfrak{R}_1\mathfrak{n} + \mathfrak{U}_1\mathfrak{x} = 0$$

oder:

$$\mathfrak{Q}_1 z - \mathfrak{R}_1 y + \mathfrak{U}_1 = 0$$

und ist von k unabhängig, so daß jede der auftretenden Achsen mit jedem beliebigen Parameter zusammengenommen eine Schraube des Systems ergibt. Die vorstehende Gleichung drückt aber aus, daß die

Schraubenachsen nicht bloß der yz-Ebene parallel sind, sondern auch in einer zu dieser Ebene senkrechten Ebene liegen. Sie bilden also ein Parallelenbüschel.

Gehen wir nun zu den linearen Schraubensystemen zweiter Stufe über, so haben wir zu den drei Gleichungen (7) noch eine vierte Gleichung:

$$(24) \quad (\mathfrak{P}_4\mathfrak{l} + \mathfrak{Q}_4\mathfrak{m} + \cdots + \mathfrak{W}_4\mathfrak{z}) + k(\mathfrak{P}_4\mathfrak{x} + \mathfrak{Q}_4\mathfrak{y} + \mathfrak{R}_4\mathfrak{z}) = 0$$

hinzuzunehmen. Aus den vier Gleichungen können wir immer $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ eliminieren und erhalten als Eliminationsresultat eine Gleichung:

$$(25) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}\mathfrak{z} = 0,$$

die von dem Parameter k unabhängig ist und für die vierte Gleichung der Schraubenachsen des Systems genommen werden kann. Diese letzteren sind also immer einer Ebene parallel. Verfährt man nun mit den drei ersten Gleichungen (7) genau so wie vorher, leitet aus ihnen unter der Voraussetzung $\mathfrak{D} \neq 0$ zunächst drei Gleichungen von der Form (9) her und aus diesen wieder die Gleichung:

$$(10) \qquad \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) - k(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) = 0,$$

so sieht man sofort, daß im allgemeinen ein gegebenes k zu zwei Schrauben des Systems gehört, denn für gegebenes k ergeben die Gleichungen (10) und (25) zwei Lösungssysteme $\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z}$. Wenn wir nunmehr die Schraubenachsen des Systems suchen, die gleichzeitig einem beliebig gegebenen linearen Strahlenkomplex angehören, so haben wir in der Gleichung dieses Komplexes $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ vermöge der Gleichungen (9) durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ auszudrücken, so daß wir zu einer Gleichung gelangen:

$$(26) \qquad (A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z}) - k(A'\mathfrak{x} + B'\mathfrak{y} + C'\mathfrak{z}) = 0,$$

die wir mit (10) und (25) zusammenzufassen haben.

Eliminieren wir aber k aus (10) und (26), so erhalten wir eine Gleichung dritten Grades:

$$(A'\mathfrak{x} + B'\mathfrak{y} + C'\mathfrak{z})\,\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) - (A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z})(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) = 0,$$

die mit der linearen Gleichung (25) zusammen drei Lösungssysteme $\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:\mathfrak{z}$ ergibt. Damit finden wir drei Schraubenachsen des Systems, die einem beliebigen linearen Strahlenkomplexe angehören, und insbesondere drei Achsen, die eine beliebige gerade Linie treffen. Die Schraubenachsen erfüllen also eine besondere Regelfläche dritten Grades, die nach Cayley als Zylindroid bezeichnet wird.

Wir haben im vorstehenden den Fall übergangen, wo:

$$\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \alpha(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)$$

wird. Dazu ist nach (11) erforderlich und hinreichend, daß in den Gleichungen (9):

$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \alpha, \quad \beta_3 = -\gamma_2 = x_0, \quad \gamma_1 = -\alpha_3 = y_0, \quad \alpha_2 = -\beta_1 = z_0$

gesetzt wird. Da aber dann die Gleichung (10) sich auf:

$$(k - \alpha)\ (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) = 0,$$

also auf $k = \alpha$ reduziert, sagen die Gleichungen (9) in diesem Falle aus, daß die Achsen der Schrauben des Systems durch den Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 gehen. Da sie ferner zufolge (25) einer Ebene parallel sein müssen, bilden sie ein gewöhnliches Strahlenbüschel, und das ganze Achsensystem reduziert sich auf ein Strahlenbüschel.

Gehen wir noch auf den Fall ein, wo von den drei ersten der Systemgleichungen die Determinante $\mathfrak{D}$ verschwindet. In diesem Falle erhalten wir zur Gleichung (25) noch eine ebensolche Gleichung:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{x} + \mathfrak{B}'\mathfrak{y} + \mathfrak{C}'\mathfrak{z} = 0. \tag{27}$$

Die Schraubenachsen des Systems sind also zu zwei Ebenen, d. h. zu einer geraden Linie parallel. Nehmen wir diese gerade Linie als x-Achse, so wird:

$$\mathfrak{y} = 0, \quad \mathfrak{z} = 0. \tag{28}$$

An Stelle der aus den beiden ersten Gleichungen (7) abgeleiteten Gleichungen (20) erhalten wir dann, indem wir darin noch $\mathfrak{y} = 0$ machen, die folgenden:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{l} + \lambda_1 \mathfrak{n} + \mu_1 \mathfrak{x} + k\mathfrak{x} &= 0, \\ \mathfrak{m} + \lambda_2 \mathfrak{n} + \mu_2 \mathfrak{x} \qquad &= 0. \end{aligned} \right. \tag{29}$$

Es wird jetzt aber nach (14b):

$$\mathfrak{l} = 0, \quad \mathfrak{m} = z\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{n} = -y\mathfrak{x}$$

und wenn wir diese Werte in die vorstehenden Gleichungen eintragen:

$$\lambda_1 y - \mu_1 = k, \quad z - \lambda_2 y + \mu_2 = 0. \tag{30}$$

Die zweite dieser Gleichungen zeigt, daß die Schraubenachsen des Systems in einer Ebene liegen, also ein Büschel paralleler Linien bilden. Wir können, wenn $\lambda_1 \neq 0$, das Koordinatensystem noch so um die x-Achse drehen und parallel verschieben, daß die Gleichungen (30) übergehen in $\lambda y + \lambda' z = k, \ z = 0$, d. h.:

$$k = \lambda y, \quad z = 0. \tag{30a}$$

Die Schraubenachsen verlaufen dann in der xy-Ebene der x-Achse parallel, und der ihnen beizuschreibende Schraubenparameter ist ihrem Abstande y von der x-Achse proportional. Für $\lambda_1 = 0$ erhalten wir wieder Schrauben, denen allen derselbe Parameter zukommt.

Wenn von den drei ersten Systemgleichungen die Determinante $\mathfrak{D}$ verschwindet, so daß man sich das Schraubensystem durch die Gleichungen (25) und (27) zusammen mit zwei Gleichungen von der allgemeinen Form (3) dargestellt denken kann, dann kann noch ein besonderer Fall eintreten, der darin besteht, daß die Glieder, die mit k behaftet sind, vermöge der ersteren Gleichungen in den außerdem vorhandenen zwei Systemgleichungen überhaupt zum Verschwinden gebracht werden können, indem sie lineare Kombinationen der linken Seiten jener Gleichungen sind, so daß man vier lineare Gleichungen erhält, die von k gänzlich unabhängig sind. Diese vier Gleichungen ergeben mit der Identität $\mathfrak{x}\mathfrak{l} + \mathfrak{y}\mathfrak{m} + \mathfrak{z}\mathfrak{n} = 0$ zusammengenommen zwei Lösungssysteme. Von diesen ist aber das eine, bei dem $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zusammen $= 0$ werden, auszuschließen. Man erhält also eine einzige Achse, und das Schraubensystem zweiter Stufe besteht aus allen Schrauben mit dieser Achse.

Diese kurze Übersicht wird, so unvollkommen sie ist, genügen, um einen Überblick über die Gestaltungen zu geben, die bei den linearen Schraubensystemen auftreten können. Durch fünf voneinander unabhängige homogene lineare Gleichungen zwischen den Schraubenkoordinaten ist nicht eine Schraube eindeutig festgelegt, sondern zwei Schrauben, die sich aber nur durch den Sinn unterscheiden, während sie in der Achse und dem Parameter übereinstimmen. Innerhalb der Schraubengeometrie kann diese Übereinstimmung als eine völlige gelten und man kann, wie schon oben betont worden, von den beiden Schrauben wie von einer einzigen reden.

Analytisch hat dies zur Folge, daß man statt der den absoluten Werten nach festgelegten Schraubenkoordinaten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, zwischen denen die Relation $\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2 = 1$ bestehen sollte, die bloßen Verhältniswerte $\mathfrak{p}:\mathfrak{q}:\mathfrak{r}:\mathfrak{u}:\mathfrak{v}:\mathfrak{w}$ gebrauchen kann und von einer identischen Relation zwischen denselben absehen darf. Dann aber haben wieder nur Gleichungen, die in diesen Koordinaten homogen sind, einen Sinn, und der Parameter k muß wieder durch die Gleichung:

$$k = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{p} + \mathfrak{v}\mathfrak{q} + \mathfrak{w}\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2}$$

gegeben werden. Wir wollen indessen der ursprünglichen Festsetzung für gewöhnlich treu bleiben.

Wir können aber den Begriff der Schraubenkoordinaten noch weit verallgemeinern, und für diese Verallgemeinerung erweist sich die Verwendung von Verhältniswerten als ersprießlich. Seien nämlich $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i \ldots (i = 1 \ldots \mu)$ die Koordinaten von irgend μ Schrauben $\mathfrak{s}_i$ eines linearen Systems μ^{ter} Stufe, die nicht alle einem System niedrigerer Stufe angehören, und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \ldots$ die Koordinaten einer beliebigen weiteren Schraube $\mathfrak{s}$ des Systems, so bestehen immer sechs Gleichungen von der Form:

$$(31)\qquad \begin{aligned} \omega\mathfrak{p} &= \sum_1^\mu \omega_i \mathfrak{p}_i, & \omega\mathfrak{q} &= \sum_1^\mu \omega_i \mathfrak{q}_i, & \omega\mathfrak{r} &= \sum_1^\mu \omega_i \mathfrak{r}_i, \\ \omega\mathfrak{u} &= \sum_1^\mu \omega_i \mathfrak{u}_i, & \omega\mathfrak{v} &= \sum_1^\mu \omega_i \mathfrak{v}_i, & \omega\mathfrak{w} &= \sum_1^\mu \omega_i \mathfrak{w}_i. \end{aligned}$$

Hierbei können wir ω durch die Bedingung $\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2 = 1$ dem absoluten Werte nach aus den als gefunden angenommenen Werten $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_\mu$ berechnen, und dann wollen wir die Verhältnisse dieser Werte $\omega_1 \ldots \omega_\mu$, die zur Festlegung der Schraube $\mathfrak{s}$ innerhalb des Systems ausreichend sind, als die allgemeinen Koordinaten dieser Schraube innerhalb des Systems bezeichnen.[1])

Aus den Gleichungen (31) leiten wir ab:

$$\omega^2(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2) = \omega^2 = \sum_{i,j} c_{ij}\omega_i\omega_j \qquad (i, j = 1 \ldots \mu),$$

indem wir:

$$(32)\qquad c_{ij} = \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j + \mathfrak{q}_i\mathfrak{q}_j + \mathfrak{r}_i\mathfrak{r}_j$$

setzen, und weiter:

$$\omega^2(\mathfrak{p}\mathfrak{u} + \mathfrak{q}\mathfrak{v} + \mathfrak{r}\mathfrak{w}) = \sum_{i,j} k_{ij}\omega_i\omega_j \qquad (i, j = 1 \ldots \mu),$$

dabei wird der Koeffizient von ω_i^2:

$$(33)\qquad k_{ii} = \mathfrak{p}_i\mathfrak{u}_i + \mathfrak{q}_i\mathfrak{v}_i + \mathfrak{r}_i\mathfrak{w}_i,$$

d. h. der Parameter der Schraube $\mathfrak{s}_i$, und der Koeffizient von $\omega_i\omega_j$:

$$(34)\qquad 2k_{ij} = \mathfrak{p}_i\mathfrak{u}_j + \mathfrak{q}_i\mathfrak{v}_j + \mathfrak{r}_i\mathfrak{w}_j + \mathfrak{u}_i\mathfrak{p}_j + \mathfrak{v}_i\mathfrak{q}_j + \mathfrak{w}_i\mathfrak{r}_j$$

die Konkurrenz der Schrauben $\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{s}_j$. Hiernach wird der Parameter der Schraube $\mathfrak{s}$ allgemein:

$$(35)\qquad k = \frac{\Sigma k_{ij}\omega_i\omega_j}{\Sigma c_{ij}\omega_i\omega_j} \qquad (i, j = 1 \ldots \mu).$$

Für die Nullschrauben oder einfachen Linien, die unter den Schrauben des Systems enthalten sind, wird $k = 0$, also:

$$\Sigma k_{ij}\,\omega_i\,\omega_j = 0 \qquad (i, j = 1 \ldots \mu).$$

Zwei Schrauben $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ des Systems, die zu den Werten $\omega_1 \ldots \omega_\mu$ und $\omega_1' \ldots \omega_\mu'$ gehören, sind korreziprok, wenn:

$$\Sigma k_{ij}\,\omega_i\,\omega_j' = 0 \qquad (i, j = 1 \ldots \mu)$$

wird.

1) Die absoluten Werte der ω_i lassen sich als die Komponenten der Schraubung mit der Amplitude ω in der Schraube $\mathfrak{s}$ nach den Schrauben $\mathfrak{s}_i$ ansehen. Vgl. Ball, Theory of Screws, Chap. IV.

Besonders einfach gestalten sich die letzten Formeln in dem Falle, wo:

$$2k_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \qquad (i, j = 1 \dots \mu)$$

wird. Dann bilden die in dem linearen Systeme angenommenen Fundamentalschrauben $\mathfrak{s}_1 \dots \mathfrak{s}_\mu$ ein korreziprokes System, jede von ihnen ist zu den übrigen korreziprok. Bilden außerdem, was nur für $\mu < 4$ möglich ist, die Fundamentalschrauben ein orthogonales System, d. h. kreuzen die Achsen von je zwei unter ihnen einander rechtwinklig, so wird auch

$$c_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \qquad (i, j = 1 \dots \mu).$$

Die Formel für den Parameter einer beliebigen Schraube $\mathfrak{s}$ des Systems wird dann einfach:

$$k = \frac{\Sigma k_{ii} \omega_i^2}{\Sigma c_{ii} \omega_i^2}. \tag{35a}$$

Nehmen wir nun $\mu = 6$, so erhalten wir an Stelle des linearen Schraubensystems die Gesamtheit aller Schrauben überhaupt, und die Werte $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_6$, deren Verhältnisse dann eine bestimmte Schraube in der Gesamtheit aller Schrauben festlegen, haben wir als die allgemeinsten Schraubenkoordinaten anzusehen, deren wir uns bedienen können. Wenn die Fundamentalschrauben dieses allgemeinen Koordinatensystems insbesondere ein korreziprokes System bilden[1]), also die 15 Bedingungen:

$$\mathfrak{p}_i \mathfrak{u}_j + \mathfrak{q}_i \mathfrak{v}_j + \mathfrak{r}_i \mathfrak{w}_j + \mathfrak{u}_i \mathfrak{p}_j + \mathfrak{v}_i \mathfrak{q}_j + \mathfrak{w}_i \mathfrak{r}_j = 0 \tag{36}$$
$$(i, j = 1, 2 \dots 6, \; i \neq j)$$

erfüllt sind, dann lassen sich die Gleichungen (31) leicht umkehren, d. h. aus den gegebenen metrischen Koordinaten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \dots \mathfrak{w}$ die projektiven Koordinaten $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_6$ berechnen. Multiplizieren wir nämlich die Gleichungen (31) der Reihe nach mit

$$\mathfrak{u}_j, \quad \mathfrak{v}_j, \quad \mathfrak{w}_j, \quad \mathfrak{u}_j, \quad \mathfrak{v}_j, \quad \mathfrak{w}_j$$

und addieren sie, so ergibt sich mit Rücksicht auf (33) und (36):

$$\omega (\mathfrak{u}_j \mathfrak{p} + \mathfrak{v}_j \mathfrak{q} + \mathfrak{r}_j \mathfrak{w} + \mathfrak{p}_j \mathfrak{u} + \mathfrak{q}_j \mathfrak{v} + \mathfrak{r}_j \mathfrak{w}) = 2k_{jj} \omega_j.$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist die Konkurrenz der darzustellenden Schraube $\mathfrak{s}$ und der j^{ten} Fundamentalschraube $\mathfrak{s}_j$. Diese allgemeinen Koordinaten ω_j verhalten sich also wie die Konkurrenzen der darzustellenden Schraube und der Fundamentalschrauben, dieser Ausdruck jedesmal geteilt durch den doppelten Parameter der betreffenden Fundamentalschraube.

Bildet man die Gleichungen (31) noch einmal für eine zweite Schraube, deren Koordinaten man durch oben angesetzte Akzente

1) Dem Wesen nach rühren diese Koordinaten von F. Klein her (Math. Ann. 2, 1869, p. 204).

von denen der ersten Schraube unterscheidet, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (36), daß:

$$\text{(37)} \qquad \omega\omega'(\mathfrak{p}\mathfrak{u}' + \mathfrak{q}\mathfrak{v}' + \mathfrak{r}\mathfrak{w}' + \mathfrak{u}\mathfrak{p}' + \mathfrak{v}\mathfrak{q}' + \mathfrak{r}\mathfrak{w}') = 2\sum k_{ii}\omega_i\omega_i'$$

wird. Auf dieselbe Weise finden wir:

$$\text{(38)} \qquad \omega^2(\mathfrak{p}\mathfrak{u} + \mathfrak{q}\mathfrak{u} + \mathfrak{r}\mathfrak{w}) = \sum k_{ii}\omega_i^2.$$

Diese Formeln enthalten die charakteristische Eigenschaft der korreziproken Systeme.

Eine andere beachtenswerte Art von Schraubenkoordinaten sind die **tetraedralen Koordinaten**.[1]) Man kann diese definieren als die Momente einer Dyname in der festzulegenden Schraube für die Kanten eines festen Tetraeders, jedesmal multipliziert mit der Länge der betreffenden Kante. Seien $x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, 3, 4)$ die cartesischen Koordinaten der Tetraederecken und setzen wir:

$$X_{\varrho\sigma} = x_\sigma - x_\varrho, \quad Y_{\varrho\sigma} = y_\sigma - y_\varrho, \quad Z_{\varrho\sigma} = z_\sigma - z_\varrho,$$
$$L_{\varrho\sigma} = y_\varrho z_\sigma - z_\varrho y_\sigma, \quad M_{\varrho\sigma} = z_\varrho x_\sigma - x_\varrho z_\sigma, \quad N_{\varrho\sigma} = x_\varrho y_\sigma - y_\varrho x_\sigma,$$

so werden die tetraedralen Koordinaten definiert durch die sechs Gleichungen:

$$\text{(39)} \qquad \mathfrak{p}_{\varrho\sigma} = R(L_{\varrho\sigma}\mathfrak{p} + M_{\varrho\sigma}\mathfrak{q} + N_{\varrho\sigma}\mathfrak{r} + X_{\varrho\sigma}\mathfrak{u} + Y_{\varrho\sigma}\mathfrak{v} + Z_{\varrho\sigma}\mathfrak{w}).$$
$$(\varrho, \sigma = 1, 2, 3, 4, \; \varrho \neq \sigma)$$

Aus diesen Gleichungen folgt ohne weiteres:

$$\text{(40)} \qquad \mathfrak{p}_{23}\mathfrak{p}_{14} + \mathfrak{p}_{31}\mathfrak{p}_{24} + \mathfrak{p}_{12}\mathfrak{p}_{34} = R^2 T(\mathfrak{p}\mathfrak{u} + \mathfrak{q}\mathfrak{v} + \mathfrak{r}\mathfrak{w}),$$

wenn T das sechsfache Volumen des Tetraeders bedeutet, und ebenso, wenn die Koordinaten einer zweiten Schraube wieder durch Akzente von denen der ersten unterschieden werden:

$$\text{(41)} \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{p}_{23}\mathfrak{p}_{14}' + \mathfrak{p}_{31}\mathfrak{p}_{24}' + \mathfrak{p}_{12}\mathfrak{p}_{34}' + \mathfrak{p}_{14}\mathfrak{p}_{23}' + \mathfrak{p}_{24}\mathfrak{p}_{31}' + \mathfrak{p}_{34}\mathfrak{p}_{12}' \\ &\qquad = RR'T(\mathfrak{p}\mathfrak{u}' + \mathfrak{q}\mathfrak{v}' + \mathfrak{r}\mathfrak{w}' + \mathfrak{u}\mathfrak{p}' + \mathfrak{v}\mathfrak{q}' + \mathfrak{w}\mathfrak{r}'). \end{aligned}$$

Die vorstehend kurz charakterisierten Koordinatensysteme sind von Vorteil, wenn es sich um die allgemeine Theorie der linearen Schraubensysteme handelt. Der besonderen Untersuchung dieser letzteren, welche auf den Schraubenparameter und die Absonderung der Schrauben mit gleichem Parameter basiert ist, sind die gewöhnlichen, metrischen Koordinaten besser angepaßt, und sie kommen daher im folgenden ausschließlich zur Verwendung.

1) Diese hat G. Battaglini bei seinen Untersuchungen benutzt (Napoli Rendic. 8, 1869, p. 87, 9, 1870, p. 89, Giorn. di mat. 10, 1872, p. 133, 207). Vgl. auch Zeuthen, Math. Ann. 1, 1869, p. 432. H. Mohr legt ein besonderes Tetraeder zugrunde (Civiling. (2) 34, 1888, p. 691, wieder abgedruckt in seinen gesammelten Abhandlungen über technische Mechanik).

Zwölftes Kapitel.

Schraubenreihen.

Wir gehen nun dazu über, die linearen Schraubensysteme im einzelnen zu besprechen und beginnen mit dem Schraubensystem zweiter Stufe oder, wie wir kurz sagen wollen, der **Schraubenreihe**. Wir schließen dabei die besonderen Fälle, wo die Achsen der Schraubenreihe einer Ebene angehören, aus, und beschränken uns auf den allgemeinen Fall als den, der die reichste geometrische Ausbeute verspricht. Die erste Aufgabe, die wir uns stellen, ist die, die einfachste analytische Darstellung der Schraubenreihe zu suchen.

Da die Achsen der Schraubenreihe einer Ebene parallel sind, so können wir uns zunächst das Koordinatensystem so gewählt denken, daß die Schraubenachsen der xy-Ebene parallel sind. Dann wird von ihren Koordinaten:

$$\mathfrak{z} = 0, \tag{1}$$

und diese einfachere Gleichung tritt an die Stelle der Gleichung (25) des vorigen Kapitels. Die Gleichungen (9) dieses Kapitels werden dann:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{l} &= \alpha_1 \mathfrak{x} + \beta_1 \mathfrak{y} - k\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{m} &= \alpha_2 \mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} - k\mathfrak{y}, \\ \mathfrak{n} &= \alpha_3 \mathfrak{x} + \beta_3 \mathfrak{y}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Diese Gleichungen wollen wir durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems weiter zu vereinfachen suchen. Setzen wir demgemäß:

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z', \tag{3}$$

indem x', y', z' die neuen Koordinaten bedeuten, dann bleiben $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ungeändert, dagegen wird z. B.:

$$\mathfrak{n} = x\mathfrak{y} - y\mathfrak{x} = x'\mathfrak{y} - y'\mathfrak{x} + x_0\mathfrak{y} - y_0\mathfrak{x} = \mathfrak{n}' + x_0\mathfrak{y} - y_0\mathfrak{x}, \tag{4}$$

wenn wir die dem $\mathfrak{n}$ in dem neuen Koordinatensystem entsprechende Größe $x'\mathfrak{y} - y'\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{n}'$ bezeichnen. Machen wir nun:

$$x_0 = \beta_3, \quad y_0 = -\alpha_3, \tag{5}$$

so sehen wir sofort, daß die dritte der Gleichungen (2) jetzt wird:

$$\mathfrak{n}' = 0. \tag{6}$$

Die Schraubenachsen der Reihe sind also nicht bloß der xy-Ebene parallel, sie treffen auch alle eine zu dieser Ebene senkrechte gerade Linie, nämlich die neue z-Achse, und diese Linie wollen wir als die **Leitlinie** der Schraubenreihe bezeichnen. Die Schraubenachsen müssen die Leitlinie, da sie einer zu ihr senkrechten Ebene parallel sind, alle unter rechtem Winkel schneiden.

Der obigen Formel für $\mathfrak{n}$ entsprechend finden wir, da $\mathfrak{z} = 0$:

$$\text{(4a)} \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{l}' - z_0 \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}' + z_0 \mathfrak{x},$$

und wenn wir diese Werte in die zwei ersten Gleichungen (2) einsetzen, werden die letzteren:

$$\text{(2a)} \quad \mathfrak{l}' = \alpha_1 \mathfrak{x} + (\beta_1 + z_0)\mathfrak{y} - k\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{m}' = (\alpha_2 - z_0)\mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} - k\mathfrak{y}.$$

Wir wollen nun noch das Koordinatensystem einer Drehung um die neue z-Achse unterwerfen. Ist ϱ der Drehungswinkel und sind $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ die Werte, die hierbei an die Stelle von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ treten, so können wir setzen:

$$\text{(7)} \qquad \mathfrak{x} = \cos\varrho\, \mathfrak{x}' + \sin\varrho\, \mathfrak{y}', \quad \mathfrak{y} = -\sin\varrho\, \mathfrak{x}' + \cos\varrho\, \mathfrak{y}'.$$

Ferner wird, da $\mathfrak{l}' = -z'\mathfrak{y}$, $\mathfrak{m}' = z'\mathfrak{x}$, wenn wir:

$$\mathfrak{l}'' = -z'\mathfrak{y}', \quad \mathfrak{m}'' = z'\mathfrak{x}'$$

annehmen:

$$\text{(7a)} \quad \mathfrak{l}' = \cos\varrho\, \mathfrak{l}'' + \sin\varrho\, \mathfrak{m}'', \quad \mathfrak{m}' = -\sin\varrho\, \mathfrak{l}'' + \cos\varrho\, \mathfrak{m}''.$$

Wenn wir nun die Substitutionen (7) und (7a) in (2a) ausführen und aus den entstehenden beiden Gleichungen $\mathfrak{l}''$ und $\mathfrak{m}''$ berechnen, so erhalten wir ein Resultat von folgender Form:

$$\text{(2b)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{l}'' = \alpha_1'\mathfrak{x}' + (\beta_1' + z_0)\mathfrak{y}' - k\mathfrak{x}', \\ \mathfrak{m}'' = (\alpha_2' - z_0)\mathfrak{x}' + \beta_2'\mathfrak{y}' - k\mathfrak{y}'. \end{cases}$$

Hierin ist z. B.:

$$\beta_1' = \beta_1 \cos\varrho^2 - \alpha_2 \sin\varrho^2 + (\alpha_1 - \beta_2)\cos\varrho \sin\varrho,$$

$$\alpha_2' = \alpha_2 \cos\varrho^2 - \beta_1 \sin\varrho^2 + (\alpha_1 - \beta_2)\cos\varrho \sin\varrho.$$

Wir wollen nun z_0 und ϱ so zu bestimmen suchen, daß:

$$\beta_1' + z_0 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_2' - z_0 = 0$$

wird. Durch Addition dieser beiden Gleichungen folgt mit Rücksicht auf die vorstehenden Werte von β_1' und α_2':

$$(\alpha_2 + \beta_1)\cos 2\varrho + (\alpha_1 - \beta_2)\sin 2\varrho = 0$$

und daraus:

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{tang} 2\varrho = \frac{\alpha_2 + \beta_1}{\beta_2 - \alpha_1}.$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt sich aber:

$$\text{(9)} \qquad z_0 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta_1).$$

Denken wir uns ϱ und z_0 aus den gefundenen Gleichungen (8) und (9) bestimmt, schreiben dann einfacher $\alpha_1' = \alpha$, $\beta_2' = \beta$ und lassen die Akzente an den Linienkoordinaten fort, so erhalten wir aus den Gleichungen (2b):

$$\mathfrak{l} = (\alpha - k)\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{m} = (\beta - k)\mathfrak{y}, \tag{10}$$

und diese Gleichungen zusammen mit:

$$\mathfrak{n} = 0, \quad \mathfrak{z} = 0 \tag{11}$$

repräsentieren die gesuchte einfachste Darstellung für die Achsen der Schraubenreihe. Die Schraubenreihe selbst ist dann durch die Gleichungen gegeben:

$$\mathfrak{u} = \alpha\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = \beta\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{w} = 0, \quad \mathfrak{r} = 0.\text{[1]} \tag{12}$$

Aus den Gleichungen (10) und (11) ergibt sich, da:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{l} + \mathfrak{y}\mathfrak{m} + \mathfrak{z}\mathfrak{n} = 0, \quad \text{also hier} \quad \mathfrak{x}\mathfrak{l} + \mathfrak{y}\mathfrak{m} = 0$$

sein muß, für den Parameter k der Wert:

$$k = \frac{\alpha\mathfrak{x}^2 + \beta\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}. \tag{13}$$

Sind x, y, z die Koordinaten irgendeines Punktes auf einer Schraubenachse der Reihe, so ergibt die erste der Gleichungen (11):

$$x\mathfrak{y} - y\mathfrak{x} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x}{y} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}, \tag{14}$$

und setzt man in den Gleichungen (10):

$$\mathfrak{l} = -z\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{m} = z\mathfrak{x}$$

ein, so werden sie:

$$\begin{cases} (\alpha - k)\mathfrak{x} + z\mathfrak{y} = 0, \\ -z\mathfrak{x} + (\beta - k)\mathfrak{y} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Daraus folgt, wenn wir $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eliminieren:

$$(\alpha - k)(\beta - k) + z^2 = 0. \tag{16}$$

Diese Gleichung ist, wenn wir in ihr z als konstant ansehen, vom zweiten Grade für k.

Wir sehen somit **erstens**, daß in jeder Parallelebene zur xy-Ebene, d. h. in jeder Ebene, die senkrecht zur Leitlinie der Schraubenreihe gestellt ist, zwei Schraubenachsen der Reihe liegen. Durch jeden Punkt der Leitlinie gehen demnach zwei Schraubenachsen der Reihe, und diese Linie ist eine Doppellinie der Regelfläche, welche diese Schraubenachsen erfüllen. **Zweitens** aber zeigt sich, daß die Gleichung (16) ungeändert bleibt, wenn wir z mit $-z$ vertauschen. Zu den Schraubenachsen, die in zwei von der xy-Ebene gleich weit entfernten Parallelebenen liegen, gehören also dieselben

1) Vgl. Padeletti, Rendic. della R. Accad. di Napoli 22, 1883.

Werte des Parameters, und die Achsen zweier Schrauben der Reihe, die gleichen Parameter besitzen, sind von der xy-Ebene, die wir die Hauptebene der Schraubenreihe nennen wollen, gleich weit nach oben und unten entfernt. Zwei solche Schrauben mit gleichem Parameter wollen wir als konjugierte Schrauben der Reihe und ihre Achsen ebenfalls als konjugierte Achsen bezeichnen.

Diese Paare konjugierter Achsen haben eine besondere Bedeutung für das Schraubensystem vierter Stufe, das zu dem vorliegenden Schraubensystem zweiter Stufe reziprok ist. Nehmen wir nämlich irgendein Paar konjugierter Achsen und sei k der Schraubenparameter, der zu ihnen gehört, ziehen wir dann irgendeine Linie, die beide Achsen trifft, und sehen diese Linie als Achse einer Schraube mit dem Parameter $-k$ an, so gehört diese Schraube zu dem reziproken System. In der Tat ist sie zu den beiden Schrauben der Schraubenreihe, denen der Parameter k zukommt, korreziprok, weil sie entgegengesetzt gleichen Parameter besitzt und die Achsen der beiden Schrauben trifft (S. 139). Damit aber ist sie zu allen Schrauben der Schraubenreihe korreziprok und gehört mithin zu dem reziproken System. Die Paare konjugierter Achsen der Schraubenreihe bilden demnach die Leitlinien der linearen Strahlenkongruenzen, welche durch die Achsen der Schrauben gleichen Parameters in dem reziproken Systeme geliefert werden, und so haben wir die einfache Art gefunden, wie wir geometrisch dieses reziproke System aus der Schraubenreihe ableiten können. Analytisch leiten wir es ab, indem wir die Bedingung dafür aufstellen, daß eine beliebige zu dem System gehörende Schraube, deren Koordinaten $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$ seien, zu allen Schrauben, deren Koordinaten den Gleichungen (12) genügen, korreziprok ist. Aus der allgemeinen Beziehung zwischen den Koordinaten zweier korreziproker Schrauben:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{u}' + \mathfrak{q}\mathfrak{v}' + \mathfrak{r}\mathfrak{w}' + \mathfrak{u}\mathfrak{p}' + \mathfrak{v}\mathfrak{q}' + \mathfrak{w}\mathfrak{r}' = 0$$

folgt aber mit Rücksicht auf die Gleichungen (12):

$$(\mathfrak{u}' + \alpha\mathfrak{p}')\,\mathfrak{p} + (\mathfrak{v}' + \beta\mathfrak{q}')\,\mathfrak{q} = 0,$$

und da diese Gleichung für jeden Wert des Verhältnisses $\mathfrak{p}:\mathfrak{q}$ erfüllt sein soll, ergibt sich:

$$\mathfrak{u}' + \alpha\mathfrak{p}' = 0, \quad \mathfrak{v}' + \beta\mathfrak{q}' = 0 \tag{17}$$

als die Darstellung des reziproken Systems.

Kehren wir nach dieser Abschweifung wieder zu der Schraubenreihe zurück, so können wir in den Gleichungen (15) zufolge (14) $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ durch die proportionalen Werte x, y ersetzen und erhalten so die Gleichungen:

$$\begin{cases} (\alpha - k)x + zy = 0, \\ -zx + (\beta - k)y = 0 \end{cases} \tag{18}$$

für die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der Schraubenachse, die zu einer Schraube der Reihe vom Parameter k gehört. Führen wir den Winkel φ ein, den die Verbindungsebene dieser Schraubenachse und der Leitlinie mit der xz-Ebene bildet, so wird:

$$x : y = \cos\varphi : \sin\varphi, \tag{19}$$

und die Gleichungen (18) nehmen somit die Form an:

$$\begin{cases} (\alpha - k)\cos\varphi + z\cdot\sin\varphi = 0, \\ -z\cdot\cos\varphi + (\beta - k)\sin\varphi = 0. \end{cases} \tag{18a}$$

Aus diesen Gleichungen folgt einerseits durch Elimination von z:

$$k = \alpha\cos\varphi^2 + \beta\sin\varphi^2$$

oder:

$$k = b - c\cos 2\varphi, \tag{20}$$

wenn wir:

$$b = \frac{\beta+\alpha}{2}, \quad c = \frac{\beta-\alpha}{2} \tag{21}$$

setzen, anderseits durch Elimination von k:

$$z = c\cdot\sin 2\varphi. \tag{22}$$

Die Gleichungen (19) und (22) lassen sich als die Gleichungen der durch den Winkel φ innerhalb der Reihe festgelegten Schraubenachse ansehen, und die Gleichung (20) ergibt den zugehörigen Schraubenparameter k.

Man sieht dann sofort, daß zu entgegengesetzt gleichen Werten des Winkels φ bei entgegengesetzt gleichen z gleiche Werte k gehören, also zwei konjugierte Schraubenachsen, und die Paare konjugierter Achsen liegen demnach symmetrisch zu der x- und y-Achse, die wir als die Hauptachsen der Schraubenreihe bezeichnen wollen. Diese Hauptachsen gehören ebenfalls zu den Schraubenachsen der Reihe, in ihnen fallen je zwei konjugierte Achsen zusammen, die zugehörigen Parameter sind β und α und repräsentieren den größten und den kleinsten Wert, den der Parameter innerhalb der Schraubenreihe annehmen kann. Dies alles sieht man sofort, wenn man in den Formeln (19) bis (22) einmal $\varphi = 0$ und das andere Mal $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt. Dann wird einmal der Parameter $k = b - c = \alpha$ und das andere Mal $= b + c = \beta$, und die übrigen möglichen Werte des Parameters liegen zufolge der Gleichung (20) zwischen diesen beiden Extremwerten.

Die Gleichung (22) zeigt, daß z dem absoluten Werte nach höchstens gleich c werden kann. Alle Schraubenachsen der Reihe sind sonach zwischen den beiden durch die Gleichungen

$$z = c \text{ und } z = -c$$

dargestellten Parallelebenen zur Hauptebene enthalten.

In jeder dieser beiden Ebenen liegt eine einzige Schraubenachse der Reihe, und wir wollen diese beiden Achsen als die **Grenzachsen** bezeichnen. Zunächst ist nach Gleichung (22) klar, daß die Schraubenachsen, die in einer zur Hauptebene parallelen Ebene liegen, zu komplementären Winkeln gehören, denn es ist:

$$\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin 2\varphi.$$

Gleichzeitig werden die zu zwei solchen Achsen gehörenden Parameter:

$$k = b - c\cos 2\varphi$$

und:

$$k' = b - c\cos 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = b + c\cos 2\varphi,$$

woraus:

$$(23) \qquad k + k' = 2b$$

folgt. Die Summe dieser Parameter ist also konstant. Die beiden Komplementärwinkel werden aber einander gleich oder um π verschieden, wenn $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ angenommen wird. Dann fallen die beiden Schraubenachsen, die in der zur Hauptebene parallelen Ebene liegen, zusammen, und man sieht aus (22) sofort, daß dabei:

$$z = c \text{ oder } z = -c$$

wird, während in beiden Fällen der zugehörige Parameter $k = b$ ist. Die beiden Grenzachsen bilden also ein Paar konjugierter Achsen, und zwar wird der zugehörige Parameter k das arithmetische Mittel aus den beiden **Hauptparametern** α und β.

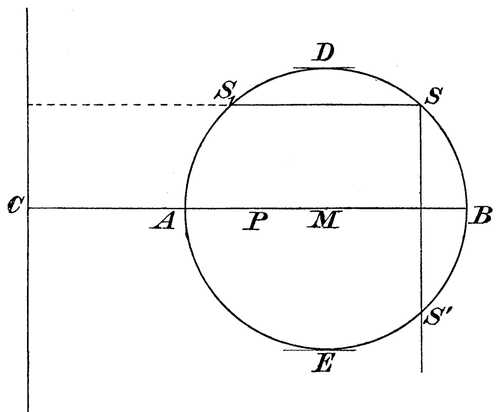

Fig. 15.

Wir wollen nun den Wert des Parameters k jedesmal auf der zugehörigen Schraubenachse von der Leitlinie aus als Länge abtragen. Von dem Endpunkte S dieser Strecke sind dann z und k die rechtwinkligen Koordinaten in einer Ebene, die wir als um die Leitlinie drehbar auffassen. Die Endpunkte aller aufgetragenen Strecken erfüllen in dieser beweglichen Ebene eine Kurve, deren Darstellung in den Koordinaten k und z wir aus den Gleichungen (20) und (22) durch

Elimination des Winkels φ sofort ableiten. Wir finden so für die Kurvengleichung:

$$(k-b)^2 + z^2 = c^2. \tag{24}$$

Die Kurve ist also ein Kreis mit dem Radius c, dessen Mittelpunkt auf der in die xy-Ebene fallenden Achse der beweglichen Ebene im Abstande b von der Leitlinie liegt. Wir nennen den Kreismittelpunkt M, den Fußpunkt des aus ihm auf die Leitlinie gefällten Lotes C und die Schnittpunkte dieses Lotes mit dem Kreise A und B. (Vgl. Fig. 15.) Dann wird:

$$CM = b, \quad CA = b - c = \alpha, \quad CB = b + c = \beta. \tag{25}$$

Die Gleichungen (20) und (22) lassen sich als eine Parameterdarstellung des Kreises in der beweglichen Ebene deuten. Der zu dem Winkel φ gehörige Punkt S ist dann dadurch charakterisiert, daß der zu dem Bogen AS gehörende Zentriwinkel $= 2\varphi$ ist. Gleichzeitig ist der Winkel, den die um die Leitlinie drehbare Ebene mit der xz-Ebene bildet, φ selbst, und wir erhalten somit die folgende von Lewis[1]) angegebene, höchst einfache geometrische Konstruktion der Schraubenreihe:

Dreht eine Ebene sich um eine feste Achse, während gleichzeitig in ihr ein Punkt S mit doppelt so großer Winkelgeschwindigkeit einen Kreis beschreibt, so durchläuft das von dem Punkte S auf die Drehachse gefällte Lot die sämtlichen Achsen einer Schraubenreihe, wobei jedesmal die Länge des Lotes den Parameter k der zugehörigen Schraube angibt.

Wir wollen nun die bewegliche Ebene von der Leitlinie, um die sie sich drehen sollte, losreißen und sie in eine beliebige feste Lage bringen. Sie soll dann die Rolle einer Bildebene spielen.[2]) Zu jedem Punkte des in ihr liegenden Kreises gehört eine Schraube der Schraubenreihe. Der Punkt soll deshalb der Bildpunkt dieser Schraube heißen, und den ganzen Kreis wollen wir als Bildkreis bezeichnen. Die Leitlinie, um welche die Ebene drehbar war, soll in ihrer Lage gegen den Bildkreis festgehalten werden und nunmehr die Parameterachse genannt werden. Diese Benennung hat ihren Grund darin, daß der Abstand eines Bildpunktes von ihr den Parameter der zugehörigen Schraube angibt. Die Punkte A und B gehören zu den Hauptachsen der Schraubenreihe, die Punkte D und E, in denen zwei zur Parameterachse senkrechte Tangenten den Bildkreis berühren, zu den Grenzachsen.

1) Messenger of Mathematics, vol. 9, 1879, p. 1.

2) Sir Robert Ball, Proceedings of the R. Irish Acad. (2) vol. 4, 1889, p. 29, Cunningham Memoirs of the R. Ir. Acad. No. 4, 1886 und Mannheim, Comptes Rendus, T. 100, 1885, p. 268.

Aus der Gewinnungsart der Bildebene ist sofort klar, daß der Abstand des Bildpunktes S von dem Durchmesser AB den Abstand der zugehörigen Schraubenachse von der Hauptebene angibt, während der zu dem Bogen AS gehörende Peripheriewinkel dem Winkel gleich ist, den die Schraubenachse mit der xz-Ebene bildet. Zwei Schraubenachsen, die in derselben Normalebene der Leitlinie liegen, entsprechen sonach zwei Bildpunkte S, S_1, die auf demselben Lote der Parameterachse enthalten sind. Zwei Schraubenachsen kommt derselbe Parameter zu, sie bilden also ein Paar konjugierter Achsen, wenn ihre Bildpunkte S, S' auf einer Parallelen zur Parameterachse liegen.

Denkt man sich den Bildkreis, solange er noch in einer um die Leitlinie drehbaren Ebene vorgestellt wird, ohne Änderung seiner Größe in der Richtung normal zur Leitlinie beliebig verschoben, so sieht man sofort, daß sich die Schraubenachsen der Reihe in keiner Weise ändern, während zu allen Parametern k eine und dieselbe Größe hinzukommt. Wenn also die Schraubenachsen der Reihe der Lage nach sämtlich gegeben sind, so existieren noch unendlich viele zugehörige Parameterverteilungen, die sich aber alle nur um eine additive Konstante unterscheiden. Von diesen Schraubenreihen, deren Achsen übereinstimmen, wollen wir sagen, sie bilden eine syzygetische Schar.

Wir wollen nun bemerken, daß wir drei verschiedene Arten von Schraubenreihen zu unterscheiden haben, je nachdem in der Bildebene die Parameterachse den Bildkreis schneidet, berührt oder nicht schneidet. Im ersten Falle gibt es nämlich in der Reihe zwei Schrauben von verschwindendem Parameter, also einfache Linien, die den Schnittpunkten der Parameterachse mit dem Bildkreise entsprechen. Diese beiden Linien repräsentieren immer ein Paar konjugierter Schrauben, da ihnen beiden der gleiche Parameter 0 zukommt. Im zweiten Falle vereinigen sich die beiden Linien in einer Hauptachse, im dritten Falle werden sie imaginär. Im ersten Falle können wir von einer hyperbolischen Schraubenreihe sprechen, im zweiten Falle von einer parabolischen und im dritten von einer elliptischen. Ausgezeichnet ist noch der Fall, wo die Parameterachse durch den Mittelpunkt des Bildkreises geht. Dann fallen die Schrauben vom Parameter Null in die Grenzachsen und kreuzen sich somit rechtwinklig. Wir können diesen Fall durch die Bezeichnung als „gleichseitige Schraubenreihe“ charakterisieren. Zwei Schrauben, deren Achsen in einer Normalebene der Leitlinie liegen, haben dann immer entgegengesetzt gleiche Parameter.

Man sieht nun sofort, daß in einer syzygetischen Schar alle Arten von Schraubenreihen vertreten sind, und zwar zwei parabolische. Die Parameter der einen von diesen letzteren sind alle positiv, die

Parameter der anderen alle negativ, und die Differenz zweier Parameter, die zu derselben Achse gehören, ist konstant $= 2c$.

Wenn man in zwei Schrauben der Schraubenreihe beliebige Schraubungen ausführt, so setzen sie sich wieder zu einer Schraubung in einer Schraube der Schraubenreihe zusammen. Dieser Satz ist leicht aufs neue zu beweisen. Denn zwei Schraubungen um irgend zwei Schrauben der Reihe haben Koordinaten von folgender Form:

$$(26)\qquad \begin{matrix} p_1, & q_1, & r_1 = 0, & u_1 = \alpha p_1, & v_1 = \beta q_1, & w_1 = 0, \\ p_2, & q_2, & r_2 = 0, & u_2 = \alpha p_2, & v_2 = \beta q_2, & w_2 = 0. \end{matrix}$$

Durch Addition homologer Koordinaten entstehen die Koordinaten der resultierenden Schraubung:

$$(27)\quad p = p_1 + p_2,\quad q = q_1 + q_2,\quad r = 0,\quad u = \alpha p,\quad v = \beta q,\quad w = 0,$$

und dies sind wieder die Koordinaten einer zu der Schraubenreihe gehörenden Schraubung. Führen wir die Winkel φ_1, φ_2, φ ein, welche die Achsen der drei Schraubungen, die der xy-Ebene parallel sind, mit der xz-Ebene bilden, so wird:

$$(28)\qquad \begin{matrix} p_1 = \omega_1 \cos\varphi_1, \quad q_1 = \omega_1 \sin\varphi_1; \quad p_2 = \omega_2 \cos\varphi_2, \quad q_2 = \omega_2 \sin\varphi_2; \\ p = \omega \cos\varphi, \quad q = \omega \sin\varphi, \end{matrix}$$

wenn ω_1, ω_2, ω die Winkelgeschwindigkeiten der drei Schraubungen bezeichnen, und die beiden ersten Gleichungen (27) ergeben dann:

$$(29)\qquad \begin{cases} \omega \cos\varphi = \omega_1 \cos\varphi_1 + \omega_2 \cos\varphi_2, \\ \omega \sin\varphi = \omega_1 \sin\varphi_1 + \omega_2 \sin\varphi_2. \end{cases}$$

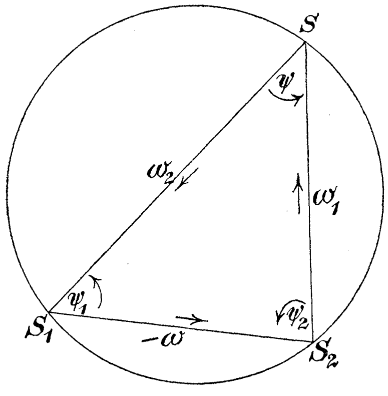

Fig. 16.

Diese Gleichungen gestatten aber mit Hilfe des Bildkreises eine einfache geometrische Interpretation. Der Winkel, unter dem zwei Schraubenachsen der Reihe einander kreuzen, wird angegeben durch den Peripheriewinkel des Bildkreises, der über dem durch die Bildpunkte der beiden Schrauben begrenzten Bogen steht, und zwar nicht bloß der Größe, sondern auch dem Sinne nach. Wir wollen nun die Bildpunkte der Schrauben, in denen die drei Schraubungen stattfinden, mit S_1, S_2, S bezeichnen, dann werden die Peripheriewinkel, die zu den Bögen S_1S_2, S_2S, SS_1 gehören, der Größe und dem Sinne nach, in derselben Reihenfolge:

$$(30)\qquad \psi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \psi_1 = \varphi - \varphi_2, \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi.$$

Nun folgt aus den Gleichungen (29) mit Leichtigkeit:

$$-\omega \sin \psi_1 = \omega_1 \sin \psi, \quad -\omega \sin \psi_2 = \omega_2 \sin \psi$$

oder:

$$(31) \qquad \omega_1 : \omega_2 : -\omega = \sin \psi_1 : \sin \psi_2 : \sin \psi.$$

Es ist sonach bequemer, den Drehungssinn der resultierenden Schraubung umzukehren. Dann geht sie in die Schraubung über, welche die ersten beiden Schraubungen aufhebt, und die Gleichung (31) zeigt: Die Winkelgeschwindigkeiten solcher Schraubungen in drei Schrauben der Reihe, welche sich aufheben, sind den Seiten des von den Bildpunkten der drei Schrauben gebildeten Dreiecks proportional, indem man jedesmal die Seite zu nehmen hat, die dem Bildpunkte der betreffenden Schraube gegenüber liegt, und der Sinn der drei Schraubungen ist immer der durch einen bestimmten Umlauf des Dreiecks der Bildpunkte gegebene.

Wir wollen nun suchen, die Konkurrenz zweier Schrauben der Reihe in der Bildebene geometrisch zu interpretieren. Nehmen wir der Einfachheit wegen die Schrauben $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, die zu den durch die Gleichungen (26) und die ersten beiden Gleichungspaare (28) gegebenen Schraubungen gehören. Dann wird die Konkurrenz γ zufolge ihrer Definition (S. 138):

$$\gamma = 2(\alpha \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \beta \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)$$

oder

$$(32) \qquad \tfrac{1}{2}\gamma = b \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c \cos(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Um diese Gleichung geometrisch zu deuten, führen wir in der Bildebene durch die Gleichungen:

$$(33) \qquad k - b = -\xi, \quad z = \eta$$

neue Koordinaten ξ, η ein, dann wird in diesen neuen Koordinaten die Gleichung des Bildkreises [vgl. (24)]:

$$(34) \qquad \xi^2 + \eta^2 = c^2$$

und seine Parameterdarstellung:

$$(35) \qquad \xi = c \cdot \cos 2\varphi, \quad \eta = c \cdot \sin 2\varphi.$$

Für die Verbindungslinie u der beiden Kreispunkte, deren Koordinaten

$$c \cos 2\varphi_1, \quad c \sin 2\varphi_1 \quad \text{und} \quad c \cos 2\varphi_2, \quad c \sin 2\varphi_2$$

sind und welche die Bildpunkte der Schrauben $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ repräsentieren, finden wir die Gleichung:

$$(36) \qquad \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\xi + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\eta = c \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

In der Tat wird die Gleichung befriedigt, wenn wir für ξ, η die vorstehenden Werte einsetzen.

Die Koordinaten ξ_u, η_u des Poles U der geraden Linie u bezüglich des Bildkreises sind dadurch bestimmt, daß bei ihrer Einführung die Gleichung (36) der geraden Linie die Form annimmt:

$$\xi_u \xi + \eta_u \eta = c^2. \tag{36a}$$

Es wird also:

$$\xi_u = c\frac{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad \eta_u = c\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{36b}$$

Aus der ersten dieser Formeln folgt aber:

$$b - \xi_u = \frac{b\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{\gamma}{2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

und somit:

$$\gamma = 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)(b - \xi_u). \tag{37}$$

Die Parameterachse ist aber von dem Mittelpunkte des Bildkreises, d. h. dem neuen Koordinatenursprunge um die Strecke b nach der Seite der positiven ξ hin entfernt und zur η-Achse parallel, $b - \xi_u$ ist also der Abstand des Poles U von der Parameterachse, und wir können sonach sagen: Die Konkurrenz zweier Schrauben der Schar wird gefunden, indem man den Abstand des Poles U der Verbindungslinie ihrer Bildpunkte von der Parameterachse mit dem doppelten Kosinus des Peripheriewinkels über dem von den Bildpunkten begrenzten Bogen multipliziert. Den Pol U kann man übrigens auch direkt finden als den Schnittpunkt der Tangenten, die man in den beiden Bildpunkten an den Bildkreis legt.

Zu einer noch einfacheren Darstellung der Konkurrenz gelangen wir wie folgt. Die Parameterachse hat die Gleichung $\xi = b$ oder $\frac{c^2}{b}\xi = c^2$. Wenn man sich diese Gleichung, entsprechend (36a), in der Form geschrieben denkt: $\xi_p \xi + \eta_p \eta = c^2$, indem ξ_p, η_p die Koordinaten des Poles P der Parameterachse bezeichnen, so findet man sofort:

$$\xi_p = \frac{c^2}{b}, \quad \eta_p = 0. \tag{38}$$

Der Abstand s_p dieses Poles P von der durch die Gleichung (36) gegebenen Verbindungslinie der beiden Bildpunkte wird aber, wenn wir ihn nach der dem Mittelpunkte M des Bildkreises zugewandten Seite positiv rechnen:

$$s_p = c\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \xi_p\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \eta_p\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

oder, wenn wir hierin die Werte (38) einsetzen:

$$s_p = \frac{c}{b}\{b\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\} = \frac{c}{2b}\gamma.$$

Also wird:

$$\gamma = \frac{2b}{c}s_p \tag{39}$$

oder, wenn man will, $\gamma = 2c\frac{s_p}{\xi_p}$. Den Pol P der Parameterachse wollen wir kurz den Parameterpol nennen. Dann können wir die Formel (39) wie folgt in Worte kleiden: Die Konkurrenz zweier Schrauben der Reihe ist dem Abstande der Verbindungslinie ihrer Bildpunkte von dem Parameterpol proportional. Wenn die Konkurrenz insbesondere verschwindet, sind die Schrauben korreziprok. Die Bildpunkte zweier korreziproken Schrauben der Reihe liegen also immer mit dem Parameterpol in einer geraden Linie.

Der Parameterpol P hat von der Parameterachse den Abstand $b - \xi_p = \frac{b^2 - c^2}{b}$. Wenn wir demnach zu den ursprünglichen Koordinaten k, z, die wir in der Bildebene angenommen hatten, zurückkehren, so müssen die Koordinaten eines Punktes, der auf einer durch den Parameterpol gehenden geraden Linie liegt, einer Gleichung von folgender Form genügen:

$$z = \varrho\left(k - \frac{b^2 - c^2}{b}\right).$$

Setzt man diesen Wert für z in die Gleichung des Bildkreises:

$$(k - b)^2 + z^2 = c^2$$

ein, so erhält man die Gleichung, der die Parameter zweier korreziproken Schrauben genügen:

$$(1 + \varrho^2)k^2 - 2\frac{b^2 + \varrho^2(b^2 - c^2)}{b}k + \frac{b^2 - c^2}{b^2}\{b^2 + \varrho^2(b^2 - c^2)\} = 0,$$

wobei ϱ noch willkürlich bleibt. Nennt man k_1, k_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so wird:

$$k_1 + k_2 = \frac{2}{b}\,\frac{b^2 + \varrho^2(b^2 - c^2)}{1 + \varrho^2},$$

$$k_1 k_2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 + \varrho^2(b^2 - c^2)}{1 + \varrho^2}$$

und demnach:

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} = \frac{2b}{b^2 - c^2}.$$

Es ist aber:

$$\frac{2b}{b^2 - c^2} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta},$$

und somit findet man schließlich:

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}. \tag{40}$$

Die reziproken Werte der Parameter zweier korreziproken Schrauben der Reihe ergeben eine konstante Summe. Der Wert, den die Gleichung (40) für diese Summe liefert, wird dadurch verständlich, daß die zu den Hauptachsen gehörenden Schrauben, deren Parameter α und β sind, ebenfalls ein Paar korreziproker Schrauben bilden, da ihre Achsen sich rechtwinklig schneiden. In der Tat liegt auch der Parameterpol P auf dem Durchmesser AB, der die Bildpunkte dieser beiden Schrauben verbindet.

Dreizehntes Kapitel.

Das Zylindroid.

Wir hatten bereits im zehnten Kapitel gefunden, daß die Achsen der Schrauben einer Schraubenreihe eine Regelfläche dritten Grades erfüllen, für welche wir den Namen Zylindroid eingeführt hatten. Wir wollen diese Fläche jetzt eingehender betrachten.

Ihre Gleichung können wir sofort aus den Gleichungen (18) des vorigen Kapitels durch Elimination von k herleiten und finden:

$$z = 2c\frac{xy}{x^2+y^2}. \tag{1}$$

Dieselbe Gleichung[1] hätten wir auch durch Elimination von φ aus den beiden Gleichungen:

$$x : y = \cos\varphi : \sin\varphi, \quad z = c\cdot\sin 2\varphi \tag{2}$$

erhalten können.

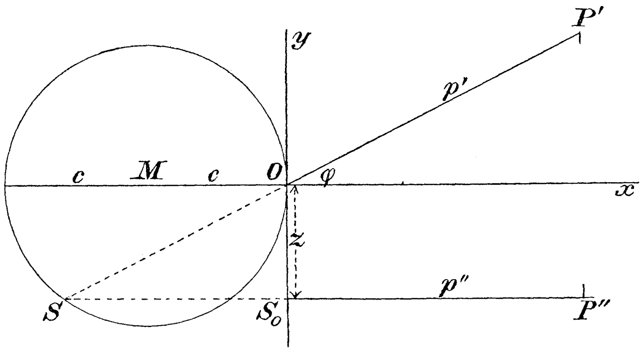

Fig. 17.

Diese Gleichungen kann man benutzen, um aus ihnen die graphische Darstellung des Zylindroids in Grundriß und Aufriß abzuleiten. Man denke sich (Fig. 17) einen Kreis um den Mittel-

---

1) Sie rührt von Plücker her (Neue Geometrie des Raumes, 1868, p. 97), der die Fläche als Konoid bezeichnet. Den Namen Zylindroid hat ihr Cayley gegeben (1871, s. Ball, Irish Acad. Trans. 25, p. 161). Unter Zylindroid war früher nach Wallis ein einschaliges Rotationshyperboloid verstanden worden.

punkt M mit dem Radius c beschrieben und an ihn in einem Punkte O die Tangente gelegt. Man ziehe die Linie MO oder x als die Schnittlinie von Grundriß- und Aufrißebene und durch O eine weitere Linie p', die mit x den Winkel φ bildet. Ist S der zweite Schnittpunkt dieser Linie mit dem Kreis und zieht man durch S die Linie p'' parallel zu x, so bilden p' und p'' die Projektionen des zu dem Winkelwert φ gehörenden Zylindroidstrahls auf die Grundriß- und Aufrißebene. Diese einfache Konstruktion liegt allen folgenden Figuren zugrunde.

Die allgemeinen Eigenschaften des Zylindroids gehen aus dem im vorigen Kapitel Entwickelten unmittelbar hervor. Die z-Achse, als Leitlinie der Schraubenreihe, ist Doppellinie des Zylindroids, durch jeden ihrer Punkte gehen zwei Regelstrahlen der Fläche, diese sind allemal der Hauptebene, d. h. der xy-Ebene, parallel, und die Winkel, die sie bilden, werden alle durch zwei Ebenen halbiert, die durch die Leitlinie gehen und mit den Hauptachsen, d. h. der x- und y-Achse, Winkel von 45^0 bilden. Die Hauptachsen liegen selbst auf dem Zylindroid. Dasselbe ist ganz in dem Teile des Raumes enthalten, der durch zwei Parallelebenen in den Abständen $+c$ und $-c$ zur Hauptebene begrenzt wird. In diesen äußersten Ebenen, den „Grenzebenen", liegt nur je ein Strahl, ein Grenzstrahl, des Zylindroids. Diese Grenzstrahlen kreuzen einander rechtwinklig und kreuzen die Hauptachsen unter 45^0. Da die Regelstrahlen des Zylindroids alle der Hauptebene parallel sind, kann man dem Zylindroid außer seiner Doppellinie noch eine einfache Leitlinie zuschreiben, die in der Hauptebene unendlich weit entfernt liegt.

Wir wollen nun die nähere Untersuchung des Zylindroids damit beginnen, daß wir nach Regelflächen zweiten Grades forschen, welche mit dem Zylindroid nur gerade Linien gemein haben. Enthält eine solche Fläche aber drei Regelstrahlen des Zylindroids, so muß sie auch die Doppellinie und die unendlich ferne Leitlinie des Zylindroids enthalten, weil diese Linien mehr als zwei Punkte mit ihr gemein haben. Die Fläche muß deshalb mit der Hauptebene außer der unendlich fernen Leitlinie noch eine gerade Linie gemein haben, welche die Doppellinie, d. h. die z-Achse, trifft und mithin durch den Koordinatenursprung geht. Die Gleichung der Fläche muß sich daher für $z=0$ auf eine Gleichung von der Form:

$$Ax + By = 0$$

reduzieren. Da die Fläche aber durch die z-Achse hindurchgehen soll, muß außerdem ihre Gleichung erfüllt sein, wenn $x=0$, $y=0$ gemacht wird. Die Glieder, die z enthalten, können somit in die Form:

$$\frac{z}{2c}(Cx + Dy)$$

gebracht und die Gleichung der Fläche kann sonach geschrieben werden:

$$z = 2c\frac{Ax + By}{Cx + Dy}. \tag{3}$$

Alle diese Flächen sind hyperbolische Paraboloide. Ihre eine Regelschar erhält man, wenn man in der Flächengleichung:

$$z = 2c\mu \tag{4a}$$

setzt. Dann wird:

$$Ax + By = \mu(Cx + Dy), \tag{4b}$$

und diese Gleichungen (4a) und (4b) stellen, wenn man den Parameter μ variieren läßt, die sämtlichen Strahlen der ersten Regelschar dar, die, wie man sieht, wie die Strahlen des Zylindroids die z-Achse unter rechten Winkeln treffen. Als Darstellung der zweiten Regelschar bekommt man:

$$Cx + Dy = 2c\nu, \quad Ax + By = \nu z, \tag{5}$$

indem ν den Parameter bezeichnet, der die einzelnen Strahlen dieser Regelschar festlegt.

Hält man nun die Gleichung (3) mit der Gleichung (1) des Zylindroids zusammen, so ergibt sich durch Elimination von z eine Gleichung dritten Grades:

$$Ax^3 + (B - C)x^2y + (A - D)xy^2 + By^3 = 0, \tag{6}$$

welche die Projektionen der drei gemeinsamen Regelstrahlen beider Flächen auf die Hauptebene darstellt.

Wenn die drei Regelstrahlen insbesondere zusammenfallen, wollen wir das Paraboloid ein Schmiegungsparaboloid des Zylindroids nennen.[1] Dann müssen die drei Wurzeln, welche die Gleichung (6) für das Verhältnis $x : y$ liefert, zusammenfallen, und demgemäß muß:

$$A = y_1^3, \quad B - C = -3x_1y_1^2, \quad A - D = 3x_1^2y_1, \quad B = -x_1^3$$

werden, wenn $x_1 : y_1$ die einzige jetzt existierende Wurzel der Gleichung bezeichnet. Hieraus folgen die Werte der Koeffizienten:

$$A = y_1^3, \quad B = -x_1^3, \quad C = x_1(3y_1^2 - x_1^2), \quad D = -y_1(3x_1^2 - y_1^2). \tag{7}$$

Die Gleichung des Schmiegungsparaboloids zerfällt für $x_1 = \pm y_1$ in zwei lineare Gleichungen, da dann $A = \mp B$, $C = \mp D = -2B$ wird und sonach die Flächengleichung lautet:

$$\text{entweder} \quad (z - c)(x - y) = 0 \quad \text{oder} \quad (z + c)(x + y) = 0.$$

Von den zwei Ebenen, in die das Paraboloid zerfällt, ist die eine die Parallelebene zur Hauptebene, welche das Zylindroid längs eines

1) Vgl. Picquet, Bulletin de la Soc. Math., vol. 14 (1886) p. 68.

Grenzstrahls berührt, und die andere die Ebene, welche denselben Grenzstrahl mit der Doppellinie des Zylindroids verbindet.

Verlangt man, daß das Schmiegungsparaboloid durch einen beliebig gegebenen Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 gehen soll, so folgt aus den Gleichungen (3) und (7):

$$z_0 = 2c\frac{y_1^3 x_0 - x_1^3 y_0}{x_1(3y_1^2 - x_1^2)x_0 - y_1(3x_1^2 - y_1^2)y_0}$$

oder:

$$(8)\quad (x_0 z_0 - 2cy_0)x_1^3 + 3y_0 z_0\cdot x_1^2 y_1 - 3x_0 z_0\cdot x_1 y_1^2 - (y_0 z_0 - 2cx_0)y_1^3 = 0.$$

Da diese Gleichung vom dritten Grade für $x_1 : y_1$ ist, gehen durch einen beliebigen Punkt des Raumes drei Schmiegungsparaboloide. Liegt der Punkt auf dem Zylindroide, besteht also die Gleichung:

$$(x_0^2 + y_0^2)z_0 = 2cx_0 y_0,$$

so fallen die drei Schmiegungsparaboloide zusammen. Wenn $z_0 = \pm c$ ist, so fallen zwei der drei Schmiegungsparaboloide in eines der Ebenenpaare zusammen, die, wie wir gesehen haben, unter den Schmiegungsparaboloiden enthalten sind. In der Tat wird, wenn $z_0 = +c$ ist, $\frac{x_1}{y_1} = +1$ und wenn $z_0 = -c$ ist, $\frac{x_1}{y_1} = -1$ eine Doppelwurzel der Gleichung (8). Ist $z_0^2 < c^2$, so sind zwei Wurzeln der Gleichung imaginär, ist $z_0^2 > c^2$, so sind alle ihre Wurzeln reell.

Wir wollen uns nun durch die drei Regelstrahlen des Zylindroids, die den Wurzeln der Gleichung (8) entsprechen und in denen drei durch einen Punkt gehende Schmiegungsparaboloide das Zylindroid berühren, wieder ein Paraboloid gelegt denken. Dann haben wir die Gleichung (8) mit der Gleichung (6) zu identifizieren, und demgemäß erhalten wir für die Gleichung des Paraboloids:

$$(9)\qquad z = -c\frac{(x_0 z_0 - 2cy_0)x - (y_0 z_0 - 2cx_0)y}{(2y_0 z_0 - cx_0)x - (2x_0 z_0 - cy_0)y}.$$

Man sieht sofort, daß diese Gleichung für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ erfüllt ist, das durch sie dargestellte Paraboloid geht also durch jeden gemeinsamen Punkt der drei Schmiegungsparaboloide hindurch. Diese gemeinsamen Punkte erfüllen aber eine gerade Linie, welche die Doppellinie des Zylindroids, d. h. die z-Achse rechtwinklig schneidet, also zur xy-Ebene parallel ist. In der Tat erfährt die Gleichung (8) keine Änderung, wenn man

$$x_0,\quad y_0,\quad z_0 \quad\text{durch}\quad \varrho x_0,\quad \varrho y_0,\quad z_0$$

ersetzt, was auch ϱ sei.

Wir nehmen jetzt an, unter den drei Regelstrahlen, welche die betrachteten Paraboloide mit dem Zylindroid gemein haben, seien zwei konjugierte Strahlen, zu denen, wenn man sie als Achsen zweier Schrauben der Schraubenreihe auffaßt, derselbe Schraubenparameter gehört. Solche zwei konjugierte Strahlen werden durch Ebenen ausgeschnitten, welche mit der xz-Ebene gleiche Winkel bilden, also Gleichungen von folgender Form haben:

$$x + \sqrt{\lambda}\, y = 0 \quad \text{und} \quad x - \sqrt{\lambda}\, y = 0.$$

Die kubische Gleichung (6) hat dann zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln und muß, in ihre Wurzelfaktoren zerfällt, folgende Form haben:

$$(x + \sqrt{\lambda}\, y)(x - \sqrt{\lambda}\, y)\left(x - \frac{1}{\varkappa}\, y\right) = 0,$$

die ausgerechnet ergibt:

$$x^3 - \frac{1}{\varkappa} x^2 y - \lambda x y^2 + \frac{\lambda}{\varkappa} y^3 = 0.$$

Demnach wird jetzt:

$$A = 1, \quad B - C = -\frac{1}{\varkappa}, \quad A - D = -\lambda, \quad B = \frac{\lambda}{\varkappa},$$

oder:

$$A = 1, \quad B = \frac{\lambda}{\varkappa}, \quad C = \frac{1+\lambda}{\varkappa}, \quad D = 1 + \lambda,$$

und die Gleichung des Paraboloids lautet:

$$z = \frac{2c}{1+\lambda} \cdot \frac{\varkappa x + \lambda y}{x + \varkappa y}. \tag{10}$$

Die Strahlen der einen Regelschar des Paraboloids liegen in den Ebenen, die durch Gleichungen von folgender Form gegeben werden [vgl. (5)]:

$$x + \varkappa y = 2c\varrho.$$

Diese Ebenen sind aber senkrecht zu dem gemeinsamen Regelstrahl des Paraboloids und Zylindroids, der durch die Gleichung:

$$x - \frac{1}{\varkappa}\, y = 0 \tag{11}$$

festgelegt wird. Also schneiden alle Strahlen der Regelschar diesen Regelstrahl unter rechtem Winkel. Sie schneiden aber außerdem die beiden konjugierten Strahlen des Zylindroids, und sonach muß jede Linie, die zwei konjugierte Regelstrahlen des Zylindroids trifft, außerdem einen dritten Regelstrahl des Zylindroids unter rechtem Winkel schneiden. Legen wir aber umgekehrt durch den Regelstrahl, der durch die Gleichung (11) festgelegt wird, und eine Linie, die ihn senkrecht trifft, das Paraboloid, das außerdem die Doppellinie und die unendlich ferne Leitlinie des Zylindroids enthält, so ist dies Paraboloid dergestalt eindeutig bestimmt und muß eine Gleichung von der Form (10) haben. So sehen wir: Jede Linie, die einen Regelstrahl des Zylindroids unter rechtem Winkel trifft, schneidet es außerdem in zwei Punkten, die auf zwei konjugierten Regelstrahlen liegen. Diese Regelstrahlen brauchen nicht notwendig reell zu sein. Sie können auch imaginär werden oder (in eine der Hauptachsen) zusammenfallen.

Wenn wir nun dazu übergehen, die einfachsten Kurven auf dem Zylindroid zu untersuchen, so legen wir zweckmäßig die allgemeine Bemerkung zugrunde, daß jede Kurve, die auf dem Zylindroid verläuft, sich in folgender Weise darstellen läßt:

$$(12)\qquad \begin{cases} x = 2c\,\Phi\cos\varphi, \\ y = 2c\,\Phi\sin\varphi, \\ z = 2c\cos\varphi\sin\varphi, \end{cases}$$

wenn x, y, z die Koordinaten irgendeines Punktes der Kurve, Φ aber eine Funktion des Winkels φ bezeichnet. In der Tat folgen diese Gleichungen formal sofort aus den Gleichungen (2), und damit sie sich auf die Punkte einer Kurve beziehen, muß das zunächst willkürliche Φ als eine Funktion des Winkels φ angesehen werden. Durch geeignete Wahl dieser Funktion können wir leicht alle gewünschten Kurven auf der Fläche gewinnen. Aus einer beliebigen Kurve auf dem Zylindroide und dessen Doppellinie kann man es selbst herleiten, indem man aus allen Punkten der Kurve auf die Doppellinie die Lote fällt.

Nehmen wir zunächst:

$$(13)\qquad \Phi = 1,$$

so erhalten wir eine Kurve, deren Parameterdarstellung lautet:

$$(14)\qquad x = 2c\cos\varphi, \quad y = 2c\sin\varphi, \quad z = 2c\cos\varphi\sin\varphi.$$

Um sie auch als Schnitt zweier Flächen abzuleiten, quadrieren wir zunächst die beiden ersten der vorstehenden Gleichungen und addieren sie, so wird:

$$(15)\qquad x^2 + y^2 = 4c^2.$$

Quadrieren wir ferner den Ausdruck:

$$x + y = 2c(\cos\varphi + \sin\varphi),$$

so erhalten wir:

$$(x + y)^2 = 4c^2(1 + 2\cos\varphi\sin\varphi)$$

oder nach der dritten Gleichung (14):

$$(16)\qquad (x + y)^2 = 4c(c + z).$$

Drehen wir noch das Koordinatensystem um die z-Achse durch 45^0, so haben wir für die neuen Koordinaten zu setzen:

$$(17)\qquad x' = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x + y), \quad y' = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x - y), \quad z' = z.$$

Die Gleichungen (15) und (16) werden dann:

$$(18)\qquad x'^2 + y'^2 = 4c^2, \quad x'^2 = 2c(c + z').$$

Die erste dieser Gleichungen stellt einen geraden Kreiszylinder mit dem Halbmesser $2c$, die zweite einen parabolischen Zylinder dar, dessen Seitenlinien die Seitenlinien des ersten Zylinders senkrecht kreuzen, und die in Rede stehende Raumkurve erscheint als die Schnittkurve dieser beiden Zylinder. Die untenstehende Figur gibt die Darstellung eines Viertels dieser Kurve in Grundriß und Aufriß.

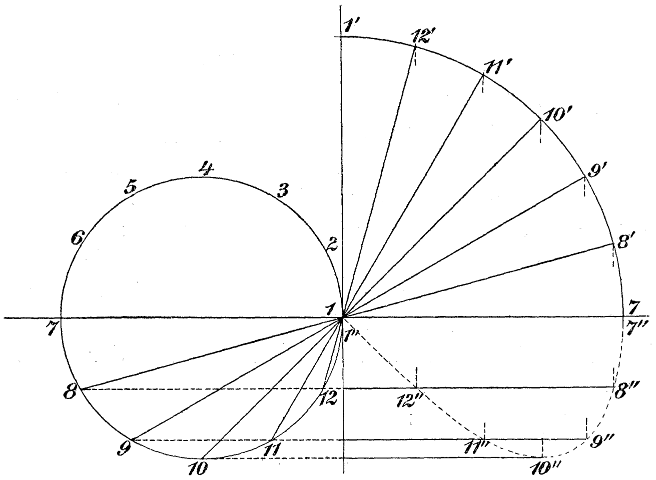

Fig. 18.

Von dem parabolischen Zylinder betrachten wir den Querschnitt, der in die durch die Gleichung $y' = 0$ oder $x - y = 0$ gegebene Ebene fällt, und denken uns den Zylinder selbst konstruiert, indem wir auf dieser Ebene in den Punkten der Parabel, welche den Querschnitt bildet, die Lote errichten. Die Ebene geht durch den oberen Grenzstrahl des Zylindroids, die Parabel hat dessen Doppellinie zur Achse und den tiefsten Punkt derselben, der auf der Fläche liegt, zum Scheitel. Ihr Brennpunkt liegt in der Mitte zwischen ihrem Scheitel und dem Koordinatenursprung, dem „Mittelpunkt" des Zylindroids. c ist der Parameter der Parabel. Errichten wir in den Punkten der Parabel auf ihrer Ebene die Lote und bringen diese zum Schnitte mit dem Rotationszylinder, dessen Achse mit der Achse der Parabel zusammenfällt und dessen Halbmesser gleich dem doppelten Parameter der Parabel ist, dann erfüllen die Lote, die wir von den Schnittpunkten auf die Parabelachse fällen, das Zylindroid.

Wir setzen zweitens in den Gleichungen (12):

$$\Phi = \varrho \cos \varphi. \tag{19}$$

Dann erhalten wir eine Kurve, deren Parameterdarstellung lautet:

$$x = 2c\varrho\cos\varphi^2, \quad y = 2c\varrho\cos\varphi\sin\varphi, \quad z = 2c\cos\varphi\sin\varphi. \tag{20}$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir, indem wir die zweite durch die dritte dividieren, zunächst ab:

$$\frac{y}{z} = \varrho. \tag{21}$$

Die Kurve ist also eine ebene Kurve und liegt in einer Ebene, die durch die eine Hauptachse ($y = 0$, $z = 0$) des Zylindroids geht. Ferner folgt aus den Gleichungen (20):

$$x - c\varrho = c\varrho\cos 2\varphi, \quad y = c\varrho \sin 2\varphi,$$

und somit wird:

$$(x - c\varrho)^2 + y^2 = (c\varrho)^2. \tag{22}$$

Dies ist die Gleichung eines Rotationszylinders, der durch die Doppellinie des Zylindroids geht und dessen Achse die in der gefundenen Ebene (21) liegende Hauptachse des Zylindroids trifft. Die Kurve, die durch die Gleichungen (20) gegeben wird, ist demnach als Schnitt eines geraden Kreiszylinders mit einer Ebene eine Ellipse, die Doppellinie des Zylindroids geht durch den einen Endpunkt der kleinen Achse dieser Ellipse und steht auf dieser Achse senkrecht. Errichtet man also in dem einen Endpunkte der kleinen Achse einer Ellipse auf dieser Achse eine Senkrechte, die dem durch die Ellipse gehenden geraden Kreiszylinder angehört, und fällt von allen Punkten der Ellipse auf diese Senkrechte die Lote, so erfüllen dieselben ein Zylindroid.

Die sämtlichen Ellipsen, die auf dem Zylindroid liegen, bekommen wir, wenn wir allgemeiner:

$$\Phi = \varrho\cos(\varphi - \varphi_0) \tag{23}$$

setzen. Schreiben wir dann:

$$c\varrho\cos\varphi_0 = \mathfrak{a}, \quad c\varrho\sin\varphi_0 = \mathfrak{b},$$

so wird die Parameterdarstellung der Kurve:

$$\left\{\begin{aligned} x &= 2(\mathfrak{a}\cos\varphi + \mathfrak{b}\sin\varphi)\cos\varphi,\\ y &= 2(\mathfrak{a}\cos\varphi + \mathfrak{b}\sin\varphi)\sin\varphi,\\ z &= 2c\cos\varphi\sin\varphi.\end{aligned}\right. \tag{24}$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst:

$$\mathfrak{b}x + \mathfrak{a}y = 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + 2(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)\cos\varphi\sin\varphi$$

und demnach weiter:

$$c(\mathfrak{b}x + \mathfrak{a}y) - (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)z = 2c\mathfrak{a}\mathfrak{b}. \tag{25}$$

Dies ist die Gleichung der Ebene, in welcher die Ellipse liegt. Ferner ergibt sich aus den ersten beiden Gleichungen (24) sofort:

$$x^2 + y^2 = 2\mathfrak{a}x + 2\mathfrak{b}y. \tag{26}$$

Denn die linke und die rechte Seite dieser Gleichung sind

$$= 4(\mathfrak{a}\cos\varphi + \mathfrak{b}\sin\varphi)^2.$$

Die so gewonnene Gleichung stellt wieder einen Rotationszylinder dar, der die Doppellinie des Zylindroids als eine Seitenlinie enthält, und die (zu dieser Doppellinie parallele) Achse des Zylinders trifft die xy-Ebene in einem Punkte, dessen Koordinaten $x = \mathfrak{a}$ und $y = \mathfrak{b}$ sind. Die Projektion des Kegelschnittes auf die Hauptebene ist also immer ein Kreis, der durch den Schnittpunkt der Hauptachsen des Zylindroids hindurchgeht. Von diesem Kreis ausgehend, kann man

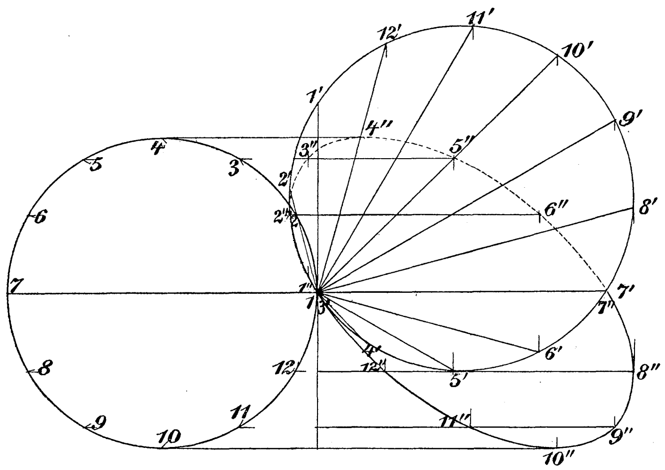

Fig. 19.

den Kegelschnitt leicht in Grundriß und Aufriß zeichnen, wie es die vorstehende Figur zeigt. Multipliziert man die Gleichung:

$$\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y = 2(\mathfrak{a}\cos\varphi + \mathfrak{b}\sin\varphi)^2$$

noch mit:

$$z = 2c\cos\varphi\sin\varphi,$$

so erhält man auf der rechten Seite nach (24):

$$4c(\mathfrak{a}\cos\varphi + \mathfrak{b}\sin\varphi)^2\cos\varphi\sin\varphi = cxy$$

und demnach:

$$\mathfrak{a}xz + \mathfrak{b}yz - cxy = 0. \tag{27}$$

Dies ist die Gleichung des Kegels, welcher die Ellipse aus dem Koordinatenursprung, d. h. dem Mittelpunkte des Zylindroids projiziert.

Er geht durch die Hauptachsen und die Doppellinie des Zylindroids hindurch, die in der Tat alle drei von der Ellipse getroffen werden.

Sucht man allgemeiner den Kegel, der die Ellipse aus einem beliebigen, durch seine Ordinate z_0 gegebenen Punkte der Doppellinie projiziert, so hat man zu der mit z_0 multiplizierten Gleichung (26) die mit 2 multiplizierte Gleichung (27) zu addieren und erhält für die Gleichung des gesuchten Kegels:

$$(27\text{a}) \qquad z_0(x^2+y^2) - 2cxy + 2(\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y)(z - z_0) = 0.$$

Macht man hierin $z = 0$, so findet man für die Schnittkurve des Kegels mit der Hauptebene:

$$z_0(x^2+y^2) - 2cxy - 2z_0(\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y) = 0.$$

Welche Werte in dieser Gleichung $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ auch haben mögen, immer sind die Kegelschnitte, zu denen man so gelangt, einander ähnlich und paarweise in ähnlicher Lage, denn ihre Gleichungen unterscheiden sich nur in den linearen Gliedern.[1])

Liegt der Projektionspunkt zwischen den Grenzebenen des Zylindroids, ist also $z_0^2 < c^2$, so sind die Kegelschnitte in der Hauptebene Hyperbeln, sie werden Parabeln, wenn der Projektionspunkt in eine der Grenzebenen fällt, und sie sind Ellipsen, wenn der Projektionspunkt außerhalb der Grenzebenen liegt.

Die Gleichung (25) ist erfüllt, wenn man:

$$(28) \qquad x = \lambda\mathfrak{a}, \quad y = -\lambda\mathfrak{b}, \quad z = 2c\frac{xy}{x^2+y^2} = -2c\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2}$$

macht, was auch λ sei. Durch diese Gleichungen (28) wird aber ein Regelstrahl des Zylindroids dargestellt, und durch diesen Regelstrahl geht die Ebene der Ellipse hindurch. In der Tat muß sie insgesamt eine Kurve dritter Ordnung mit dem Zylindroid gemein haben, und spaltet sich von dieser Kurve dritter Ordnung ein Kegelschnitt ab, so muß der Rest eine gerade Linie sein. Umgekehrt muß jede Ebene, die durch einen Regelstrahl des Zylindroids geht, dieses außerdem in einem Kegelschnitt, und zwar einer Ellipse, schneiden.

Die Ebene ist als eine Tangentialebene des Zylindroids anzusehen, und der Berührungspunkt dieser Tangentialebene ist der Punkt, in dem der in ihr liegende Kegelschnitt den in ihr liegenden Regelstrahl außerhalb der Doppellinie des Zylindroids schneidet. Ein Schnittpunkt liegt in der Tat immer auf der Doppellinie, denn der Wert von z in (28) stimmt mit dem Wert von z, der sich aus (25) für $x = 0$, $y = 0$ ergibt, überein.

Die Gleichung (25) ist ferner erfüllt, wenn $x = \mathfrak{a}$, $y = \mathfrak{b}$, $z = 0$ gesetzt wird. Die Ebene der Ellipse trifft demnach die Achse des

1) Picquet, Bulletin de la Soc. Math. 14, 1886, p. 68.

Zylinders in deren Schnittpunkte mit der Hauptebene, d. h. der xy-Ebene, die kleine Achse der Ellipse liegt in der Hauptebene und die Hauptachsen des Zylindroids gehen nach ihren Endpunkten hin. Die Endpunkte der großen Achse bilden den höchsten und tiefsten Punkt der Ellipse, nach ihnen gehen also die Grenzstrahlen des Zylindroids hin. Wir finden demnach: *Schneidet man einen geraden Kreiszylinder durch eine Ebene und fällt von den Punkten der Schnittellipse die Lote auf irgendeine Seitenlinie des Zylinders, so erfüllen diese Lote ein Zylindroid. Hierbei liefern die Lote aus den Endpunkten der kleinen Ellipsenachse die Hauptachsen und die Lote aus den Endpunkten der großen Achse die Grenzstrahlen des Zylindroids.* Diese Erzeugung der Fläche rechtfertigt ihre Bezeichnung als Zylindroid, mehr noch wie die zuerst gegebene Erzeugungsart, und von ihr ausgehend schlug *Cayley* die Bezeichnung Zylindroid vor.

Die Gleichung (26) ist erfüllt, wenn man:

$$x = 2\mathfrak{a}, \quad y = 2\mathfrak{b} \tag{29}$$

macht. Die Gleichung (25) ergibt dann:

$$z = 2c\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}, \tag{29}$$

also wird z gleich der Ordinate des Zylindroids, die zu $x = \mathfrak{a}$, $y = \mathfrak{b}$ gehört. Dies aber ist die Ordinate des Punktes, in dem das Zylindroid von der Achse des Zylinders (26) geschnitten wird.

Die Punkte, die durch die Gleichungen (28) und (29) gegeben werden, gehören konjugierten Regelstrahlen des Zylindroids an und kreuzen dessen Hauptachsen unter gleichen Winkeln. Der eine dieser Regelstrahlen trifft ferner die Achse des Zylinders. Daraus ergibt sich für die Tangentialebene des Zylindroids in einem gegebenen Punkte P' folgende Konstruktion.

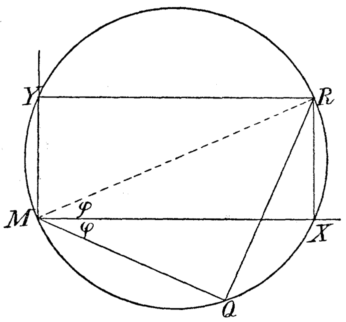

Fig. 20.

Der Fußpunkt des vom Punkte P' auf die Hauptebene gefällten Lotes sei Q. Man verbinde Q mit dem Mittelpunkt M, in dem sich die Hauptachsen des Zylindroids schneiden. Auf dieser Verbindungslinie errichte man in Q das Lot und nenne R den Punkt, in dem dies Lot die symmetrisch zu MQ bezüglich der Hauptachsen gelegene Linie trifft. Fällt man dann von R aus auf die Hauptachsen die Lote RX und RY, so geht die Tangentialebene in P' durch die Punkte X und Y hindurch und ist somit bestimmt.

Zum Beweise konstruiere man über MR als Durchmesser den Kreis $\varkappa$. Dieser Kreis geht durch die Punkte X, Y, Q hindurch und ist der Schnittkreis eines Zylinders, der aus dem Zylindroid eine Ellipse ausschneidet. Diese Ellipse geht durch die Punkte X, Y, P' hindurch, außerdem aber auch durch den Fußpunkt des von P' auf die Doppellinie gefällten Lotes, denn der Winkel QMX ist gleich dem Winkel XMR, und die Linien MQ und MR sind somit die Projektionen zweier konjugierten Regelstrahlen des Zylindroids, von denen der eine die Achse des Zylinders trifft. Der andere ist also der, welcher eine Sehne der Ellipse bildet und in dessen Schnittpunkte P' die Ebene der Ellipse das Zylindroid berührt.[1])

Es ist nun zu beachten, daß man jeden Kegelschnitt auf dem Zylindroid erhalten kann, indem man von irgendeinem Punkte P der Fläche die Lote auf alle ihre Regelstrahlen fällt. Die Fußpunkte dieser Lote liegen dann allemal auf einer Ellipse, welche auch den angenommenen Punkt P enthält. Wenn wir uns nämlich den Regelstrahl p gezogen denken, der den Punkt P enthält, so muß nach einem oben bewiesenen Satze jede Linie, die p trifft und einen anderen Regelstrahl der Fläche unter rechtem Winkel schneidet, außerdem den zu p konjugierten Regelstrahl p' treffen. Die Lote, die man vom Punkte P aus auf die Regelstrahlen fällt, müssen also alle den festen Regelstrahl p' treffen und liegen mithin in einer Ebene, die durch p' hindurchgeht. Diese Ebene hat mit der Fläche außerdem eine Ellipse gemein, und auf dieser liegen sonach die Fußpunkte der Lote und auch der Flächenpunkt P, da die Ebene der Ellipse durch ihn hindurchgeht. Rückt der Punkt P auf seinem Regelstrahl p fort, so dreht sich die Ebene der zu ihm gehörenden Fußpunktkurve um den konjugierten Regelstrahl p'. Da die Ellipse die Doppellinie des Zylindroids immer trifft, geht sie stets durch den Punkt P'_0 des Regelstrahls p', in dem derselbe auf der Doppellinie senkrecht steht, außerdem enthält sie von diesem Regelstrahl, wie von allen anderen, noch den Fußpunkt P' des auf ihn aus P gefällten Lotes. Die Sehne P'_0P' der Ellipse ist der Sehne parallel, die in die Hauptebene fällt, dies aber ist, wie wir gesehen haben, die kleine Achse der Ellipse. Die Sehne PP' aber ist zu der Sehne P'_0P' senkrecht, also der großen Achse der Ellipse parallel. Die Linie P'_0P geht mithin durch den Mittelpunkt der Ellipse.

Die Lote, welche wir von dem Punkte P auf die Regelstrahlen des Zylindroids gefällt haben, bilden, weil sie in einer Ebene liegen, ein Büschel. Die Regelstrahlen stehen auf je einem Strahl dieses Büschels, außerdem aber alle auf der Doppellinie des Zylindroids

---

1) Eine andere Konstruktion der Tangentialebene gibt d'Ocagne, Ann. de Math. et de Phys. (3) 1, 1901, p. 159.

senkrecht. Es erfüllen also die gemeinsamen Normalen der Strahlen eines Büschels und einer festen Achse a ein Zylindroid. Um dies Zylindroid festzulegen, fälle man von dem Büschelscheitel P das Lot p auf die feste Achse a, sein Fußpunkt heiße P_0. Außerdem denke man sich durch den Schnittpunkt P'_0 der Büschelebene mit der Achse a zu dieser letzteren die Normalebene gelegt und nenne die Schnittlinie derselben mit der Ebene des Büschels p'. Dann sind p und p' konjugierte Regelstrahlen des zu bestimmenden Zylindroids. Durch den Mittelpunkt M der Strecke $P_0 P'_0$ denkt man sich wieder die Normalebene η zu der Achse gelegt und auf diese die Strahlen p und p' senkrecht projiziert. Die Halbierungslinie des Winkels zwischen p und p' ist die eine Hauptachse h des Zylindroids. Um noch den Wert der Konstanten c zu bestimmen, durch die es völlig festgelegt wird, nenne man P' den Punkt, in dem der auf p' senkrechte Büschelstrahl diese Linie trifft, denke sich dann den Büschelscheitel P und den Punkt P' auf die Ebene η senkrecht projiziert und durch die Projektionspunkte R, Q und durch M den Kreis $\varkappa$ gelegt. Ist $r = \frac{1}{2} MR$ der Radius dieses Kreises $\varkappa$ und α der Winkel, den die Ebene des Büschels mit der Ebene η bildet, so wird:

$$c = r \cdot \operatorname{tang} \alpha.$$

In der Tat ist dies der Abstand des höchsten Punktes der Ellipse, in welcher der über dem Kreis $\varkappa$ stehende Zylinder die Büschelebene schneidet, von der Ebene η. Diese Ellipse wird aber erfüllt von den Treffpunkten der gemeinsamen Normalen mit den Büschelstrahlen.

Der Satz, daß die Fußpunkte der von einem beliebigen Punkte des Zylindroids auf seine Regelstrahlen gefällten Lote eine Ellipse erfüllen, kann auch so ausgesprochen werden: Die Regelstrahlen des Zylindroids werden von ihren Normalebenen, die durch eine und dieselbe Parallele zur Doppellinie hindurchgehen, in den Punkten eines Kegelschnittes getroffen. Daraus folgt aber weiter: Die Fußpunkte der Lote, die man von einem beliebigen Punkte des Raumes auf die Regelstrahlen des Zylindroids fällt, erfüllen allemal eine Ellipse. Appell hat nun den wichtigen Satz bewiesen, daß die einzige Regelfläche, für welche die Fußpunkte der von einem beliebigen Punkte auf ihre Regelstrahlen gefällten Lote eine ebene Kurve erfüllen, das Zylindroid ist.[1])

Die Gleichung (26) des Kreises $\varkappa$ zeigt, daß sein Radius oder, was dasselbe ist, die kleine Halbachse der Ellipse:

$$r = \sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}.$$

1) S. Bulletin de la Soc. Math. 28 (1900) p. 261, außerdem den auf einen kinematischen Satz gestützten synthetischen Beweis von Bricard in derselben Zeitschrift 29 (1901) p. 18 und den analytischen Beweis von Demoulin, ibid. p. 39.

Die Gleichung für den Neigungswinkel α der Ellipsenebene gegen die Hauptebene läßt sich schreiben:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}},$$

und die große Halbachse der Ellipse wird:

$$s = \sqrt{r^2 + c^2} = \sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + c^2}.$$

Zu beachten ist noch, daß die Endpunkte X, Y der kleinen Achse der Ellipse auf den Hauptachsen des Zylindroids liegen in den Abständen $2\mathfrak{a}$ und $2\mathfrak{b}$ vom Mittelpunkte M, in dem sich jene Hauptachsen schneiden.

Die letzte der vorstehenden Gleichungen zeigt, daß, solange die kleine Achse der Ellipse dieselbe bleibt, auch die große Achse sich nicht ändert, also die Ellipse sich kongruent bleibt. Nach der vorhergehenden Gleichung bleibt dann aber auch die Neigung ihrer Ebene gegen die Hauptebene dieselbe. Wir gelangen so zu dem Satz[1]): Läßt man eine unveränderliche Ellipse sich so bewegen, daß die Endpunkte ihrer kleinen Achse an zwei sich schneidenden und zueinander senkrechten geraden Linien entlang gleiten, während sie gleichzeitig das im Schnittpunkte der beiden Linien auf deren Ebene η errichtete Lot fortwährend trifft, so bleibt die Neigung der Ebene dieser Ellipse gegen die Ebene η dieselbe, und sie bewegt sich auf einem Zylindroid, von dem das Lot der Ebene η die Doppellinie, die in der Ebene η angenommenen beiden Linien die Hauptachsen, und dessen Parameter c gleich der halben Brenndistanz der Ellipse ist. Denn es wird:

$$c = \sqrt{s^2 - r^2}.$$

Wir haben oben gefunden, daß, wenn wir auf dem Zylindroid zwei konjugierte Regelstrahlen p, p' herausgreifen, die sämtlichen Regelstrahlen des Zylindroids sich auffassen lassen als die gemeinsamen Normalen der Doppellinie und je eines Strahles, der einen festen Punkt P von p mit einem veränderlichen Punkte von p' verbindet. Für den Punkt P kann hierbei ein beliebiger Punkt auf p gewählt werden, denn, wie man ihn auch annimmt, immer ergibt sich dasselbe Zylindroid, das durch die konjugierten Strahlen p, p' eindeutig bestimmt ist. Jeder Strahl s des Zylindroids ist also gemeinsame Normale von unendlich vielen Strahlen, welche die beiden Linien p und p' treffen. Diese Strahlen erfüllen jedesmal eines von den oben behandelten Paraboloiden, welche drei Strahlen, darunter

1) Mannheim, Comptes Rendus, T. 106 (1888) p. 820.

zwei konjugierte, des Zylindroids enthalten. Die sämtlichen Strahlen aber, welche die Linien p, p' treffen, bilden eine der mit dem Zylindroid verknüpften einfach unendlich vielen linearen Strahlenkongruenzen. Die gemeinsame Normale der Leitlinien p, p' (d. h. die Doppellinie des Zylindroids) wollen wir der Kürze halber die Achse der Strahlenkongruenz nennen. Dann können wir sagen: Die gemeinsamen Normalen der Achse und der Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz erfüllen ein Zylindroid, von dem die Leitlinien der Kongruenz zwei konjugierte Regelstrahlen bilden.[1]) Die Strahlen des Zylindroids, die in zwei zur Hauptebene parallelen und von ihr gleichweit entfernten Ebenen liegen, sind einander paarweise konjugiert. Sie kreuzen sich (wie man leicht sieht, wenn man sie auf die zweite mögliche Art zu Paaren zusammenfaßt) rechtwinklig. In den beiden Parallelebenen liegen aber anderseits die Endpunkte zweier Durchmesser irgendeiner Ellipse des Zylindroids, und so erkennt man leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes: Die Regelstrahlen, die nach den Endpunkten der Durchmesser einer Ellipse des Zylindroids hinlaufen, kreuzen einander rechtwinklig.

Alle Ellipsen des Zylindroids werden, wenn man sie senkrecht auf die Hauptebene projiziert, zu Kreisen, die durch den Mittelpunkt M des Zylindroids gehen. Diese Kreise lassen sich mittels einfacher Inversion (Transformation durch reziproke Radienvektoren) in gerade Linien verwandeln. Ihre Gleichungen sind von der Form:

$$2(\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y) = x^2 + y^2. \tag{26}$$

Führt man in dieser Gleichung ein:

$$\mathfrak{x} = \frac{4c^2x}{x^2+y^2}, \quad \mathfrak{y} = \frac{4c^2y}{x^2+y^2}, \tag{30}$$

woraus umgekehrt:

$$x = \frac{4c^2\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}, \quad y = \frac{4c^2\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2} \tag{30a}$$

und:

$$(x^2+y^2)(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2) = (2c)^4 \tag{30b}$$

folgt, so geht die Kreisgleichung über in die Gleichung einer geraden Linie:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{y} = 2c^2. \tag{31}$$

1) In einer allgemeinen Strahlenkongruenz bilden die einem beliebigen Strahl derselben unendlich benachbarten Strahlen eine lineare Kongruenz, und daraus folgt, daß die gemeinsamen Normalen eines Strahles der allgemeinen Kongruenz und der unendlich benachbarten Strahlen ein Zylindroid erfüllen. So ist dasselbe von Hamilton entdeckt worden (Trans. of the Irish Acad., Vol. 16, 1830, p. 4). Die einmal aufgestellte Behauptung, das Zylindroid sei schon 1819 von Sangro behandelt worden, beruht auf einer Verwechslung mit dem Wallisschen Zylindroid (Rotationshyperboloid).

Die ausgeführte Transformation stellt aber eine Inversion dar, bei welcher ein Punkt P der Ebene, der von M den Abstand r hat, in den Punkt P' der Verbindungslinie von M und P übergeht, dessen Abstand r' von M sich aus der Gleichung:

$$r \cdot r' = 4c^2$$

bestimmt.

Man kann die für x und y gefundenen Ausdrücke (30a) in die Gleichung des Zylindroids einsetzen und so auch z durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ darstellen. So findet man für die Koordinaten x, y, z eines Punktes des Zylindroids die folgende Parameterdarstellung:

$$x = \frac{4c^2\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}, \quad y = \frac{4c^2\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}, \quad z = \frac{2c\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}. \tag{32}$$

Durch diese Gleichungen oder die aus ihnen hervorgehenden:

$$\mathfrak{x} = 2c\frac{z}{y}, \quad \mathfrak{y} = 2c\frac{z}{x} \tag{32a}$$

wird aber, indem wir $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ als Koordinaten eines Bildpunktes in einer Bildebene deuten, auch eine eindeutige Abbildung des Zylindroids auf eine Ebene vermittelt. Bei dieser Abbildung werden die Regelstrahlen der Fläche durch die geraden Linien dargestellt, die durch den festen Punkt M, den „Mittelpunkt" der Abbildung, gehen, und die Kegelschnitte auf dem Zylindroid durch die übrigen geraden Linien der Bildebene. Da irgend zwei dieser geraden Linien sich in einem Punkte schneiden, ist zu schließen, daß auch zwei beliebige Ellipsen auf dem Zylindroid einen Punkt gemein haben. Die Punkte der Doppellinie werden durch die unendlich fernen Punkte der Bildebene und die unendlich fernen Punkte des Zylindroids allein durch den festen Punkt M abgebildet. Wir haben oben gefunden, daß die Ebene der Ellipse, welche aus dem Zylindroid durch den in der Form (26) dargestellten Zylinder ausgeschnitten wird, den Regelstrahl enthält, für dessen Punkte:

$$x : y = -\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$$

wird. Gleichzeitig aber wird die Ellipse in der Bildebene als die durch die Gleichung:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{y} = 2c^2$$

dargestellte gerade Linie abgebildet. Daraus schließen wir sofort, daß Ellipsen, deren Ebenen durch denselben Regelstrahl p des Zylindroids gehen, durch parallele gerade Linien abgebildet werden, und zwar sind sie dem mit p in einer Normalebene zur Doppellinie liegenden Strahle des Zylindroids parallel. Die zuerst besprochene Raumkurve vierter Ordnung auf dem Zylindroid wird durch den Kreis um M mit dem Radius $2c$ abgebildet.

Wir setzen nun in den Grundgleichungen (12):

$$\Phi = \frac{A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C}{D \cos \varphi + E \sin \varphi}. \tag{33}$$

Dann wird die zugehörige Kurve auf dem Zylindroid eine Raumkurve dritter Ordnung.[1]) Man kann nämlich schreiben:

$$\Phi = \frac{(C+A)\cos\varphi^2 + 2B\cos\varphi\sin\varphi + (C-A)\sin\varphi^2}{D\cos\varphi + E\sin\varphi}, \tag{33a}$$

und setzt man diesen Ausdruck in die Gleichungen (12) für die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Kurvenpunktes ein, so erhält man, wenn man noch der Kürze halber:

$$\operatorname{tang}\varphi = \varrho$$

macht, die folgende Parameterdarstellung:

$$\left\{\begin{aligned} x &= 2c\frac{(C+A) + 2B\varrho + (C-A)\varrho^2}{(D+E\varrho)(1+\varrho^2)}, \\ y &= 2c\frac{\{(C+A) + 2B\varrho + (C-A)\varrho^2\}\varrho}{(D+E\varrho)(1+\varrho^2)}, \\ z &= 2c\frac{\varrho}{1+\varrho^2}. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung einer beliebigen Ebene:

$$\xi x + \eta y + \zeta z - \theta = 0$$

ein, so erhält man eine Gleichung dritten Grades für ϱ und deren drei Wurzeln entsprechend drei Kurvenpunkte, die in der Ebene liegen.

Die Raumkurve dritter Ordnung hat mit einem beliebigen Regelstrahl des Zylindroids einen Punkt gemein, denn für die Punkte eines Regelstrahls nimmt:

$$\frac{y}{x} = \varrho$$

einen bestimmten Wert an, der als Parameter dem Regelstrahl zugeschrieben werden kann. Es liefern infolgedessen die vorstehenden Gleichungen eindeutig bestimmte Werte für die Koordinaten des Kurvenpunktes, der auf dem Regelstrahl liegt. Für zwei Regelstrahlen fällt dieser Schnittpunkt in die Doppellinie, es wird nämlich $x = 0$, $y = 0$, wenn ϱ der quadratischen Gleichung genügt:

$$(C+A) + 2B\varrho + (C-A)\varrho^2 = 0. \tag{34a}$$

Wenn:

$$B^2 - (C+A)(C-A) > 0, \text{ also } A^2 + B^2 > C^2,$$

sind die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 dieser Gleichung reell, und dann hat die Raumkurve dritter Ordnung zwei reelle Punkte mit der Doppellinie

1) Vgl. Goebel, Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 25 (1880) p. 295.

gemein. Durch diese beiden Punkte geht aber noch je ein weiterer Regelstrahl des Zylindroids, der mit der Raumkurve noch einen nicht in die Doppellinie fallenden Punkt, im ganzen also zwei Punkte gemein haben muß, also eine Bisekante der Raumkurve bildet. Die Parameter, zu denen diese Regelstrahlen gehören, sind $\varrho'_1 = \frac{1}{\varrho_1}$ und $\varrho'_2 = \frac{1}{\varrho_2}$. Sie bestimmen sich demnach aus der quadratischen Gleichung:

$$(C - A) + 2B\varrho' + (C + A)\varrho'^2 = 0. \tag{34b}$$

Die Raumkurve hat mit dem Regelstrahl, der zu dem Parameter $\varrho = -D/E$ gehört, einen unendlich fernen Punkt gemein, denn für diesen Wert von ϱ werden nach den Gleichungen (34) die Werte von x und y unendlich groß.

Wir wollen nun nachweisen, daß die Raumkurve dritter Ordnung immer auf einem elliptischen Zylinder enthalten ist, der die beiden Grenzebenen des Zylindroids berührt. Zunächst leiten wir aus den ersten beiden Gleichungen (34) ab:

$$\begin{aligned} Dx + Ey &= 2c\frac{(C+A) + 2B\varrho + (C-A)\varrho^2}{1+\varrho^2} \\ &= 2Cc + 2c\frac{A(1-\varrho^2) + 2B\varrho}{1+\varrho^2}, \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf die dritte Gleichung folgt hieraus:

$$(Dx + Ey - 2Bz - 2Cc)^2 = 4A^2c^2\left(1 - \frac{4\varrho^2}{(1+\varrho^2)^2}\right)$$

oder:

$$(Dx + Ey - 2Bz - 2Cc)^2 + 4A^2z^2 = 4A^2c^2, \tag{35}$$

und dies ist die gesuchte Gleichung des Zylinders. Macht man in derselben $z = \pm c$, so reduziert sie sich auf:

$$Dx + Ey - 2Bz - 2Cc = 0,$$

dies ist sonach die Ebene, in der die Berührungslinien des Zylinders mit den begrenzenden Tangentialebenen ($z = \pm c$) des Zylindroids liegen, und da die Ebene, welche die Berührungslinien zweier parallelen Tangentialebenen eines Zylinders verbindet, immer durch dessen Achse hindurchgeht, so schneidet die gefundene Ebene die Hauptebene ($z = 0$) in der Achse des Zylinders. Diese Achse ist somit in der Hauptebene durch die Gleichung:

$$Dx + Ey = 2Cc$$

gegeben.

Auf die Form (35) läßt sich nun die Gleichung jedes elliptischen Zylinders bringen, der die beiden Grenzebenen des Zylindroids berührt. Jeder solche Zylinder hat demnach eine und damit eine zweite Raumkurve dritter Ordnung mit dem Zylindroid gemein. In der beistehenden Figur 21 findet man die eine Schnittkurve des Zylindroids mit einem Rotationszylinder dargestellt, dessen Achse eine Hauptachse des Zylindroids ist, und der die beiden Grenzebenen berührt.

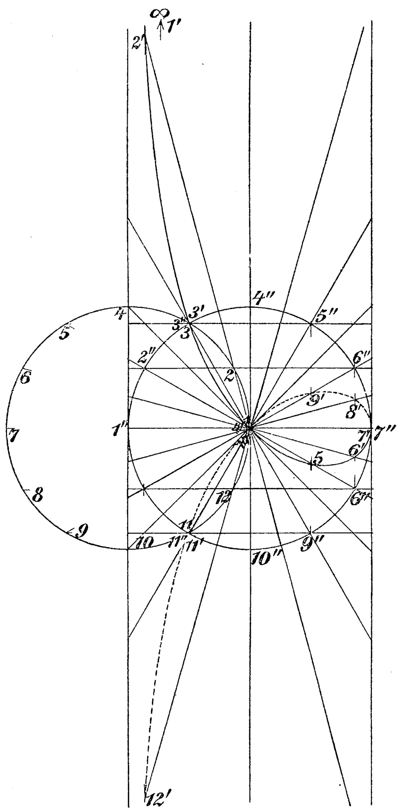

Fig. 21.

Legt man durch eine Raumkurve dritter Ordnung, die auf dem Zylindroid liegt, irgendeine Regelfläche zweiten Grades, so muß diese aus dem Zylindroid noch eine zweite Raumkurve dritter Ordnung ausschneiden. Die beiden Raumkurven müssen die Doppellinie des Zylindroids in denselben zwei Punkten treffen, aber die Regelstrahlen des Zylindroids, die durch diese Punkte gehen und Bisekanten der einen Raumkurve sind, können nicht gleichzeitig Bisekanten der anderen Raumkurve sein. Es ist also jedesmal der zweite Strahl des Zylindroids, der durch die Punkte der Doppellinie geht, eine Bisekante der anderen Raumkurve, so daß die Gleichung (34a) für diese Kurve übergeht in die andere der Gleichung (34b) entsprechende Form:

$$(C - A) + 2B\varrho + (C + A)\varrho^2 = 0.$$

Ist demnach die eine Raumkurve durch den Ansatz (33a) für Φ bestimmt, so wird die andere Raumkurve gegeben durch:

$$\text{(36a)} \qquad \Phi = \frac{(C-A)\cos\varphi^2 + 2B\cos\varphi\sin\varphi + (C+A)\sin\varphi^2}{D'\cos\varphi + E'\sin\varphi}$$

oder:

$$\text{(36)} \qquad \Phi = \frac{-A\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi + C}{D'\cos\varphi + E'\sin\varphi},$$

wobei D' und E' noch willkürlich bleiben. Sieht man in dem ursprünglichen Ansatze für Φ also nur den Zähler des Bruches als bestimmt an, während man die Koeffizienten D, E des Nenners noch beliebig läßt, so erhält man ein Netz von Raumkurven dritter Ordnung auf dem Zylindroid, dessen sämtliche Kurven mit einer festen Raumkurve dritter Ordnung auf je einer Regelfläche zweiten Grades liegen und die Doppellinie in denselben zwei Punkten treffen.

Wir wollen noch zusehen, wie sich die Raumkurven bei der Abbildung des Zylindroids darstellen. Dividieren wir zu dem Zweck die zweite der Gleichungen (34) durch die dritte und setzen darauf gemäß den für die Abbildung gefundenen Formeln (32):

$$\varrho = \frac{y}{x} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}, \quad \frac{y}{z} = \frac{2c}{\mathfrak{x}},$$

so erhalten wir:

$$(37) \qquad (C + A)\mathfrak{x}^2 + 2B\mathfrak{x}\mathfrak{y} + (C - A)\mathfrak{y}^2 - 2cD\mathfrak{x} - 2cE\mathfrak{y} = 0$$

als Gleichung der gesuchten Bildkurve. Diese ist also ein Kegelschnitt, der an die eine allgemeine Bedingung gebunden ist, daß er durch den Mittelpunkt M (d. h. den Koordinatenursprung) in der Bildebene hindurchgehen muß. Zwei solche Kegelschnitte schneiden sich außerdem in drei Punkten, und Gleiches gilt auch von den entsprechenden Raumkurven auf dem Zylindroid. Nur wenn die beiden Raumkurven auf derselben Regelfläche zweiten Grades liegen, haben sie außerdem ihre Schnittpunkte mit der Doppellinie, im ganzen also fünf Punkte gemein. Es ist auch ein allgemeiner Satz, daß zwei Raumkurven dritter Ordnung, die fünf Punkte gemein haben, auf einer Regelfläche zweiten Grades liegen. Die eine Regelschar dieser Fläche besteht aus Unisekanten der einen und Bisekanten der anderen Raumkurve, die andere Regelschar umgekehrt aus Bisekanten der ersten und Unisekanten der zweiten Kurve. (Vgl. z. B. Reyes Geometrie der Lage, II, 4. Aufl., S. 298.)

Wenn der Bildkegelschnitt eine Hyperbel ist, so trifft die zugehörige Raumkurve auf dem Zylindroid dessen Doppellinie in zwei reellen Punkten, sie berührt diese Doppellinie, wenn die Bildkurve eine Parabel ist, und ist die Bildkurve eine Ellipse, so hat die Raumkurve keinen reellen Punkt mit der Doppellinie gemein.

Es ist bei einer Besprechung des Zylindroids auch von Interesse, seine Projektion aus irgendeinem Punkte des Raumes auf eine Ebene, wofür wir am einfachsten die Hauptebene nehmen, zu betrachten, nämlich nach der Kurve zu fragen, die von den Projektionen der Regelstrahlen in dieser Ebene umhüllt wird. So finden wir die allgemeine perspektivische Darstellung des Zylindroids.

Ein Regelstrahl des Zylindroids ist durch zwei Gleichungen:

$$\varrho x - y = 0, \quad (1 + \varrho^2)z - 2c\varrho = 0$$

gegeben, eine beliebige Ebene, die durch ihn hindurchgeht, hat also die Gleichung:

$$\{\varrho x - y\} - \mu\{(1 + \varrho^2)z - 2c\varrho\} = 0,$$

und soll diese Ebene einen bestimmten Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 enthalten, so muß in der Ebenengleichung:

$$\mu = \frac{\varrho x_0 - y_0}{(1+\varrho^2) z_0 - 2c\varrho}$$

werden. Bringen wir die Ebene zum Schnitt mit der Hauptebene, so haben wir in ihrer Gleichung $z = 0$ zu machen und finden demnach mit Einsetzung des Wertes von μ:

$$(38) \qquad \{(1+\varrho^2)z_0 - 2c\varrho\}(\varrho x - y) + 2c\varrho\{\varrho x_0 - y_0\} = 0.$$

Identifizieren wir diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichungsform einer geraden Linie:

$$(38\text{a}) \qquad \xi x + \eta y - \theta = 0,$$

so haben wir:

$$(39) \qquad \frac{\xi}{\theta} = -\frac{(1+\varrho^2)z_0 - 2c\varrho}{2c\varrho(\varrho x_0 - y_0)}\varrho, \quad \frac{\eta}{\theta} = \frac{(1+\varrho^2)z_0 - 2c\varrho}{2c\varrho(\varrho x_0 - y_0)}$$

und hieraus:

$$\frac{x_0\xi + y_0\eta}{\theta} = -\frac{(1+\varrho^2)z_0 - 2c\varrho}{2c\varrho}, \quad \frac{\xi}{\eta} = -\varrho.$$

Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen ϱ, so finden wir:

$$(40) \qquad 2c\xi\eta(x_0\xi + y_0\eta) - \{z_0(\xi^2+\eta^2) + 2c\xi\eta\}\theta = 0.$$

Diese Gleichung können wir als die Tangentialgleichung der von den Projektionen der Regelstrahlen umhüllten Kurve ansehen. Da die Gleichung vom dritten Grade, ist die Kurve von der dritten Klasse: durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen an sie drei Tangenten.

Die Kurve hat eine Doppeltangente, die den Werten $\xi = 0$, $\eta = 0$ entspricht. Für diese Werte verschwindet die linke Seite der vorstehenden Gleichung mit ihren Ableitungen nach ξ, η und θ. Wenn man aber in der Gleichung der geraden Linie (38a) ξ und η verschwindend klein macht, so rückt die gerade Linie in unendliche Entfernung. Die unendlich ferne gerade Linie ist also als Doppeltangente der Kurve anzusehen, und zwei nach den unendlich fernen Berührungspunkten hinlaufende gerade Linien müssen Koordinaten haben, die der Gleichung:

$$z_0(\xi^2+\eta^2) + 2c\xi\eta = 0$$

genügen. Die Wurzeln ξ, η dieser Gleichung fallen zusammen, wenn $z_0^2 = c^2$ wird, sie sind reell und verschieden nur dann, wenn $z_0^2 < c^2$ ist.

Liegt der Projektionspol P_0 auf der Fläche, ist also:

$$(x_0^2 + y_0^2)z_0 = 2c\,x_0 y_0,$$

so wird die Gleichung nach Multiplikation mit $x_0^2 + y_0^2$ durch $2c(x_0\xi + y_0\eta)$ teilbar und reduziert sich somit auf:

$$(41) \qquad (x_0^2 + y_0^2)\xi\eta - (y_0\xi + x_0\eta)\theta = 0.$$

Dies aber ist die Tangentialgleichung einer Parabel, welche die Hauptachsen berührt, da die Gleichung für $\eta = 0$, $\theta = 0$ und für $\xi = 0$, $\theta = 0$ erfüllt ist.

Daraus sieht man nun sofort, daß die Projektionsebenen selbst, also die Ebenen der Kegelschnitte auf dem Zylindroid, die durch einen bestimmten Punkt der Fläche gehen, einen Kegel zweiter Ordnung umhüllen. Diese Kegelschnitte werden aber bei der Abbildung des Zylindroids in der Bildebene durch die Strahlen eines Strahlenbüschels dargestellt. Bezieht man dieses Strahlenbüschel projektiv auf das Strahlenbüschel mit dem Scheitel M, dessen Strahlen den Regelstrahlen des Zylindroids entsprechen, so ist das Erzeugnis der beiden Strahlenbüschel ein Kegelschnitt, der durch M geht und folglich das Bild einer Raumkurve dritter Ordnung auf dem Zylindroid ist. So erkennt man, daß, wenn man das (einen Kegel umhüllende) Ebenenbüschel zweiter Ordnung, durch welches die Regelstrahlen des Zylindroids aus einem Punkte der Fläche projiziert werden, auf diese Regelstrahlen, d. h. auf das Ebenenbüschel, das sie aus der Doppellinie projiziert, projektiv bezieht, die Regelstrahlen von ihren entsprechenden Ebenen in den Punkten einer Raumkurve dritter Ordnung, die auf dem Zylindroid liegt, geschnitten werden.

Wir kehren nach dieser Abschweifung zu der gefundenen Projektionskurve dritter Klasse (40) zurück. Wir wollen zeigen, daß sie drei Spitzen hat und die drei Rückkehrtangenten sich in einem Punkte schneiden. Nach dem, was wir oben gefunden haben, gehen durch den Projektionspol drei Schmiegungsparaboloide des Zylindroids hindurch und damit drei Strahlen, welche je drei unendlich benachbarte Regelstrahlen des Zylindroids treffen. Jeder dieser Strahlen schneidet die Hauptebene in einer Spitze der Projektionskurve, und die Rückkehrtangente in dieser Spitze ist die Projektion des Regelstrahls, in welchem die dreipunktige Berührung des Projektionsstrahls mit dem Zylindroid stattfindet und eines der durch P_0 gehenden Schmiegungsparaboloide sich dem Zylindroid anschmiegt. Diese drei „Schmiegungsstrahlen" liegen aber wieder auf einem Paraboloide, das durch P_0 geht, und werden sonach von einem Strahle, der durch P_0 geht, getroffen. Dieser Projektionsstrahl trifft die Hauptebene in dem gemeinsamen Schnittpunkte der drei Rückkehrtangenten, welche die Projektionen der drei Schmiegungsstrahlen sind.

Wir wollen noch den Fall besonders erwähnen, wo der Projektionspol in unendliche Entfernung rückt, die Zentralprojektion also zu einer Parallelprojektion wird. Dann sind in der Tangentialgleichung der Projektionskurve (40) den Koordinaten x_0, y_0, z_0 unendlich große Werte beizulegen. Dividieren wir vorher die Gleichung durch z_0 und setzen die im allgemeinen endlich bleibenden Verhältnisse:

$$\frac{x_0}{z_0} = \mathfrak{x}_0, \quad \frac{y_0}{z_0} = \mathfrak{y}_0,$$

so erhalten wir, da $2c\xi\eta/z_0$ verschwindet, jetzt die Kurvengleichung:

$$2c\xi\eta(\mathfrak{x}_0\xi + \mathfrak{y}_0\eta) - (\xi^2 + \eta^2)\theta = 0. \tag{42}$$

Für $\mathfrak{x}_0 = 0$ oder $\mathfrak{y}_0 = 0$ wird dies die Gleichung einer dreispitzigen Hypozykloide. Projiziert man also das Zylindroid auf die Hauptebene durch eine Parallelprojektion, welche die Doppellinie auf eine der Hauptachsen des Zylindroids projiziert, so erscheinen die Regelstrahlen der Fläche als die Tangenten einer dreispitzigen (Steinerschen) Hypozykloide.[1] Die beistehende Figur zeigt eine solche Projektion.

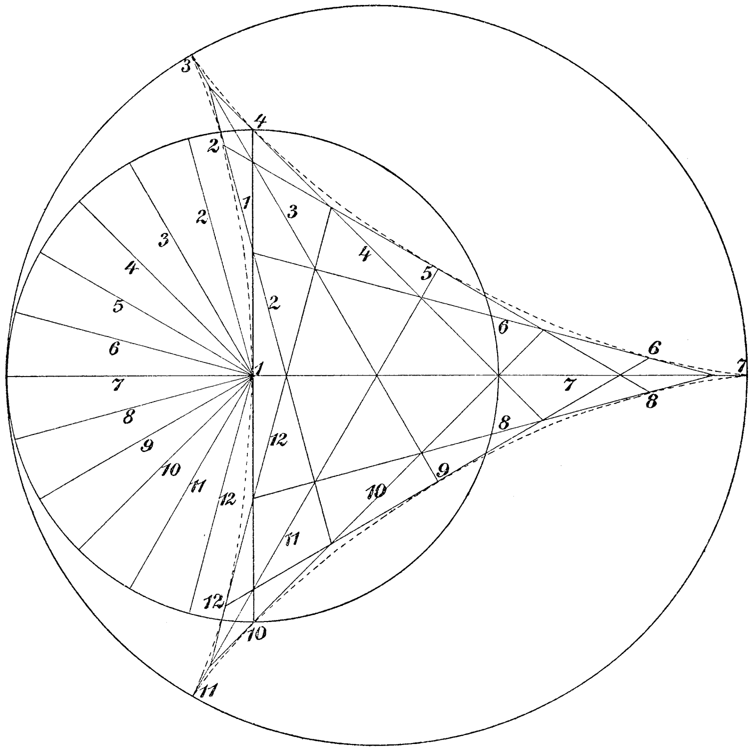

Fig. 22.

Setzt man in der Gleichung des Zylindroids:

$$z = \frac{2cxy}{x^2 + y^2}$$

die folgenden Ausdrücke ein:

1) Vgl. Roberts, Educational Times Vol. 46 (1887) p. 32.

$$(43)\quad X = -4c^2\frac{x}{x^2+y^2},\quad Y = -4c^2\frac{y}{x^2+y^2},\quad Z = -4c^2\frac{z}{x^2+y^2},$$

durch die eine wechselweise eindeutige Transformation des Raumes gegeben ist, so wird:

$$(44)\qquad 2cZ = -XY.$$

Durch diese Gleichung wird ein hyperbolisches Paraboloid dargestellt, in das sonach durch die ausgeführte Transformation das Zylindroid übergeführt wird. Dieses Paraboloid steht aber zu dem Zylindroid noch in besonderen geometrischen Beziehungen, die wir jetzt zu entwickeln haben.

Wir gehen von der Gleichung einer Ebene σ aus, die durch einen Regelstrahl des Zylindroids geht und mithin eine Tangentialebene der Fläche bildet. Diese Gleichung fanden wir in der Form:

$$(45)\qquad \varrho x - y - \mu\{(1+\varrho^2)z - 2c\varrho\} = 0.$$

Die Gleichung einer Ebene σ' durch den konjugierten Regelstrahl erhalten wir, indem wir ϱ mit $-\varrho$ vertauschen, in der Form:

$$\varrho x + y - \nu\{(1+\varrho^2)z + 2c\varrho\} = 0.$$

Eine Ebene η, welche durch die Schnittlinie dieser beiden Ebenen geht, hat also eine Gleichung von folgender Gestalt:

$$\varrho(1+\lambda)x + (1-\lambda)y - (\mu\lambda+\nu)(1+\varrho^2)z + 2c(\mu\lambda-\nu)\varrho = 0.$$

Wir wollen noch die Ebene η' hinzufügen, welche von η durch die Ebenen σ und σ' harmonisch getrennt wird. Diese Ebene hat die Gleichung:

$$\varrho(1-\lambda)x + (1+\lambda)y + (\mu\lambda-\nu)(1+\varrho^2)z - 2c(\mu\lambda+\nu)\varrho = 0.$$

Sollen nun die Ebenen η und η' aufeinander senkrecht sein, so erhalten wir hierfür die Bedingung:

$$\varrho(1+\lambda)\cdot\varrho(1-\lambda) + (1-\lambda)(1+\lambda) - (\mu\lambda+\nu)\cdot(\mu\lambda-\nu)(1+\varrho^2)^2 = 0$$

oder:

$$(46)\qquad 1-\lambda^2 = (\mu^2\lambda^2-\nu^2)(1+\varrho^2).$$

Identifizieren wir die Gleichung der Ebene η' mit der Ebenengleichung:

$$Ux + Vy + Wz = 1,$$

so wird:

$$2cU = \frac{1-\lambda}{\mu\lambda+\nu},\quad 2cV = \frac{1+\lambda}{(\mu\lambda+\nu)\varrho},\quad 2cW = \frac{\mu\lambda-\nu}{\mu\lambda+\nu}\cdot\frac{1+\varrho^2}{\varrho}$$

und daraus:

$$4c^2UV = \frac{1-\lambda^2}{(\mu\lambda+\nu)^2}\cdot\frac{1}{\varrho},\quad 2cW = \frac{\mu^2\lambda^2-\nu^2}{(\mu\lambda+\nu)^2}\,\frac{1+\varrho^2}{\varrho}.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind aber nach (46) einander gleich und so ergibt sich:

$$(47) \qquad UV = \frac{1}{2c} W.$$

Die Ebene η' mit den Koordinaten U, V, W hat nun folgende geometrische Bedeutung: sie halbiert den Winkel zwischen den Ebenen σ und σ', die durch zwei konjugierte Regelstrahlen des Zylindroids gehen. Eine solche Ebene nennen wir eine Mittelebene der beiden Regelstrahlen. Dann zeigt die Gleichung (47), da sie ϱ nicht mehr enthält: Die Mittelebenen eines Paares konjugierter Regelstrahlen sind Mittelebenen aller Paare konjugierter Regelstrahlen auf dem Zylindroid und umhüllen ein Paraboloid. Wir werden sehen, daß dieses Paraboloid mit dem bereits gefundenen identisch ist und wollen es mit Jolles das Fokalparaboloid des Zylindroids nennen.[1])

Wir wollen noch zeigen, daß irgend zwei zueinander senkrechte Ebenen, die sich in einem Regelstrahle des Zylindroids schneiden, bezüglich des Paraboloids konjugiert sind. Nehmen wir an, es sei:

$$(48) \qquad Ux + Vy + Wz = 1$$

die Gleichung einer Ebene, die durch einen Regelstrahl des Zylindroids geht, so haben wir nach (45) zu setzen:

$$(49) \qquad 2cU = -\frac{1}{\mu}, \quad 2cV = \frac{1}{\mu\varrho}, \quad 2cW = \frac{1+\varrho^2}{\varrho}.$$

Für eine zweite Ebene, welche durch denselben Regelstrahl geht und die Koordinaten U', V', W' hat, wird entsprechend:

$$(50) \qquad 2cU' = -\frac{1}{\mu'}, \quad 2cV' = \frac{1}{\mu'\varrho}, \quad 2cW' = \frac{1+\varrho^2}{\varrho}.$$

Sollen die beiden Ebenen zueinander rechtwinklig sein, so muß:

$$UU' + VV' + WW' = 0$$

sein, d. h.:

$$-\frac{1}{\mu\mu'} = 1 + \varrho^2.$$

Führt man in diese Gleichung, nachdem man sie mit $\frac{2}{\varrho}$ multipliziert hat, auf eine andere Art wieder die vorstehenden Werte der Ebenenkoordinaten ein, so kann man sie schreiben:

$$(51) \qquad UV' + VU' = \frac{1}{2c}(W + W').$$

In dieser Form sagt sie aber aus, daß die beiden Ebenen bezüglich des Fokalparaboloids (47) konjugiert sind, w. z. b. w. Hat eine

1) Jolles, Math. Ann. Bd. 63 (1907) p. 337.

gerade Linie die Eigenschaft, daß irgend zwei durch sie hindurchgelegte, zueinander senkrechte Ebenen bezüglich einer bestimmten Fläche zweiter Ordnung konjugiert sind, so nennt man sie eine Fokalachse dieser Fläche. Wir können also sagen: Alle Regelstrahlen des Zylindroids sind Fokalachsen seines Fokalparaboloids.

Gibt man der Gleichung (51) die Form:

$$UX + VY + WZ = 1,$$

so hat man zu setzen:

$$(52) \qquad X = 2c\frac{V'}{W'}, \quad Y = 2c\frac{U'}{W'}, \quad Z = -\frac{1}{W'},$$

woraus folgt:

$$(52a) \qquad U' = -\frac{1}{2c}\frac{Y}{Z}, \quad V' = -\frac{1}{2c}\frac{X}{Z}, \quad W' = -\frac{1}{Z}.$$

So findet man aus den Koordinaten U', V', W' einer Ebene die Koordinaten X, Y, Z ihres Pols. Diesem Pol ist jeder Punkt konjugiert, dessen Koordinaten X', Y', Z' der Gleichung:

$$U'X' + V'Y' + W'Z' = 1$$

oder:

$$X'Y + Y'X = -2c(Z + Z')$$

genügen. Die Gleichung der Fläche, bezüglich deren diese Punkte konjugiert sind (und das ist dieselbe Fläche, bezüglich deren die Ebenen konjugiert sind, d. h. das Fokalparaboloid), muß aber lauten:

$$XY = -2cZ,$$

und dies ist in der Tat die früher schon gefundene Gleichung (44), so daß die Identität dieser Flächen nachgewiesen ist.

Wir suchen von den Ebenen, deren Koordinaten durch die Gleichungen (49) und (50) gegeben sind, die Pole bezüglich des Fokalparaboloids. Diese Pole haben dann nach (52) die Koordinaten:

$$X = \frac{2c}{1+\varrho^2}\cdot\frac{1}{\mu'}, \quad Y = -\frac{2c\varrho}{1+\varrho^2}\cdot\frac{1}{\mu'}, \quad Z = -\frac{2c\varrho}{1+\varrho^2},$$

$$X' = \frac{2c}{1+\varrho^2}\cdot\frac{1}{\mu}, \quad Y' = -\frac{2c\varrho}{1+\varrho^2}\cdot\frac{1}{\mu}, \quad Z' = -\frac{2c\varrho}{1+\varrho^2}.$$

Es wird also:

$$\frac{Y}{X} = \frac{Y'}{X'} = -\varrho, \quad Z = Z' = -2c\frac{\varrho}{1+\varrho^2},$$

das heißt aber, die beiden Punkte liegen auf dem Regelstrahle des Zylindroids, der zu dem die Schnittlinie der beiden Ebenen bildenden Strahl konjugiert ist, und so schließen wir: Konjugierte Regelstrahlen des Zylindroids sind reziproke Polaren bezüglich des Fokalparaboloids.

Wir wollen weiter nachweisen, daß das Fokalparaboloid der Ort aller Punkte ist, die von zwei konjugierten Regelstrahlen des Zylindroids gleich weit entfernt sind. Wenn wir mit X, Y, Z die Koordinaten eines solchen Punktes bezeichnen und uns die beiden konjugierten Regelstrahlen durch die Gleichungen bestimmt denken:

$$\sin\varphi x - \cos\varphi y = 0, \quad z = c\sin 2\varphi$$
$$\sin\varphi x' + \cos\varphi y' = 0, \quad z' = -c\sin 2\varphi = -z,$$

dann wird die Gleichheit der Abstände des Punktes von diesen beiden Regelstrahlen ausgedrückt durch die Gleichung:

$$(Y\cos\varphi - X\sin\varphi)^2 + (Z - z)^2 = (Y\cos\varphi + X\sin\varphi)^2 + (Z + z)^2.$$

Aus derselben folgt:

$$XY\sin 2\varphi = -2Zz$$

oder:

$$XY = -2cZ,$$

d. h. die Gleichung des Fokalparaboloids. Diese Fläche wird sonach erfüllt von den Rotationsachsen der Rotationsflächen zweiter Ordnung, die durch die beiden konjugierten Regelstrahlen des Zylindroids hindurchgehen, und man sieht wieder, daß man dieselbe Fläche als Ort dieser Achsen erhält, welches Paar konjugierter Regelstrahlen man auch wählt.

Eine beliebige Tangentialebene des Fokalparaboloids hat die Gleichung:

$$Yx + Xy = -2c(z + Z),$$

wenn X, Y, Z die Koordinaten des Berührungspunktes sind. Machen wir in dieser Gleichung $z = 0$, $2cZ = -XY$, so erhalten wir die Gleichung der Schnittlinie dieser Tangentialebene mit der Hauptebene in der Form:

$$\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} = 1.$$

Die Koordinaten der Tangentialebene sind nach den Gleichungen (52a):

$$U' = -\frac{1}{2c}\frac{Y}{Z}, \quad V' = -\frac{1}{2c}\frac{X}{Z}, \quad W' = -\frac{1}{Z}$$

oder:

$$(53) \qquad U' = \frac{1}{X}, \quad V' = \frac{1}{Y}, \quad W' = \frac{2c}{XY}.$$

Suchen wir nun die Tangentialebene des Zylindroids, welche durch dieselbe gerade Linie der Hauptebene geht wie die Tangentialebene des Fokalparaboloids, so haben wir in den Gleichungen (49):

$$U = -\frac{1}{2c\mu} = \frac{1}{X}, \quad V = \frac{1}{2c\mu}\cdot\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{Y}$$

zu setzen, also:

$$\frac{1}{\mu} = -\frac{2c}{X}, \quad \varrho = -\frac{Y}{X},$$

woraus $W = -\frac{X^2 + Y^2}{2cXY}$ folgt. Dann aber wird:

$$UU' + VV' + WW' = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{X^2 + Y^2}{X^2 Y^2} = 0,$$

d. h. die beiden Tangentialebenen sind zueinander senkrecht. So finden wir: In jeder geraden Linie der Hauptebene wird eine Tangentialebene des Zylindroids von einer zu ihr senkrechten Tangentialebene des Fokalparaboloids geschnitten.

Vierzehntes Kapitel.

Schraubennetze.

Wir haben im zehnten Kapitel gefunden, daß sich die linearen Schraubensysteme dritter Stufe oder, wie wir kürzer sagen, Schraubennetze[1]), von gewissen Spezialfällen abgesehen, durch die drei einfachen Gleichungen darstellen lassen:

(1) $$\mathfrak{u} = \alpha \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = \beta \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{w} = \gamma \mathfrak{r}.$$

Die Achsen des zugrunde gelegten Koordinatensystems wollen wir dann als die Hauptachsen, den Koordinatenursprung als den Mittelpunkt oder das Zentrum des Schraubensystems bezeichnen und dies letztere selbst, wenn es sich durch Gleichungen von der angeschriebenen Form darstellen läßt, als ein zentrisches Schraubennetz charakterisieren. $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ sind die unabhängigen Koordinaten des Systems, durch sie wird eine Schraube innerhalb des Systems eindeutig festgelegt. Sie sind den Richtungskosinus der Schraubenachse gleich, und der Schraubenparameter wird durch sie, da $\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2 = 1$ anzunehmen ist, in der folgenden einfachen Weise ausgedrückt:

(2) $$k = \alpha \mathfrak{p}^2 + \beta \mathfrak{q}^2 + \gamma \mathfrak{r}^2.$$

Wir beschränken nun die Untersuchung des Systems auf die Verteilung der zugehörigen Schraubenachsen im Raume, wobei die Achsen der Schrauben von gleichem Parameter jedesmal zusammenzufassen sind. Diese Schrauben bilden, wie wir bereits gesehen

---

1) Man vgl. zu diesem Kapitel Waelsch, Ber. d. Wien. Akad., Math. Kl. 2. Abt., Bd. 95, 1887, p. 781, Joly, Transact. of the R. Irish Acad. Vol. 30, 1894, p. 597, Ball, Theory of Screws, Chap. XIV, XV und Study, Geometrie der Dynamen, p. 460—512.

haben, allemal die eine Regelschar einer Regelfläche zweiten Grades. Es ist sofort zu sehen, daß immer die Strahlen der zweiten Regelschar Schraubenachsen des anderen Schraubennetzes, welches zu dem vorgelegten Schraubennetze reziprok ist, bilden müssen. Denn ist k der Schraubenparameter, welcher den Strahlen der ersten Regelschar als Achsen von Schrauben des ersten Schraubennetzes zukommt, so ist zu diesen Schrauben jede Schraube korreziprok, deren Parameter gleich $-k$ ist und deren Achse alle jene Schraubenachsen trifft, wie es die Strahlen der zweiten Regelschar tun. Die Schraube ist aber damit korreziprok zu allen Schrauben des vorgelegten Schraubennetzes und gehört demnach zu dem reziproken Netze. Wir wollen den Satz seiner Wichtigkeit wegen aber auch analytisch zu erweisen suchen.

Seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ die Koordinaten der Achse einer Schraube des vorgelegten Systems, x, y, z die Koordinaten eines Punktes auf dieser Achse, so wird:

$$(3) \qquad \begin{cases} (\alpha-k)\mathfrak{x}+z\mathfrak{y}-y\mathfrak{z}=0, \\ -z\mathfrak{x}+(\beta-k)\mathfrak{y}+x\mathfrak{z}=0, \\ y\mathfrak{x}-x\mathfrak{y}+(\gamma-k)\mathfrak{z}=0, \end{cases}$$

und daraus folgt durch Elimination von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung der zum Parameter k gehörenden A c h s e n f l ä c h e, wie wir den Ort der Achsen nennen wollen:

$$(4) \quad (\alpha-k)x^2+(\beta-k)y^2+(\gamma-k)z^2+(\alpha-k)(\beta-k)(\gamma-k)=0.$$

Sind nun $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ die Koordinaten einer Schraube des reziproken Netzes, so muß die Beziehung:

$$\mathfrak{u}\mathfrak{p}'+\mathfrak{v}\mathfrak{q}'+\mathfrak{w}\mathfrak{r}'+\mathfrak{p}\mathfrak{u}'+\mathfrak{q}\mathfrak{v}'+\mathfrak{r}\mathfrak{w}'=0$$

gelten, wenn man für $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Werte aus (1) einsetzt, was auch die unabhängigen Koordinaten sind. Damit löst sich die entstehende Gleichung in die folgenden drei auf:

$$(5) \qquad \mathfrak{u}'+\alpha\mathfrak{p}'=0, \quad \mathfrak{v}'+\beta\mathfrak{q}'=0, \quad \mathfrak{w}'+\gamma\mathfrak{r}'=0,$$

welche als die Gleichungen des reziproken Schraubennetzes anzusehen sind. Wie man sieht, unterscheiden sie sich nur dadurch von den Gleichungen (1), daß die Konstanten α, β, γ durch ihre entgegengesetzten Werte $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ ersetzt sind. Leitet man nun auch für dieses reziproke Netz die Achsenflächen ab, so erhält man für sie genau die Gleichung (4), wenn man nur für den Parameter nicht den Wert k, sondern den Wert $-k$ nimmt. Die Achsenflächen beider Schraubennetze stimmen also überein. Die Achsen der Schrauben eines Netzes bilden nun eine Kongruenz, die wir als die A c h s e n k o n g r u e n z des Schraubennetzes bezeichnen wollen. Zwei derartige Achsenkongruenzen nennen wir konjugiert, wenn sie zu reziproken Schraubennetzen gehören. Die Strahlen zweier konjugierten Achsenkongruenzen verteilen sich dann auf die durch die Gleichung (4) gegebenen Achsenflächen derart, daß jedesmal die eine Regelschar dieser Flächen zur einen, die andere Regelschar zur anderen Achsenkongruenz gehört.

Die Fläche, die sich aus der Gleichung (4) für $k = 0$ ergibt, wollen wir als die Nullfläche bezeichnen. Durch die Nullfläche ist die ganze Schar der Achsenflächen gegeben. Denn bringt man, was auf eine einzige Art möglich ist, ihre Gleichung auf die Form:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \alpha\beta\gamma = 0,$$

so hat man von den Konstanten α, β, γ in dieser Gleichung nur den gleichen beliebigen Betrag k abzuziehen, um zu der Gleichung (4) einer beliebigen Achsenfläche zu gelangen. Die Nullfläche gewinnt aber, wenn man die Schrauben des einen Schraubennetzes als die Träger von Schraubungen ansieht, eine besondere kinematische Bedeutung. Die Schraubungen, die zu den in die Nullfläche fallenden Schraubenachsen gehören, reduzieren sich nämlich auf einfache Drehungen. Jede Schraubung aber, deren Schraube zu dem Schraubennetz gehört, läßt sich aus Drehungen um irgend drei der in die Nullfläche fallenden Achsen zusammensetzen, da diese Drehungen voneinander unabhängig sind und sich somit nicht aus zweien die dritte zusammensetzen läßt. Faßt man nun die Verschiebung ins Auge, die ein Punkt auf einer der drei ausgewählten Achsen infolge irgendeiner der möglichen Drehungen ausführen kann, so sieht man sofort, daß der Punkt in einer bestimmten Ebene bleiben muß. Denn bei der Drehung um die Achse, die durch den Punkt selbst geht, bleibt er unverrückt. Bei den anderen beiden Drehungen dagegen verschiebt er sich in zwei bestimmten Richtungen und durch beide Drehungen zusammen somit in der diese Richtungen verbindenden Ebene. Die Stellung dieser Ebene ist leicht festzulegen. Die Richtungen, in denen sich der Punkt bei den zwei Drehungen verschiebt, müssen nämlich beide normal sein zu der Linie, die durch den Punkt geht und die beiden anderen Drehachsen trifft, d. h. zu dem Strahl der zweiten Regelschar, der durch den Punkt geht, und die Ebene, in der sich der Punkt verschieben kann, steht somit senkrecht auf diesem Regelstrahl. So sieht man, daß man die durch das Schraubennetz repräsentierte momentane Beschränkung der Bewegungsfreiheit eines Körpers herstellen kann, indem man drei Punkte des Körpers zwingt, in bestimmten Ebenen zu bleiben. Dann findet man die Nullfläche des Schraubennetzes sofort, indem man in den drei Punkten auf den zugehörigen Ebenen die Lote errichtet, diese drei Lote bestimmen als drei Regelstrahlen die Nullfläche, und alle

Punkte der Nullfläche sind dann momentan gezwungen, in Ebenen zu bleiben.

Wenn wir uns nun wieder zu der Betrachtung des Schraubennetzes an sich wenden, so ist es zunächst gut, zu bemerken, daß die Untersuchung der Achsenkongruenz bereits die Zusammenfassung der Schraubenachsen mit gleichem Parameter in sich schließt, denn solche Schraubenachsen liegen immer auf einer und derselben Achsenfläche. Den Wert des Parameters selbst aber kann man auf diese Weise nur bis auf eine additive Konstante bestimmen. In der Tat ist sofort zu sehen, daß die durch die Gleichung (4) bestimmte Schar der Achsenflächen und damit die Achsenkongruenz ungeändert bleibt, wenn α, β, γ und dabei gleichzeitig k um dieselbe Größe vermehrt oder vermindert werden, so daß irgendeine andere Achsenfläche zur Nullfläche wird.

Es ist also die Achsenkongruenz dieselbe für alle Schraubennetze, die durch Gleichungen von folgender Form dargestellt werden:

$$(6)\qquad \mathfrak{u} = (\alpha - \varrho)\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = (\beta - \varrho)\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{w} = (\gamma - \varrho)\mathfrak{r},$$

was auch der Wert von ϱ sei. Von allen diesen Schraubennetzen sagen wir wieder, sie bilden eine syzygetische Schar. Aus dieser Schar von Netzen können wir ein beliebiges Netz auswählen, wenn es sich bloß um die Untersuchung der Achsenkongruenz handelt. Wir nehmen:

$$(7)\qquad \varrho = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

und setzen:

$$(8)\qquad \alpha - \varrho = a, \quad \beta - \varrho = b, \quad \gamma - \varrho = c, \quad k - \varrho = \lambda,$$

dann wird:

$$(9)\qquad a + b + c = 0.$$

Die Gleichung (4) geht so über in die folgende:

$$(10)\quad (a - \lambda)x^2 + (b - \lambda)y^2 + (c - \lambda)z^2 + (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda) = 0,$$

an die wir alles Weitere anknüpfen wollen.

Wir wollen zunächst durch die allgemeine Form einer Ebenengleichung:

$$\xi x + \eta y + \zeta z - \theta = 0$$

homogene Ebenenkoordinaten ξ, η, ζ, θ einführen und auch in diesen Ebenenkoordinaten die Gleichung der Achsenflächen, als Flächen zweiter Klasse aufgefaßt, geben. Da der Punktdarstellung:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

einer Fläche zweiten Grades die Ebenendarstellung:

$$\frac{\xi^2}{A} + \frac{\eta^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} = \theta^2$$

gegenübersteht, finden wir sofort die Tangentialgleichung der Achsenfläche:

$$(11) \quad (b-\lambda)(c-\lambda)\xi^2 + (c-\lambda)(a-\lambda)\eta^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)\zeta^2 + \theta^2 = 0.$$

Die singulären Flächen, die unter den Achsenflächen enthalten sind, erhalten wir, wenn wir $\lambda = a$, b oder c machen. Machen wir z. B. $\lambda = a$, so reduziert sich die Achsenfläche als Fläche zweiter Ordnung auf das durch die Gleichung:

$$(a-b)y^2 + (a-c)z^2 = 0$$

dargestellte Ebenenpaar, als Fläche zweiter Klasse auf das durch die Gleichung:

$$(a-b)(a-c)\xi^2 + \theta^2 = 0$$

gegebene Punktepaar. Die Ebenen gehen durch die x-Achse, die Punkte liegen auf der x-Achse und haben die Abszissen:

$$(12) \qquad x = \pm\sqrt{-(a-b)(a-c)}.$$

Die erste Regelschar der Achsenfläche artet dann aus in zwei Strahlenbüschel, deren Scheitel die gefundenen Punkte sind und die in den gefundenen Ebenen liegen. Jedem der gefundenen Punkte, die wir als Scheitelpunkte bezeichnen, wird so eine der gefundenen Ebenen zugeordnet. Zu dieser Zuordnung gelangt man wie folgt. Nach den Gleichungen (3), in denen man jetzt a, b, c statt α, β, γ und λ statt k schreiben muß, wird ein Strahl der Achsenkongruenz gegeben durch:

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} (a-\lambda)\mathfrak{x} &= \mathfrak{z}y - \mathfrak{y}z, \\ (b-\lambda)\mathfrak{y} &= \mathfrak{x}z - \mathfrak{z}x, \\ (c-\lambda)\mathfrak{z} &= \mathfrak{y}x - \mathfrak{x}y. \end{aligned}\right.$$

Für $\lambda = a$ folgt hieraus zunächst allgemein:

$$\mathfrak{y} : \mathfrak{z} = y : z, \quad (a-b)\mathfrak{y}^2 + (a-c)\mathfrak{z}^2 = 0$$

und ferner, daß man insbesondere den drei Gleichungen genügt, wenn man

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = (a-b)\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} = -(a-c)\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}$$

macht. Nimmt man also:

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} = +\sqrt{-\frac{a-c}{a-b}} = \frac{+\sqrt{-(a-b)(a-c)}}{a-b},$$

so wird auch:

$$x = +\sqrt{-(a-b)(a-c)},$$

und entsprechend erhält man, wenn man in dem Ausdruck für $\mathfrak{y} : \mathfrak{z}$ statt des positiven den negativen Wurzelwert wählt, den entgegengesetzten Wert von x.

Wir erhalten so sechs Punkte, auf jeder Hauptachse zwei, durch welche je ein Büschel von Kongruenzstrahlen geht, und welche somit singuläre Punkte der Achsenkongruenz sind. Diese Punkte nennen wir mit Study Scheitelpunkte. Von ihnen sind stets nur zwei reell, denn wenn $a > b > c$, so wird $\sqrt{-(b-c)(b-a)}$ reell, aber $\sqrt{-(a-b)(a-c)}$ und $\sqrt{-(c-a)(c-b)}$ imaginär.

Durch einen beliebigen Punkt gehen, wie wir schon früher fanden, drei Strahlen der Achsenkongruenz. Diese drei Strahlen verteilen sich i. a. auf drei verschiedene Achsenflächen, so daß durch einen beliebigen Punkt drei Achsenflächen gehen. In der Tat wird die Gleichung (10), wenn wir in ihr x, y, z als fest gegeben ansehen, vom dritten Grade für λ und liefert drei Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, für die wir sonach die Gleichungen erhalten:

$$(14)\quad \begin{cases} (a-\lambda_1)x^2 + (b-\lambda_1)y^2 + (c-\lambda_1)z^2 \\ \qquad\qquad + (a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1) = 0, \\ (a-\lambda_2)x^2 + (b-\lambda_2)y^2 + (c-\lambda_2)z^2 \\ \qquad\qquad + (a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2) = 0, \\ (a-\lambda_3)x^2 + (b-\lambda_3)y^2 + (c-\lambda_3)z^2 \\ \qquad\qquad + (a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3) = 0. \end{cases}$$

Ferner muß, weil in der Gleichung dritten Grades für λ der Koeffizient von $\lambda^2 = a + b + c = 0$ wird:

$$(15)\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

sein, woraus auch:

$$\lambda_1^3(\lambda_2-\lambda_3) + \lambda_2^3(\lambda_3-\lambda_1) + \lambda_3^3(\lambda_1-\lambda_2) = 0$$

folgt. Multipliziert man nun die Gleichungen (14) der Reihe nach mit $\lambda_2-\lambda_3$, $\lambda_3-\lambda_1$, $\lambda_1-\lambda_2$ und addiert, so ergibt sich identisch Null. Die drei Gleichungen (14) sind also linear abhängig, und die durch sie dargestellten Achsenflächen gehören einem Büschel an, sie durchschneiden sich alle drei in derselben Raumkurve vierter Ordnung. Multiplizieren wir aber die Gleichungen (14) mit $\lambda_2^2-\lambda_3^2$, $\lambda_3^2-\lambda_1^2$, $\lambda_1^2-\lambda_2^2$ und addieren, so ergibt sich:

$$(16)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - C = 0,$$

wenn wir:

$$(17)\qquad C = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 - bc - ca - ab$$

setzen. Denken wir uns nämlich für den Augenblick die Gleichung dritten Grades für λ in der Form geschrieben:

$$\lambda^3 - M\lambda - N = 0,$$

so muß hierin $M = -(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)$ sein. Dann aber werden die Gleichungen (14):

$$\lambda_1^3 - M\lambda_1 - N = 0, \quad \lambda_2^3 - M\lambda_2 - N = 0, \quad \lambda_3^3 - M\lambda_3 - N = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit $\lambda_2^2 - \lambda_3^2$, $\lambda_3^2 - \lambda_1^2$, $\lambda_1^2 - \lambda_2^2$ und addieren sie, so ergibt sich mit Rücksicht auf den vorstehenden Wert von M sofort:

$$\begin{aligned}\lambda_1^3(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + \lambda_2^3(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) + \lambda_3^3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\\ = -\{\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2\}\{\lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + \lambda_2(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) + \lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\},\end{aligned}$$

und wenn man diese Identität beachtet, folgt mit Leichtigkeit die Gleichung (16).

Diese Gleichung zeigt aber, daß die gemeinsame Schnittkurve der drei Achsenflächen (14) auf einer Kugel liegt, die um den Mittelpunkt des Schraubensystems (d. h. den Koordinatenursprung) mit dem Radius $\sqrt{C}$ beschrieben ist. Die drei Achsenflächen, die durch einen Punkt gehen, haben somit alle Punkte eines sphärischen Kegelschnittes gemeinsam.

Wenn in der Gleichung dritten Grades für λ zwei Wurzeln zusammenfallen, etwa $\lambda_2 = \lambda_3$ wird, so folgt aus der Gleichung (15), daß:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \tag{18}$$

ist. Von den drei Achsenflächen fallen dann aber zwei zusammen, und die Schnittkurve der so übrigbleibenden zwei Flächen hat die Eigenschaft, daß für ihre Punkte zwei der drei durch sie hindurchgehenden Kongruenzstrahlen zusammenfallen. Die unendlich vielen sphärischen Kegelschnitte, für deren Punkte dies eintritt, erhalten wir aber nach (18), indem wir jede Achsenfläche mit der anderen Achsenfläche schneiden, für die der Parameter λ_2 gleich $-\frac{1}{2}\lambda_1$ ist, wenn λ_1 den Parameter der ersten Fläche bedeutet. Aus den beiden Flächengleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}(a + 2\lambda_2)x^2 + (b + 2\lambda_2)y^2 + (c + 2\lambda_2)z^2\\ + (a + 2\lambda_2)(b + 2\lambda_2)(c + 2\lambda_2) = 0,\\ (a - \lambda_2)x^2 + (b - \lambda_2)y^2 + (c - \lambda_2)z^2\\ + (a - \lambda_2)(b - \lambda_2)(c - \lambda_2) = 0\end{aligned}\right. \tag{19}$$

leiten wir zunächst ab:

$$\left\{\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2) + (bc + ca + ab) + 3\lambda_2^2 = 0,\\ ax^2 + by^2 + cz^2 + abc + 2\lambda_2^3 = 0\end{aligned}\right. \tag{19a}$$

und hieraus weiter durch Elimination von λ_2:

$$
(20) \qquad \begin{aligned} &\{x^2 + y^2 + z^2 + bc + ca + ab\}^3 \\ &\qquad\qquad + \frac{27}{4}\{ax^2 + by^2 + cz^2 + abc\}^2 = 0. \end{aligned}
$$

Diese Gleichung stellt die Fläche dar, für deren Punkte zwei der drei durch sie hindurchgehenden Kongruenzstrahlen zusammenfallen und die wir die Brennfläche der Kongruenz nennen. Sie ist, wie wir an ihrer Gleichung sehen, von der sechsten Ordnung. Die beistehende Figur versucht, eine Anschauung von dieser Fläche zu geben.

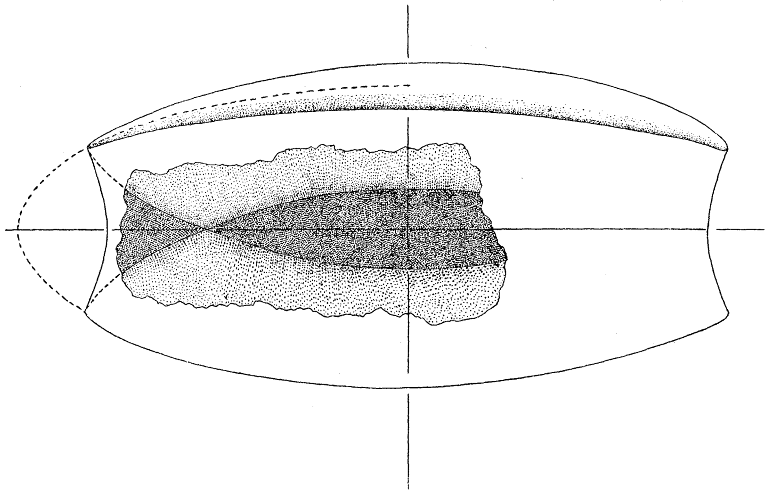

Fig. 22.

Alle drei Kongruenzstrahlen fallen zusammen, wenn auch noch $\lambda_2 = \lambda_1$ wird. Dann aber muß nach Gleichung (18) $\lambda_2 = 0$ sein, und die Gleichungen (19a) werden:

$$
(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 + \ y^2 + \ z^2 + bc + ca + ab &= 0, \\ ax^2 + by^2 + cz^2 + abc &= 0. \end{aligned} \right.
$$

Durch diese zwei Gleichungen wird wieder ein sphärischer Kegelschnitt dargestellt, der eine Kuspidalkurve oder Schneide der Brennfläche bildet. Von der durch die zweite Gleichung (21) gegebenen Fläche wird die Brennfläche längs der Kuspidallinie berührt.

Die Scheitelpunkte auf den Hauptachsen, welche die singulären Punkte der Achsenkongruenz bilden, sind Doppelpunkte der Brennfläche, so daß diese auf jeder Hauptachse zwei Doppelpunkte besitzt, die aber nur auf einer Hauptachse reell sind. Der Beweis ist zu führen, indem man zeigt, daß für die gefundenen Koordinaten dieser Punkte die linke Seite der Gleichung (20) mitsamt ihren Derivierten nach x, y, z verschwindet.

Wir hatten ebenfalls früher gefunden, daß in einer beliebigen Ebene zwei Strahlen der Achsenkongruenz liegen. Dieselben gehören zwei verschiedenen Achsenflächen an, und die Parameter dieser Achsenflächen sind aus der Gleichung (11) zu bestimmen, indem man in derselben die Ebenenkoordinaten als fest gegeben ansieht. Die Gleichung ist in der Tat für λ vom zweiten Grade. Wenn ihre Diskriminante verschwindet, so fallen die beiden in der Ebene liegenden Kongruenzstrahlen zusammen. Die Bedingung hierfür ist also gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}(22)\qquad &\{a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2\}^2 \\ &\quad - 4\{bc\xi^2 + ca\eta^2 + ab\zeta^2 + \theta^2\}\{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\} = 0.\end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist wirklich die in Rede stehende Diskriminante, wie man sofort sieht, wenn man die Gleichung (11) nach Potenzen von λ ordnet und noch die Relation $a + b + c = 0$ beachtet. Die durch die Gleichung (22) dargestellte Fläche ist die Enveloppe der Achsenflächen, denn die Gleichung wird befriedigt durch die Koordinaten jeder Ebene, welche zwei unendlich benachbarte Achsenflächen berührt. Die Fläche wird dann aber auch erfüllt von den Schnittkurven unendlich benachbarter Achsenflächen, sie ist also mit der Brennfläche identisch und (22) ist einfach die Tangentialgleichung der Brennfläche, die demnach, da die Gleichung vom vierten Grade, von der vierten Klasse ist.

Suchen wir jetzt insbesondere die Kongruenzstrahlen, die in einer Ebene durch den Mittelpunkt (d. h. den Koordinatenursprung) liegen, so haben wir in der Gleichung (11) $\theta = 0$ zu machen und können sie dann schreiben:

$$(23)\qquad \frac{\xi^2}{a-\lambda} + \frac{\eta^2}{b-\lambda} + \frac{\zeta^2}{c-\lambda} = 0.$$

Sind λ_1, λ_2 die Wurzeln dieser Gleichung für bestimmte Werte ξ, η, ζ, so ziehe man die entstehenden zwei Gleichungen:

$$\frac{\xi^2}{a-\lambda_1} + \frac{\eta^2}{b-\lambda_1} + \frac{\zeta^2}{c-\lambda_1} = 0, \quad \frac{\xi^2}{a-\lambda_2} + \frac{\eta^2}{b-\lambda_2} + \frac{\zeta^2}{c-\lambda_2} = 0$$

voneinander ab und erhält dann:

$$(24)\qquad \frac{\xi^2}{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)} + \frac{\eta^2}{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)} + \frac{\zeta^2}{(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)} = 0.$$

Wir wollen nun die Koordinaten der Schraubenachsen, die in der Ebene liegen, bestimmen. Hierzu dienen die Gleichungen (13), in denen wir λ_1, λ_2 für λ und entsprechend $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_2$ für die „unabhängigen Koordinaten“ der Schraubenachse zu setzen haben. Multiplizieren wir aber darauf die Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z und addieren, so erhalten wir einmal:

$$(a-\lambda_1)\mathfrak{x}_1 x + (b-\lambda_1)\mathfrak{y}_1 y + (c-\lambda_1)\mathfrak{z}_1 z = 0,$$

das andere Mal:

$$(a-\lambda_2)\mathfrak{x}_2 x + (b-\lambda_2)\mathfrak{y}_2 y + (c-\lambda_2)\mathfrak{z}_2 z = 0,$$

und sollen diese beiden Gleichungen mit der Gleichung der Ebene durch den Mittelpunkt:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

identisch sein, so ergibt sich:

$$(25) \qquad \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{y}_1 : \mathfrak{z}_1 = \frac{\xi}{a-\lambda_1} : \frac{\eta}{b-\lambda_1} : \frac{\zeta}{c-\lambda_1}$$

und:

$$(25) \qquad \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{y}_2 : \mathfrak{z}_2 = \frac{\xi}{a-\lambda_2} : \frac{\eta}{b-\lambda_2} : \frac{\zeta}{c-\lambda_2}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung (24) ein, so zeigt sich, daß:

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 = 0$$

wird, das heißt aber: die beiden Schraubenachsen sind zueinander senkrecht, und wir finden: Die Ebenen durch den Mittelpunkt enthalten zwei zueinander normale Kongruenzstrahlen. Umgekehrt gehen auch alle Ebenen, die zwei zueinander normale Strahlen der Kongruenz enthalten, durch den Mittelpunkt.

Wir bestimmen jetzt den Schnittpunkt dieser Kongruenzstrahlen. Zu dem Zwecke nehmen wir zunächst die Gleichungen vor, die aus der dritten Gleichung (13) hervorgehen:

$$(c-\lambda_1)\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{y}_1 x - \mathfrak{x}_1 y, \quad (c-\lambda_2)\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{y}_2 x - \mathfrak{x}_2 y,$$

und eliminieren aus ihnen y, dann folgt:

$$(\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_1)x = (c-\lambda_1)\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_2 - (c-\lambda_2)\mathfrak{z}_2\mathfrak{x}_1,$$

oder wenn wir für die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ihre Werte aus (25) einsetzen und reduzieren:

$$\frac{(b-a)\eta}{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)}x = \xi.$$

Es gilt aber die identische Beziehung:

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$
$$= (b-\lambda)(c-\lambda)\xi^2 + (c-\lambda)(a-\lambda)\eta^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)\zeta^2,$$

denn es sind λ_1, λ_2 die Wurzeln der Gleichung, die durch das Nullsetzen der rechten Seite dieser Identität gegeben wird. Machen wir in der letzteren $\lambda = b$, so folgt:

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(b-\lambda_1)(b-\lambda_2) = (c-b)(a-b)\eta^2$$

und, indem wir hieraus den Wert von $(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)$ in die gefundene Gleichung für x einsetzen, ergibt sich, wenn wir gleich die zwei analogen Gleichungen für y, z hinzunehmen:

$$
(26) \qquad \begin{cases} x = (b-c)\dfrac{\eta\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \\ y = (c-a)\dfrac{\zeta\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \\ z = (a-b)\dfrac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}. \end{cases}
$$

Als Ort des Schnittpunktes der in einer Ebene durch den Mittelpunkt gelegten Kongruenzstrahlen muß sich aber eine Fläche ergeben, und die vorstehenden Gleichungen bieten eine Parameterdarstellung der Punkte dieser Fläche. Aus der Parameterdarstellung können wir die Gleichung der Fläche leicht ableiten. Es läßt sich sofort verifizieren, daß durch die Werte (26) die folgende Gleichung identisch befriedigt wird:

$$
(27) \qquad \begin{aligned} (b-c)^2y^2z^2 + (c-a)^2z^2x^2 + (a-b)^2x^3y^2 \\ + (b-c)(c-a)(a-b)xyz = 0. \end{aligned}
$$

Dies ist also die gesuchte Gleichung der Fläche. Die letztere ist von der vierten Ordnung, und die Koordinatenachsen sind Doppellinien von ihr, da z. B. für $y = 0$, $z = 0$ die Funktion auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung mit allen ihren ersten Derivierten verschwindet. Eine solche Fläche vierter Ordnung mit drei durch einen Punkt gehenden geraden Doppellinien heißt eine Steinersche Fläche. (Steiner selbst bezeichnete sie als römische Fläche.) Die hier vorliegende Fläche nennen wir die Knotenfläche der Achsenkongruenz. Sie ist insofern eine besondere Steinersche Fläche, als ihre Doppellinien zueinander normal sind.

Eine zweite solche Fläche finden wir aber, indem wir aus dem Mittelpunkte auf alle Strahlen der Achsenkongruenz die Lote fällen. Die Fußpunkte dieser Lote erfüllen eine Fläche, die wir als die Fußpunktfläche der Achsenkongruenz bezeichnen. Wir suchen zunächst wieder eine Parameterdarstellung der Fläche, und zwar wählen wir zu Parametern die unabhängigen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Kongruenzstrahls, auf den das Lot gefällt wird. Den Fußpunkt dieses Lotes finden wir auch als Schnittpunkt des Kongruenzstrahls mit einer zu ihm senkrechten Ebene, die durch den Mittelpunkt geht. Da $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ den Richtungskosinus des Kongruenzstrahls proportional sind, erhalten wir für die Gleichung der Normalebene durch den Mittelpunkt sofort:

$$
\mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z = 0.
$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\mathfrak{x}$ und setzen dann aus den zwei letzten der Gleichungen (13) ein:

$$
\mathfrak{x}z = \mathfrak{z}x + (b-\lambda)\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{x}y = \mathfrak{y}x - (c-\lambda)\mathfrak{z},
$$

so erhalten wir:

$$x(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) + (b - c)\mathfrak{y}\mathfrak{z} = 0,$$

und nehmen wir den hieraus folgenden Wert von x sogleich zusammen mit den entsprechenden Werten für y und z, so finden wir die gesuchte Parameterdarstellung:

$$(28) \qquad \begin{cases} x = -(b - c)\dfrac{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}, \\[2ex] y = -(c - a)\dfrac{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}, \\[2ex] z = -(a - b)\dfrac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}. \end{cases}$$

Sie unterscheidet sich von der früher gefundenen Darstellung der Knotenfläche nur durch die Bezeichnung und Bedeutung der Parameter und durch die Vorzeichen der Ausdrücke für x, y, z. Wir finden also aus dieser Parameterdarstellung genau wie vorhin die Gleichung der Fläche:

$$(29) \qquad \begin{aligned} (b - c)^2 y^2 z^2 + (c - a)^2 z^2 x^2 + (a - b)^2 x^2 y^2 \\ - (b - c)(c - a)(a - b)\, xyz = 0. \end{aligned}$$

Es ist eine Fläche von ganz derselben Art wie die Knotenfläche, und was wir jetzt für die letztere entwickeln, läßt sich sofort auch auf die Fußpunktfläche übertragen, indem man nur a, b, c mit $-a$, $-b$, $-c$ vertauscht.

Wir setzen der Kürze wegen:

$$(30) \qquad b - c = a', \quad c - a = b', \quad a - b = c',$$

so daß auch:

$$(30\text{a}) \qquad a' + b' + c' = 0$$

wird; dann schreibt sich die Gleichung (27) der Knotenfläche einfacher:

$$(27\text{a}) \qquad a'^2 y^2 z^2 + b'^2 z^2 x^2 + c'^2 x^2 y^2 + a'b'c'\, xyz = 0.$$

Dieser Gleichung können wir nun die Form geben:

$$(31) \qquad \begin{aligned} (a'\xi yz + b'\eta zx + c'\zeta xy)\left(a'\frac{yz}{\xi} + b'\frac{zx}{\eta} + c'\frac{xy}{\zeta}\right) \\ - (\Xi x + \mathrm{H} y + \mathrm{Z} z - \Theta)\, xyz = 0. \end{aligned}$$

In der Tat wird die linke Seite der letzten Gleichung mit der der vorigen identisch, wenn wir machen:

$$(32) \quad \Xi = b'c'\frac{\eta^2 + \zeta^2}{\eta\zeta}, \quad \mathrm{H} = c'a'\frac{\zeta^2 + \xi^2}{\zeta\xi}, \quad \mathrm{Z} = a'b'\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi\eta}, \quad \Theta = a'b'c'.$$

Ist nun:

$$(33) \qquad \Xi x + \mathrm{H} y + \mathrm{Z} z - \Theta = 0,$$

so zerfällt die Gleichung (31) in die zwei quadratischen Gleichungen:

$$(34)\qquad a'\xi yz + b'\eta zx + c'\zeta xy = 0,\quad a'\frac{yx}{\xi} + b'\frac{zx}{\eta} + c'\frac{xy}{\zeta} = 0.$$

Die durch die Gleichung (33) dargestellte Ebene τ schneidet sonach die Knotenfläche in zwei Kegelschnitten, nämlich den Kurven, welche die beiden durch die Gleichungen (34) dargestellten Kegel aus der Ebene ausschneiden. Die Ebene muß darum eine Tangentialebene der Knotenfläche sein. Die beiden Kegel durchschneiden sich nämlich in den Koordinatenachsen und außerdem noch in einer vierten durch den Mittelpunkt gehenden Linie, die Kegelschnitte schneiden sich demnach auf den drei Achsen und außerdem in einem vierten Punkte. Da die Koordinatenachsen Doppellinien der Fläche sind, hat die Schnittkurve mit der Ebene τ nur einen Doppelpunkt mehr als die Schnittkurve mit einer beliebigen Ebene. Die Ebene τ ist also als eine einfache Tangentialebene der Fläche und der vierte Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte als ihr Berührungspunkt anzusehen.

Es kann aber auch der Fall eintreten, daß die beiden Kegelschnitte zusammenfallen, und dann berührt die Ebene die Knotenfläche längs eines ganzen Kegelschnittes. In diesem Falle müssen auch die beiden Kegel (34) identisch sein, und man sieht sofort, daß sie dies sind, wenn:

$$\xi^2 = \eta^2 = \zeta^2$$

wird, womit vier verschiedene solche singuläre Tangentialebenen gegeben werden. Man kann nämlich die vier verschiedenen möglichen Fälle unterscheiden:

1) $\xi = \eta = \zeta$, 2) $-\xi = \eta = \zeta$, 3) $\xi = -\eta = \zeta$, 4) $\xi = \eta = -\zeta$,

und berechnet man diesen vier Möglichkeiten entsprechend aus (32) die Koordinaten der Ebenen, so sieht man sofort, daß ihre Gleichungen werden:

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{2x}{a'} + \dfrac{2y}{b'} + \dfrac{2z}{c'} = 1, \\ \dfrac{2x}{a'} - \dfrac{2y}{b'} - \dfrac{2z}{c'} = 1, \\ -\dfrac{2x}{a'} + \dfrac{2y}{b'} - \dfrac{2z}{c'} = 1, \\ -\dfrac{2x}{a'} - \dfrac{2y}{b'} + \dfrac{2z}{c'} = 1. \end{cases}$$

Dies sind sonach die Gleichungen der singulären Tangentialebenen, welche die Knotenfläche längs Kegelschnitten berühren, und die Kegelschnitte selbst werden durch die Kegel ausgeschnitten, deren Gleichung von folgender Form ist:

$$(36)\qquad \pm a'yz \pm b'zx \pm c'xy = 0.$$

Wenn wir allgemein statt der homogenen Ebenenkoordinaten nicht homogene einführen durch die Gleichungen:

$$(37)\qquad u = \frac{\Xi}{\Theta},\quad v = \frac{\mathrm{H}}{\Theta},\quad w = \frac{\mathrm{Z}}{\Theta},$$

dann folgt aus (32):

$$(38)\qquad u = \frac{\eta^2+\zeta^2}{a'\eta\zeta},\quad v = \frac{\zeta^2+\xi^2}{b'\zeta\xi},\quad w = \frac{\xi^2+\eta^2}{c'\xi\eta},$$

und aus dieser Parameterdarstellung für die Tangentialebenen der Knotenfläche ist leicht die Tangentialgleichung der letzteren abzuleiten:

$$(39)\qquad a'^2u^2 + b'^2v^2 + c'^2w^2 - a'b'c'uvw = 4,$$

aus der man sieht, daß die Fläche von der dritten Klasse ist.

Wir nehmen nun zu der Achsenkongruenz die konjugierte Achsenkongruenz, die zu dem reziproken Schraubennetz gehört, hinzu. Es seien $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ die unabhängigen Koordinaten irgendeines Strahles dieser Kongruenz, so sind die übrigen drei Koordinaten von der Form:

$$(40)\qquad \mathfrak{l}' = -(a+\lambda')\mathfrak{x}',\quad \mathfrak{m}' = -(b+\lambda')\mathfrak{y}',\quad \mathfrak{n}' = -(c+\lambda')\mathfrak{z}'.$$

Diese Formeln sind zusammenzuhalten mit den Formeln, welche zu den unabhängigen Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ eines Strahles der ersten Kongruenz dessen letzte Koordinaten $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ zu finden lehren:

$$(41)\qquad \mathfrak{l} = (a-\lambda)\mathfrak{x},\quad \mathfrak{m} = (b-\lambda)\mathfrak{y},\quad \mathfrak{n} = (c-\lambda)\mathfrak{z}.$$

Wenn nun ein Strahl der ersten Kongruenz einen Strahl der zweiten Kongruenz schneidet, so muß die Beziehung bestehen:

$$(42^0)\qquad \mathfrak{l}'\mathfrak{x} + \mathfrak{m}'\mathfrak{y} + \mathfrak{n}'\mathfrak{z} + \mathfrak{x}'\mathfrak{l} + \mathfrak{y}'\mathfrak{m} + \mathfrak{z}'\mathfrak{n} = 0.$$

Führt man hierin die Werte (40) und (41) ein, so entsteht:

$$\begin{aligned}(a+\lambda')\mathfrak{x}'\mathfrak{x} + (b+\lambda')\mathfrak{y}'\mathfrak{y} + (c+\lambda')\mathfrak{z}'\mathfrak{z}&\\ -(a-\lambda)\mathfrak{x}'\mathfrak{x} - (b-\lambda)\mathfrak{y}'\mathfrak{y} - (c-\lambda)\mathfrak{z}'\mathfrak{z} &= 0\end{aligned}$$

oder:

$$(42)\qquad (\lambda'+\lambda)(\mathfrak{x}'\mathfrak{x} + \mathfrak{y}'\mathfrak{y} + \mathfrak{z}'\mathfrak{z}) = 0.$$

Diese Gleichung ist erstens erfüllt, wenn:

$$(42\text{a})\qquad \lambda' = -\lambda,$$

die Parameter der beiden Achsen einander also entgegengesetzt gleich sind. Dann liegen sie, wie wir schon wissen, auf einer und derselben Achsenfläche. Ein bestimmter Strahl der zweiten Kongruenz wird in der Tat von allen zur ersten Regelschar gehörenden Regelstrahlen der Achsenfläche getroffen, zu deren zweiter Regelschar er selbst gehört.

Zweitens ist die Gleichung erfüllt, wenn:

$$(42\text{b})\qquad \mathfrak{x}'\mathfrak{x} + \mathfrak{y}'\mathfrak{y} + \mathfrak{z}'\mathfrak{z} = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet aber, daß die beiden sich schneidenden Strahlen der zwei Kongruenzen zueinander rechtwinklig sind. Ein beliebiger Strahl der zweiten Kongruenz wird also von unendlich vielen Strahlen der ersten Kongruenz unter rechten Winkeln getroffen. Es ist sofort zu sehen, daß diese Strahlen ein Zylindroid erfüllen. Denn führen wir in die Gleichung (42b) statt der Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der Achse die Koordinaten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ der zugehörigen Schraube ein, so erhalten wir eine Gleichung:

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{p} + \mathfrak{y}'\mathfrak{q} + \mathfrak{z}'\mathfrak{r} = 0,$$

die mit den drei Gleichungen des Schraubennetzes zusammen eine Schraubenreihe festlegt, und die Achsen der Schrauben dieser Schraubenreihe müssen ein Zylindroid erfüllen. Die Hauptebene dieses Zylindroids muß, da sie zwei zueinander senkrechte Strahlen der Achsenkongruenz enthält, durch deren Mittelpunkt hindurchgehen. Der Strahl der zweiten Kongruenz, den alle auf dem Zylindroid liegenden Strahlen der ersten Kongruenz treffen, ist dessen Doppellinie und steht auf der Hauptebene des Zylindroids in dem Schnittpunkte seiner Hauptachsen senkrecht. Wenn man sonach auf einer Ebene durch den Mittelpunkt in dem Schnittpunkte der zur ersten Kongruenz gehörenden und zueinander senkrechten Strahlen, die in der Ebene liegen, das Lot errichtet, so bildet dieses einen Strahl der zweiten Kongruenz.

Man kann nun auch umgekehrt schließen: wenn die Richtung eines Strahles der ersten Kongruenz normal zu der Richtung eines Strahles der zweiten Kongruenz ist, so schneiden sich die beiden Strahlen. Denn aus der dann geltenden Beziehung (42b) folgt rückwärts die Gleichung (42°). Zu irgend zwei Strahlen der ersten Kongruenz ist aber ein Strahl der zweiten Kongruenz senkrecht. Denn sind $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_2$ die unabhängigen Koordinaten jener beiden Strahlen, so wird den Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}' = 0, \quad \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}_2\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}_2\mathfrak{z}' = 0,$$

welche die Koordinaten $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ des Strahles der zweiten Kongruenz zu erfüllen haben, genügt, indem man:

$$\mathfrak{x}' : \mathfrak{y}' : \mathfrak{z}' = \mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_2 : \mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_2 : \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_2$$

annimmt. So ergibt sich: Die gemeinsame Normale zweier Strahlen der ersten Kongruenz gehört zur konjugierten Achsenkongruenz. Greift man insbesondere aus der ersten Kongruenz die Achsen heraus, denen ein bestimmter Parameter zukommt, so sieht man: Die gemeinsamen Normalen je zweier Regelstrahlen der zur ersten Achsenkongruenz gehörenden

Regelschar einer Achsenfläche bilden die konjugierte Achsenkongruenz.

Die zwei Regelstrahlen der Achsenfläche bilden jedesmal zwei konjugierte Strahlen des durch sie bestimmten Zylindroids. Rücken sie einander unendlich nahe, so müssen sie demnach in eine Hauptachse dieses Zylindroids übergehen. Ihre gemeinsame Normale, die einen Strahl der zweiten Kongruenz bildet, wollen wir dann als eine Striktionstangente der Achsenfläche bezeichnen und ihren Berührungspunkt als den Striktionspunkt des betreffenden Regelstrahls. Derselbe bildet den Mittelpunkt des zugehörigen Zylindroids, und dessen zweite Hauptachse wird gefunden als die durch den Striktionspunkt gehende Linie, die auf dem Regelstrahl (als der ersten Hauptachse) und auf der Striktionstangente (als der Doppellinie des Zylindroids) senkrecht steht. Gleichzeitig geht die Ebene, welche beide Hauptachsen verbindet, durch den Mittelpunkt, hat also eine Gleichung von der Form:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0.$$

Da sie aber einen Regelstrahl der Achsenfläche enthält, ist sie eine Tangentialebene derselben, und zwar als Ebene durch den Mittelpunkt eine Tangentialebene mit unendlich fernem Berührungspunkt, d. h. eine Asymptotenebene. Die Gleichung, der sie genügt, erhält man sofort aus (11), wenn man darin $\theta = 0$ macht. Man kann sie schreiben:

$$\frac{\xi^2}{a-\lambda} + \frac{\eta^2}{b-\lambda} + \frac{\zeta^2}{c-\lambda} = 0.$$

Der Striktionspunkt ist als Schnittpunkt zweier senkrechter Kongruenzstrahlen, nämlich der beiden Hauptachsen des Zylindroids, ein Punkt der Knotenfläche, seine Koordinaten sind also von der Form (26). Nun läßt sich der vorstehenden Gleichung genügen durch einen Ansatz von folgender Gestalt:

$$\xi : \eta : \zeta = (A_0 + A_1\sigma + A_2\sigma^2) : (B_0 + B_1\sigma + B_2\sigma^2) : (C_0 + C_1\sigma + C_2\sigma^2),$$

in dem σ einen variablen Parameter bezeichnet. Setzt man diese Ausdrücke aber in die Gleichungen (26) ein, so erhält man die Koordinaten des Striktionspunktes als gebrochene Funktionen vierten Grades des Parameters σ, und zwar stimmen diese Funktionen im Nenner überein. Die sämtlichen Striktionspunkte, die man für die verschiedenen Regelstrahlen der ersten Regelschar auf der Achsenfläche erhält, liegen also auf einer rationalen Raumkurve 4. Ordnung, der Striktionskurve, die gleichzeitig der Knotenfläche angehört.

Fassen wir einen beliebigen Punkt S auf einem Strahle s_1' der zweiten Achsenkongruenz ins Auge, so gehen durch ihn zwei Strahlen s_2, s_3 der ersten Kongruenz, die dem durch den Strahl s_1'

bestimmten Zylindroid angehören und zu diesem Strahle als der Doppellinie des Zylindroids rechtwinklig sind. Außerdem muß aber durch den Punkt S noch ein dritter Strahl s_1 der ersten Achsenkongruenz gehen, und da auch die zweite Achsenkongruenz von der dritten Ordnung ist, müssen von dieser noch zwei Strahlen, s_2' und s_3', den Punkt S enthalten. Diese beiden Strahlen müssen ebenfalls jeder auf zwei der Strahlen s_1, s_2, s_3 senkrecht stehen, und umgekehrt steht auch jeder der Strahlen s_1, s_2, s_3 senkrecht auf zwei der Strahlen s_1', s_2', s_3'. Dies können wir so ausdrücken, daß wir sagen: die durch einen Punkt S gehenden Strahlen der beiden Achsenkongruenzen bilden zwei polare Trieder.

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die Parameter, die zu s_1, s_2, s_3 gehören, und λ_1', λ_2', λ_3' die Parameter von s_1', s_2', s_3', dann müssen die Parameter, die zu den nicht aufeinander senkrechten Strahlen beider Kongruenzen gehören, einander entgegengesetzt gleich sein. Wir können also annehmen, es sei:

$$\lambda_1' = -\lambda_1, \quad \lambda_2' = -\lambda_2, \quad \lambda_3' = -\lambda_3, \tag{43}$$

woraus, da $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ist, auch:

$$\lambda_1' = \lambda_2 + \lambda_3, \quad \lambda_2' = \lambda_3 + \lambda_1, \quad \lambda_3' = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{43a}$$

folgt. Die Strahlen s_2, s_3, zu denen λ_2 und λ_3 gehören, sind aber Regelstrahlen des Zylindroids, dessen Doppellinie der Strahl s_1' mit dem Parameter λ_1' ist. Die Summe der Parameter irgend zweier zur ersten Achsenkongruenz gehörenden Strahlen eines Zylindroids, die durch denselben Punkt von dessen Doppellinie gehen, also auch die doppelten Parameter von den Grenzstrahlen des Zylindroids, sind demnach gleich dem Parameter, der der Doppellinie als einem Strahl der zweiten Achsenkongruenz zukommt.

Wir wollen nun das Zylindroid festzulegen suchen durch die unabhängigen Koordinaten $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ des seine Doppellinie bildenden Strahles der konjugierten Achsenkongruenz. Zu dem Zweck denken wir uns auf die Strahlen des Zylindroids aus dem Mittelpunkte die Lote gefällt. Die Fußpunkte dieser Lote liegen dann (vgl. S. 188) auf einem Kegelschnitte, anderseits müssen sie auf der Fußpunktfläche enthalten sein. Der Kegelschnitt gehört also der Fußpunktfläche an, und seine Ebene bildet eine Tangentialebene dieser Fläche. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die unabhängigen Koordinaten des Strahles auf dem Zylindroid, so sind die Koordinaten des Lotfußpunktes durch die Gleichungen (28) gegeben, aus diesen Gleichungen folgt aber, wie man leicht sieht, die Proportion:

$$(b-c)yz : (c-a)zx : (a-b)xy = \mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z}.$$

Nun sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ an die Gleichung (42b):

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{x} + \mathfrak{y}'\mathfrak{y} + \mathfrak{z}'\mathfrak{z} = 0$$

gebunden. Es ergibt sich also die Gleichung:

$$(44) \qquad (b-c)\mathfrak{x}'yz + (c-a)\mathfrak{y}'zx + (a-b)\mathfrak{z}'xy = 0$$

für den Kegel, der den Kegelschnitt aus dem Mittelpunkt projiziert. Identifiziert man diese Gleichung mit der ersten Gleichung (34), so hat man:

$$\mathfrak{x}' : \mathfrak{y}' : \mathfrak{z}' = \xi : \eta : \zeta$$

zu setzen. Dann aber folgt für die Gleichung der Ebene die Form (33), wenn man darin für die Koeffizienten die Werte (32) nimmt, nur mit dem Unterschied, daß man jetzt für a', b', c':

$$-(b-c), \quad -(c-a), \quad -(a-b)$$

zu setzen hat. Damit wird die Ebenengleichung die folgende:

$$(45) \qquad \frac{\mathfrak{y}'^2+\mathfrak{z}'^2}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'}\,\frac{x}{b-c} + \frac{\mathfrak{z}'^2+\mathfrak{x}'^2}{\mathfrak{z}'\mathfrak{x}'}\,\frac{y}{c-a} + \frac{\mathfrak{x}'^2+\mathfrak{y}'^2}{\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'}\,\frac{z}{a-b} + 1 = 0.$$

Durch die Gleichungen (44) und (45) ist der Kegelschnitt festgelegt, wenn man die unabhängigen Koordinaten $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ des Strahles der zweiten Achsenkongruenz, zu dem das Zylindroid gehört und der seine Doppellinie bildet, als gegeben ansieht. Fällt man von den Punkten des Kegelschnittes die Lote auf diese Doppellinie, so erfüllen dieselben das Zylindroid.

Wir wollen auch auf die Strahlen der ersten Achsenkongruenz, die auf einer Achsenfläche enthalten sind, die Lote fällen und die von den Fußpunkten dieser Lote erfüllte Kurve, die wir kurz als die Fußpunktkurve dieser Regelschar der Achsenfläche bezeichnen, zu bestimmen suchen. Die unabhängigen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der Strahlen, die zu dem Parameter λ gehören und mithin auf der diesem Parameterwerte entsprechenden Achsenfläche liegen, genügen der unmittelbar aus (13) hervorgehenden Gleichung:

$$(46) \qquad (a-\lambda)\mathfrak{x}^2 + (b-\lambda)\mathfrak{y}^2 + (c-\lambda)\mathfrak{z}^2 = 0.$$

Die Koordinaten x, y, z des Lotfußpunktes als eines Punktes der Fußpunktfläche sind dann durch die Formeln (28) bestimmt. Der Gleichung (46) wird aber wieder durch einen Ansatz von folgender Form genügt:

$$\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} = (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1\sigma + \mathfrak{A}_2\sigma^2) : (\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1\sigma + \mathfrak{B}_2\sigma^2) : (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1\sigma + \mathfrak{C}_2\sigma^2).$$

Trägt man diese Werte in (28) ein, so sind die Koordinaten x, y, z als Funktionen des einzigen Parameters σ dargestellt, und zwar als gebrochene Funktionen vierten Grades mit gemeinsamem Nenner. Die Fußpunktkurve ist also wie die Striktionskurve eine rationale Raumkurve vierter Ordnung.

Nun beachten wir, daß die Gleichung der Knotenfläche und die Gleichung der Fußpunktfläche sich untereinander vertauschen, wenn wir a, b, c mit $-a, -b, -c$ vertauschen, daß aber gleichzeitig, wenn wir a, b, c durch $-a, -b, -c$ ersetzen, auch die erste Achsenkongruenz in die konjugierte Achsenkongruenz übergeht. So sehen wir: Die Knotenfläche der ersten Achsenkongruenz ist die Fußpunktfläche der konjugierten Achsenkongruenz und umgekehrt die Fußpunktfläche der ersten Kongruenz die Knotenfläche der zweiten Kongruenz. Daraus schließen wir weiter: Die Knotenfläche der ersten (oder zweiten) Kongruenz wird von einer beliebigen Achsenfläche in der Striktionskurve der zur ersten (oder zweiten) Kongruenz gehörenden Regelschar und in der Fußpunktkurve der zur zweiten (oder ersten) Kongruenz gehörenden Regelschar dieser Achsenfläche geschnitten, und die beiden Raumkurven vierter Ordnung bilden zusammen den vollständigen Schnitt der Achsenfläche mit der Knotenfläche. Die hier auftretenden rationalen Raumkurven pflegt man als Raumkurven vierter Ordnung zweiter Spezies zu bezeichnen. Sie liegen auf einer einzigen Fläche zweiten Grades, die immer eine Regelfläche ist. Die Strahlen der einen Regelschar dieser Fläche schneiden die Raumkurve in drei, die Strahlen der anderen Regelschar nur in einem Punkte. Dies ist auch hier leicht zu erkennen, wenn man bedenkt, daß jeder Regelstrahl der Achsenfläche mit der Knotenfläche als einer Fläche vierter Ordnung im ganzen vier Punkte gemein haben muß.

Es sei noch bemerkt, daß die Gleichung (20) der Brennfläche sich nicht ändert, wenn man a, b, c mit $-a, -b, -c$ vertauscht. Zwei konjugierte Achsenkongruenzen besitzen also dieselbe Brennfläche. Die allgemeine Bedeutung der Brennfläche für die Strahlenkongruenz soll jetzt näher erörtert werden.

Wir sahen, daß ein Strahl der zweiten Achsenkongruenz von unendlich vielen Strahlen der ersten Kongruenz, die ein Zylindroid erfüllen, unter rechtem Winkel getroffen wird. Diese Strahlen haben paarweise den gleichen Parameter, und zwar sind die Strahlen eines solchen Paares als zwei konjugierte Strahlen eines Zylindroids von einem festen Punkte des als Leitlinie dienenden Strahles der zweiten Kongruenz, nämlich dem Punkte, der den Mittelpunkt des Zylindroids bildet, gleichweit entfernt. Anderseits liegen sie aber auf einer Achsenfläche. Es sind also die Paare von Schnittpunkten eines Strahles der zweiten Kongruenz mit den Achsenflächen so beschaffen, daß die durch diese Punktepaare begrenzten Strecken alle denselben Halbierungspunkt besitzen, den wir den Mittelpunkt M' des betreffenden Kongruenzstrahls nennen. Durch jeden Punkt des letzteren gehen zwei auf ihm senkrechte Strahlen der anderen Kongruenz. Nur für zwei Punkte des Leitstrahls fallen diese zwei Strahlen unendlich nahe zusammen. Diese Punkte nennen wir die Grenzpunkte G_1', G_2' des Strahles. Nach der Definition der Brennfläche als des Ortes der Punkte, durch die zwei unendlich benachbarte Kongruenzstrahlen gehen, müssen diese Grenzpunkte auf der Brennfläche liegen. Auch sie müssen von dem Mittelpunkte gleichweit entfernt sein, da die Grenzstrahlen eines Zylindroids zwei konjugierte Strahlen auf demselben bilden und die Paare unendlich benachbarter Strahlen, welche den angenommenen Strahl der zweiten Kongruenz in einem Grenzpunkte senkrecht treffen, als solche Grenzstrahlen eines Zylindroids aufzufassen sind. Jenseits der Grenzpunkte wird der Leitstrahl von keinem reellen Strahl der anderen Kongruenz unter rechtem Winkel getroffen.

Legt man nun durch den Leitstrahl, d. h. die Doppellinie des Zylindroids die Ebenenpaare, die je zwei konjugierte Regelstrahlen des Zylindroids enthalten, so werden die Winkel, die diese Ebenenpaare bilden, alle halbiert durch zwei bestimmte Ebenen, nämlich die Ebenen, welche die Hauptachsen des Zylindroids enthalten und welche wir als die Mittelebenen des Leitstrahles bezeichnen wollen. Es müssen aber die Ebenenpaare, welche zwei konjugierte Strahlen des Zylindroids, also zwei Strahlen der ersten Kongruenz von gleichem Parameter enthalten, aus Tangentialebenen derselben Achsenfläche bestehen. Demnach werden die Winkel, welche die durch einen Kongruenzstrahl s' an die Achsenflächen gelegten Paare von Tangentialebenen bilden, alle halbiert durch die Mittelebenen des Kongruenzstrahles s'. Es enthält aber jede durch diesen Strahl gelegte Ebene noch einen Strahl der anderen Kongruenz von entgegengesetzt gleichem Parameter. So erhalten wir für jede durch den Strahl s' der zweiten Kongruenz gehende Ebene die zwei Strahlen der ersten Kongruenz, die darin enthalten sind, der eine liegt auf dem Zylindroid, dessen Doppellinie s' bildet, der andere auf der durch s' hindurchgehenden Achsenfläche und hat den Parameter $-\lambda'$, wenn λ' der Parameter von s' ist. Nun gibt es auf dem Zylindroid auch zwei Strahlen, denen der Parameter $-\lambda'$ zukommt, und somit enthalten die Ebenen durch den Leitstrahl s', die durch diese Strahlen gehen, nur einen einzigen Strahl oder vielmehr zwei zusammenfallende Strahlen der ersten Kongruenz, sie müssen deswegen Tangentialebenen der Brennfläche sein. Außerdem werden, weil sie durch konjugierte Strahlen des Zylindroids gehen, die Winkel, die sie bilden, nach dem, was wir gesehen haben, durch die Mittelebenen des Leitstrahles s' halbiert.

Die Strahlen s_1, s_2 der ersten Kongruenz, die in den gefundenen beiden Ebenen enthalten sind, liegen auf der durch s' gehenden Achsenfläche und treffen s' rechtwinklig, sie sind also in zwei zu s' normalen Tangentialebenen der Achsenfläche enthalten. Diese Tangentialebenen sind nach der allgemeinen Eigenschaft konjugierter Strahlen eines Zylindroids gleichweit von der Hauptebene des Zylindroids, d. h., weil die Hauptebene durch den Mittelpunkt der Achsenflächen geht, gleichweit von der zu s' normalen Asymptotenebene der durch s' gehenden Achsenfläche entfernt, sie sind also auch gleichweit von dem Mittelpunkte der Achsenfläche entfernt. Wenn man den zu s' parallelen Strahl $\mathfrak{s}'$ des Asymptotenkegels nimmt und die zu ihm senkrechte Ebene durch den Mittelpunkt der Achsenfläche legt, so schneidet diese aus dem Asymptotenkegel zwei Strahlen $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ aus, die zu den Strahlen s_1, s_2 parallel sind, verbindet man also den Strahl $\mathfrak{s}'$ mit diesen Strahlen $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ durch zwei Ebenen, so sind diese den zwei durch s' gehenden Tangentialebenen der Brennfläche parallel.

Nun muß nach dem, was wir früher gefunden haben (S. 219), die Summe der Parameter für die zwei Strahlen der ersten Kongruenz, die in einer Normalebene von s' liegen und sich in einem Punkte von s' schneiden, gleich dem Parameter λ' von s' sein. Ist also der Parameter des einen Strahles $\lambda = -\lambda'$, so wird der Parameter des anderen Strahles $2\lambda' = -2\lambda$.

Wir nehmen jetzt einen Punkt S an, durch den zwei unendlich benachbarte Strahlen s der ersten Kongruenz vom Parameter λ gehen, dann muß der auf ihrer Verbindungsebene σ in S senkrecht stehende Strahl s_1' zur zweiten Kongruenz gehören und ihm der Parameter 2λ zukommen. Legen wir nun durch s_1' zu dem Strahl s die Normalebene σ_1', so kommt dem zweiten in dieser Ebene enthaltenen Strahl s' der zweiten Kongruenz der Parameter $-\lambda$ zu, und wenn wir weiter durch s die Normalebene σ_1 zu s' legen, so hat der zweite in dieser Ebene enthaltene Strahl s_1 der ersten Kongruenz den Parameter -2λ. Legen wir endlich durch s' die Normalebene zu s_1, so hat der zweite in dieser Ebene enthaltene Strahl der zweiten Kongruenz den Parameter $-\lambda$ und fällt deswegen, weil nicht in einer Ebene zwei getrennt liegende Strahlen derselben Kongruenz von gleichem Parameter enthalten sein können, mit s' zusammen. Der Punkt S ist ein gemeinsamer Grenzpunkt der Strahlen s_1 und s_1'.

Halten wir nun die Raumfigur, die so für einen Punkt S der Brennfläche entsteht, zusammen mit den vorangehenden Überlegungen, so sehen wir, daß es auf jedem Strahl s' der zweiten Kongruenz zwei Punkte S, $\bar{S}$ gibt, die der Brennfläche angehören und in denen zwei unendlich benachbarte Strahlen der ersten Kongruenz sich schneiden, während gleichzeitig in ihnen s' selbst von je einem unendlich benachbarten Strahl der zweiten Kongruenz getroffen wird. Diese beiden Punkte S, $\bar{S}$ nennen wir die Brennpunkte des Strahles s' und die Ebenen, welche diesen Strahl mit den ihn in S, $\bar{S}$ treffenden unendlich benachbarten Strahlen derselben Kongruenz verbinden, seine Brennebenen $\sigma, \bar{\sigma}$. Weil der Strahl sonach in zwei Tangentialebenen der Brennfläche liegt und gleichzeitig durch deren Berührungspunkte hindurchgeht, ist er eine Doppeltangente der Brennfläche. Da die letztere von der vierten Klasse ist, sind die beiden Brennebenen $\sigma, \bar{\sigma}$ die einzigen Tangentialebenen der Brennfläche, die durch den Strahl s' gehen, denn in jeder dieser Tangentialebenen fallen zwei Tangentialebenen zusammen, wenn man den Strahl aus irgendeiner anderen Lage in die doppelte Berührung übergehen läßt. Diese beiden Brennebenen sind also identisch mit den schon vorher gefundenen, durch s' gehenden Tangentialebenen der Brennfläche und sind auch als die Verbindungsebenen der sich auf dem Strahle s' schneidenden unendlich benachbarten Strahlen der anderen Kongruenz anzusehen. Hat ein Strahl s der einen Kongruenz mit einem Strahl s' der anderen Kongruenz einen Brennpunkt gemein, so steht er auf ihm senkrecht, und die Ebene, die beide Strahlen verbindet, ist eine gemeinsame Brennebene derselben. Denn sie ist eine Tangentialebene der Brennfläche.

Ein Strahl, dessen Parameter λ ist, wird in jedem seiner Brennpunkte von einem Strahle derselben Kongruenz, dessen Parameter -2λ ist und von einem Strahle der anderen Kongruenz, dessen Parameter $+2\lambda$, getroffen. Daraus ist zu schließen, daß die beiden Brennpunkte durch eine Achsenfläche ausgeschnitten werden, und der Punkt, der zwischen ihnen in der Mitte liegt, der Mittelpunkt des Strahles ist. Anderseits ist dies der Punkt, in dem der Strahl von den Hauptachsen des durch ihn bestimmten Zylindroids getroffen wird, und liegt auf der Knotenfläche der konjugierten Kongruenz, also der Fußpunktfläche der Kongruenz, zu der der Strahl selbst gehört. Die Fußpunktfläche einer Kongruenz schneidet mithin alle Strahlen dieser Kongruenz in der Mitte zwischen ihren beiden Brennpunkten.

Jeder Strahl s einer der beiden Kongruenzen berührt die Brennfläche in seinen Brennpunkten und schneidet sie außerdem in seinen Grenzpunkten. In den Brennpunkten wird er von je einem Strahle derselben Kongruenz getroffen, dessen Parameter -2λ ist, und in den Grenzpunkten von je einem Strahle, dessen Parameter $-\frac{\lambda}{2}$ ist, wenn λ den Parameter des Strahles s selbst bedeutet. Die beiden Brennpunkte einerseits und die beiden Grenzpunkte anderseits sind von demselben Punkte, dem Mittelpunkte des Strahles, gleichweit entfernt.

Im vorhergehenden sind die singulären Fälle nicht berücksichtigt, wo unter den Grundparametern α, β, γ in den Gleichungen (1) und infolgedessen auch unter den daraus abgeleiteten Konstanten

a, b, c zwei gleiche sind. Nehmen wir $a = b$, woraus $c = -2a$ folgt, so werden alle Achsenflächen Rotationsflächen, deren Rotationsachse die z-Achse ist. Die beiden Steinerschen Flächen reduzieren sich dann auf die xy-Ebene. Die Brennfläche wird gleichfalls eine Rotationsfläche, ihre Gleichung lautet jetzt:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2)^3 + \frac{27}{4} a^2 (x^2 + y^2 - 2z^2 - 2a^2)^2 = 0.$$

Die Gleichung der Meridiankurve findet man für $y = 0$:

$$(x^2 + z^2 - 3a^2)^3 + \frac{27}{4} a^2 (x^2 - 2z^2 - 2a^2)^2 = 0.$$

Diese Meridiankurve ist in der beistehenden Figur dargestellt.

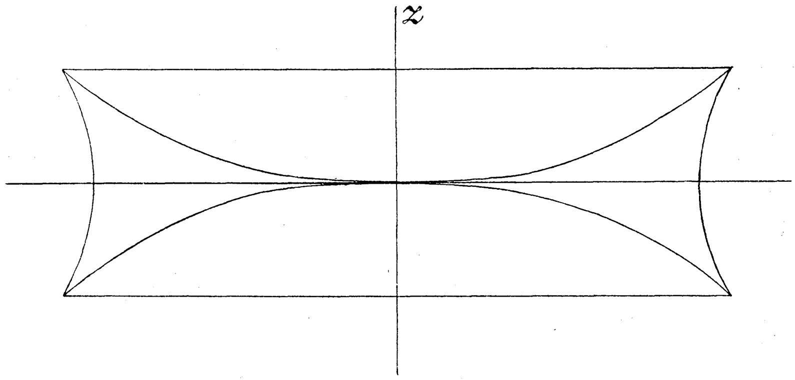

Fig. 23.

Für $z = 0$ folgt aus der gefundenen Kurvengleichung:

$$x^4 \left(x^2 - \frac{9}{4} a^2\right) = 0.$$

Daraus ist zu schließen, daß die Meridiankurve im Koordinatenursprung einen Selbstberührungspunkt und die x-Achse als singuläre Tangente besitzt. (Die letztere schneidet die Kurve noch in den Punkten, deren Abszissen $x = \pm \frac{3}{2} a$ sind.) Der Koordinatenursprung oder Mittelpunkt ist jetzt ein singulärer Knotenpunkt der Fläche, in dem zwei Schalen derselben einander berühren. Die Kuspidalkurve der Fläche zerfällt in zwei Kreise, und diese entstehen, wenn man die Fläche durch Rotation der Meridiankurve erzeugt, aus den vier Spitzen, welche die letztere noch außer dem Selbstberührungspunkt besitzt.

Wird $a = b = c$, so wird für alle Strahlen der Kongruenz der Parameter $\lambda = 0$. Die Kongruenz reduziert sich auf die Strahlen eines Bündels, dessen Scheitel der Mittelpunkt ist. Wir haben so den ganz singulären Fall vor uns, der durch die Rotationen eines starren Körpers um einen festen Punkt geliefert wird.

Fünfzehntes Kapitel.

Schraubengewebe und Schraubengewinde.[1])

Die einfachste Form, welche die Gleichungen eines linearen Schraubensystems vierter Stufe oder, wie wir sagen wollen, eines Schraubengewebes in dem sogenannten allgemeinen Falle annehmen können, haben wir bereits in den Gleichungen (17) des zwölften Kapitels gegeben. Wir wollen diese Gleichungen jetzt, indem wir $-\alpha$, $-\beta$ an die Stelle von α, β bringen, schreiben wie folgt:

$$(1) \qquad \mathfrak{u} = \alpha\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = \beta\mathfrak{q}.$$

Die Spezialfälle, die sich nicht auf diese Gleichungsform zurückführen lassen, sind für uns von geringerem Interesse und können übergangen werden.

Wir schreiben den Parameter k einer beliebigen Schraube des Systems in der Form:

$$(2) \qquad k = \frac{\alpha\mathfrak{p}^2 + \beta\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2}.$$

Dann finden wir für die Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ der Achse dieser Schraube, bei Verwendung eines Proportionalitätsfaktors ϱ, die Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \varrho\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{y} = \varrho\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{z} = \varrho\mathfrak{r}, \\ \mathfrak{l} = \varrho(\alpha - k)\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{m} = \varrho(\beta - k)\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{n} = \varrho(\mathfrak{w} - k\mathfrak{r}). \end{cases}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen für $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ mit den Gleichungen für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ und subtrahieren sie, so ergibt sich:

$$\mathfrak{y}\mathfrak{l} - \mathfrak{x}\mathfrak{m} = (\alpha - \beta)\varrho\mathfrak{p} \cdot \varrho\mathfrak{q},$$

also:

$$(4) \qquad \mathfrak{y}\mathfrak{l} - \mathfrak{x}\mathfrak{m} = (\alpha - \beta)\mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Dies ist die Gleichung des quadratischen Linienkomplexes, dem die Achsen der das Schraubengewebe bildenden Schrauben angehören.[2]) Er wird besonders einfach, wenn $\alpha = \beta$, und besteht dann aus den Linien, deren kürzester Abstand von der z-Achse in die xy-Ebene fällt. Der Achsenkomplex ist allgemein derselbe für alle Schraubengewebe, deren Gleichungen von der Form sind:

$$(5) \qquad \mathfrak{u} = (\alpha - \varkappa)\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = (\beta - \varkappa)\mathfrak{q},$$

was auch der Wert von $\varkappa$ sei. Von diesen Schraubengeweben sagen wir wieder, daß sie eine syzygetische Schar bilden. Auch hier gilt die Regel, daß die Parameter von Schrauben mit derselben Achse, die

---

1) Zu diesem Kapitel vgl. Chap. XVI und XVII in Balls Theory of Screws.

2) Vgl. d' Emilio, Atti del R. Istituto Veneto (6) Vol. 3 (1885) p. 1135.

zu zwei Schraubensystemen aus der syzygetischen Schar gehören sich nur um eine additive Konstante unterscheiden. Suchen wir nämlich eine Zuordnung von zwei syzygetischen Schraubengeweben, bei der sich die Parameter zweier zugeordneten Schrauben immer um dieselbe Größe $\varkappa$ unterscheiden, so haben wir von den Koordinaten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ einer Schraube des ersten Gewebes die drei ersten ungeändert zu lassen und die letzten drei durch $\mathfrak{u} - \varkappa\mathfrak{p}$, $\mathfrak{v} - \varkappa\mathfrak{q}$, $\mathfrak{w} - \varkappa\mathfrak{r}$ zu ersetzen, um zu der entsprechenden Schraube des zweiten Gewebes überzugehen. Die Parameter zweier entsprechenden Schrauben in den beiden Geweben sind dann k und $k - \varkappa$, und die Gleichungen (1) des ersten Systems gehen in die Gleichungen (5) des zweiten Systems über, also α, β in $\alpha - \varkappa$, $\beta - \varkappa$. Bei diesen Substitutionen bleiben aber die durch die Gleichungen (3) gegebenen Werte, d. h. die Koordinaten der Schraubenachse, ungeändert.

Die Gleichungen des linearen Systems, das die zu Schrauben des Schraubengewebes von bestimmtem Parameter k gehörenden Achsen bilden, findet man sofort aus (3) in der Form:

$$\mathfrak{l} = (\alpha - k)\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{m} = (\beta - k)\mathfrak{y}. \tag{6}$$

Dies System ist, wie wir schon wissen, eine lineare Strahlenkongruenz, deren Leitlinien zwei konjugierte Strahlen eines bestimmten Zylindroids sind. Wollen wir dies noch einmal bestätigen, so legen wir die Koordinaten ($\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}', \mathfrak{l}', \mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$) der Leitlinien durch die Bedingung fest, daß sie alle Strahlen der Kongruenz, d. h. alle Linien, deren Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ den Gleichungen (6) genügen, schneiden sollen. Soll aber die Bedingung des Schneidens:

$$\mathfrak{l}\mathfrak{x}' + \mathfrak{m}\mathfrak{y}' + \mathfrak{n}\mathfrak{z}' + \mathfrak{x}\mathfrak{l}' + \mathfrak{y}\mathfrak{m}' + \mathfrak{z}\mathfrak{n}' = 0 \tag{7}$$

für alle Lösungen der Gleichungen (6) erfüllt sein, so müssen die vier Gleichungen bestehen:

$$(\alpha - k)\mathfrak{x}' + \mathfrak{l}' = 0, \quad (\beta - k)\mathfrak{y}' + \mathfrak{m}' = 0, \quad \mathfrak{z}' = 0, \quad \mathfrak{n}' = 0. \tag{8}$$

Die letzten beiden drücken aus, daß die Leitlinie die z-Achse unter rechtem Winkel trifft. Mit Rücksicht auf sie kann man für die übrigen vier Koordinaten setzen:

$$\mathfrak{x}' : \mathfrak{y}' : \mathfrak{l}' : \mathfrak{m}' = x : y : -yz : xz, \tag{8a}$$

wobei x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Leitlinie bedeuten, und damit gehen die ersten beiden Gleichungen in die folgenden über:

$$(\alpha - k)x - zy = 0, \quad (\beta - k)y + zx = 0, \tag{9}$$

die sich in der Tat auf zwei konjugierte Regelstrahlen eines Zylindroids beziehen. Dessen Gleichung lautet dann:

$$z = (\alpha - \beta)\frac{xy}{x^2 + y^2}. \tag{10}$$

Die Linien, welche zwei konjugierte Regelstrahlen eines Zylindroids treffen, schneiden aber, wie wir bereits gefunden haben, einen dritten Regelstrahl desselben unter rechtem Winkel. Der quadratische Achsenkomplex besteht also auch aus den unendlich vielen linearen Kongruenzen der Strahlen, die jedesmal einen Regelstrahl des Zylindroids senkrecht treffen. Dies läßt sich auch leicht analytisch bestätigen. Denkt man sich den Regelstrahl des Zylindroids gegeben durch die Proportion (8a) zusammen mit: $\mathfrak{z}' = 0$, $\mathfrak{n}' = 0$, so wird die Gleichung (7), welche für eine diesen Regelstrahl schneidende Linie gilt:

$$\mathfrak{l}x + \mathfrak{m}y - \mathfrak{x}yz + \mathfrak{y}xz = 0,$$

und die Bedingung, daß die Linie außerdem zu dem Regelstrahl senkrecht ist, lautet:

$$\text{(11a)} \qquad \mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y = 0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man die vorige umformen in:

$$y(\mathfrak{l}x + \mathfrak{m}y) = z(x^2 + y^2)\mathfrak{x}$$

oder mit Rücksicht auf (10):

$$\text{(11b)} \qquad \mathfrak{l}x + \mathfrak{m}y = (\alpha - \beta)x\mathfrak{x}.$$

Führen wir in die so gefundenen Gleichungen (11a) und (11b) noch ein:

$$\frac{y}{x} = \varrho,$$

so werden sie:

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{x} + \varrho\mathfrak{y} = 0, \quad \mathfrak{l} + \varrho\mathfrak{m} = (\alpha - \beta)\mathfrak{x}.$$

Durch Elimination von ϱ entsteht wieder die Gleichung (4) des quadratischen Komplexes. Dieser Komplex erscheint so auf doppelte Weise in lineare Kongruenzen zerlegt. Die eine Zerlegung wird durch die Gleichungen (6), die andere durch die Gleichungen (11) gegeben. Zwei Kongruenzen, die zu derselben Zerlegung gehören, haben immer dieselben zwei geraden Linien, nämlich die Doppellinie des Zylindroids und die unendlich ferne Leitlinie desselben, gemeinsam. In der Tat sind sowohl die Gleichungen (6) für zwei verschiedene Werte von k und die Gleichungen (11) für zwei verschiedene Werte von ϱ nur zu befriedigen, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m} = 0$ angenommen werden. Daraus folgt aber, da zwischen den Koordinaten die identische Beziehung $\mathfrak{l}\mathfrak{x} + \mathfrak{m}\mathfrak{y} + \mathfrak{n}\mathfrak{z} = 0$ besteht, entweder $\mathfrak{n} = 0$ oder $\mathfrak{z} = 0$, so daß nur eine Koordinate, entweder $\mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{n}$ von Null verschieden bleibt. Im ersteren Falle erhalten wir die z-Achse, im letzteren die unendlich ferne gerade Linie der xy-Ebene. Zwei Kongruenzen, die zu verschiedenen Zerlegungen gehören, haben dagegen immer die eine Regelschar einer Regelfläche zweiter Ordnung gemein. In der

Tat ist eine von den vier Gleichungen (6) und (11) eine Folge der übrigen drei, diese drei Gleichungen stellen aber, wenn man in ihnen k und ϱ als fest gegeben ansieht, eine solche Regelschar dar.

Wir fragen nun nach den Strahlen des Achsenkomplexes, die durch einen beliebig gegebenen Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 hindurchgehen. Wir finden sofort die Darstellung des Kegels zweiter Ordnung, den diese Strahlen erfüllen, indem wir in die Gleichung des Komplexes einsetzen:

$$\mathfrak{l} = y_0\mathfrak{z} - z_0\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{m} = z_0\mathfrak{x} - x_0\mathfrak{z}$$

und ferner:

$$\mathfrak{x} = x - x_0, \quad \mathfrak{y} = y - y_0, \quad \mathfrak{z} = z - z_0.$$

Dann ergibt sich:

$$(12) \qquad \begin{aligned} &(y_0 z - z_0 y)(y - y_0) - (z_0 x - x_0 z)(x - x_0) \\ &\qquad = (\alpha - \beta)(x - x_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

als Gleichung des Kegels.

Wir können diesen Kegel aber auch geometrisch ableiten. Wir finden nämlich die Komplexstrahlen, die durch einen Punkt P_0 gehen, indem wir aus diesem Punkte auf die Regelstrahlen des Zylindroids die Lote fällen. Die Fußpunkte dieser Lote bekommen wir aber, indem wir die Regelstrahlen des Zylindroids mit den zu ihnen normalen Ebenen, die durch P_0 gehen, zum Schnitt bringen. Ist nun ein Regelstrahl durch die Gleichungen:

$$x : y = \cos\varphi : \sin\varphi, \quad z = (\alpha - \beta)\cos\varphi\sin\varphi$$

festgelegt, so wird die Gleichung dieser Normalebene:

$$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi = 0,$$

und daraus folgt für die Koordinaten des Schnittpunktes:

$$(13) \qquad \begin{cases} x = (x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi)\cos\varphi, \\ y = (x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi)\sin\varphi, \\ z = (\alpha - \beta)\cos\varphi\sin\varphi. \end{cases}$$

Dies ist, wie man durch Vergleichung dieser Gleichungen mit den Gleichungen (24) des 13. Kapitels sehen kann, die Parameterdarstellung eines Kegelschnittes $\varkappa$ auf dem Zylindroid. Die Ebene, in der er liegt, hat die Gleichung:

$$(14) \qquad y_0 x + x_0 y - \frac{x_0^2 + y_0^2}{\alpha - \beta} z = x_0 y_0.$$

Da in dieser Gleichung z_0 nicht vorkommt, ist der Kegelschnitt derselbe für alle Punkte einer Parallelen p zur z-Achse, d. h. zur Doppellinie des Zylindroids. In der Tat hatten wir bereits in Kap. 13

hervorgehoben, daß die Fußpunkte der auf die Regelstrahlen des Zylindroids gefällten Lote dieselben bleiben, von welchem Punkte der Parallelen zur Doppellinie man sie auch ausgehen läßt. Unter diesen Punkten der Parallelen zur Doppellinie ist ein Punkt P_1, der auf dem Zylindroid liegt. Seine Ordinate ist:

$$z_1 = (\alpha - \beta)\frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Führt man diesen Wert in die Gleichung (14) ein, so läßt sie sich auf die einfache Form bringen:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} - \frac{z}{z_1} = 1, \tag{15}$$

welche zeigt, daß die von der Ebene auf den Koordinatenachsen abgeschnittenen Stücke der Reihe nach x_0, y_0, $-z_1$ sind.

Der Kegelschnitt geht durch den Punkt P_1, in dem die Parallele zur Doppellinie das Zylindroid trifft, hindurch. In der Tat ergeben, wenn man:

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

setzt, die Gleichungen (13):

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_1.$$

Die Kegel, welche den Kegelschnitt $\varkappa$ aus den Punkten der Parallelen p zur Doppellinie projizieren, berühren sich deswegen längs dieser Parallelen p und besitzen außer derselben und dem Kegelschnitte $\varkappa$ keinen gemeinsamen Punkt. Die Seitenlinien aller dieser Kegel bilden zusammen eine Kongruenz erster Ordnung zweiter Klasse, die zu dem quadratischen Achsenkomplex gehört. Denn durch jeden Punkt des Raumes geht ein Strahl, welcher die Linie p und den Kegelschnitt $\varkappa$ trifft, und in einer beliebigen Ebene liegen deren zwei. Zusammenfassend können wir sagen: Alle Strahlen des Achsenkomplexes, die eine Parallele zur Doppellinie des Zylindroids treffen, treffen auch einen Kegelschnitt, der auf dem Zylindroid liegt und die Parallele zur Doppellinie schneidet, und sie bilden eine Kongruenz erster Ordnung zweiter Klasse. Läßt man die Parallele eine Ebene durchstreichen, so erschöpfen die zugehörigen Strahlenkongruenzen den ganzen Achsenkomplex.

Nun suchen wir die Komplexstrahlen, die in einer beliebigen Ebene π liegen. Die Ebene sei durch die Gleichung gegeben:

$$Ux + Vy + Wz = 1, \tag{16}$$

außerdem habe die Projektion des Komplexstrahls auf die xy-Ebene die Gleichung:

$$ux + vy = 1. \tag{17}$$

Sind dann $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ die Koordinaten des Strahles, so wird zunächst, wenn wir die vorstehende Gleichung mit $\mathfrak{y}x - \mathfrak{x}y = \mathfrak{n}$ identifizieren:

$$(18) \qquad u = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{n}}, \quad v = -\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{n}}.$$

Ferner folgt aber daraus, daß der Strahl in der durch (16) gegebenen Ebene π liegen soll (S. 93):

$$\mathfrak{x} = W\mathfrak{m} - V\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{y} = U\mathfrak{n} - W\mathfrak{l},$$

oder, wenn wir die Werte (18) einsetzen:

$$(18\text{a}) \qquad W\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}} = V - v, \quad W\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{n}} = U - u.$$

Führen wir die Ausdrücke (18) und (18a) in die Gleichung (4) des Komplexes ein, so wird sie:

$$(19) \qquad u(u - U) + v(v - V) = (\alpha - \beta)Wuv.$$

Dies ist die Tangentialgleichung für die Projektion der von den gesuchten Komplexstrahlen umhüllten Kurve auf die xy-Ebene. Diese Projektion ist, da die Gleichung in u und v vom zweiten Grade und für $u = 0$, $v = 0$ erfüllt ist, eine Parabel. Also ist auch die Komplexkurve in der Ebene π eine Parabel.

Es muß aber jeder Komplexstrahl, der in dieser Ebene liegt, auf einem Strahl des Zylindroids in seinem Schnittpunkte mit der Ebene senkrecht stehen. Man erhält also die Komplexkurve und gleichzeitig ihre Projektion auf die xy-Ebene, indem man zu jedem Strahl des Zylindroids die Normalebene durch seinen Schnittpunkt mit der Ebene π legt. Diese Normalebenen umhüllen die Komplexkurve und gleichzeitig ihre Projektion. In jeder Ebene, die zur z-Achse parallel ist, ist außer dem Büschel der Parallelen zur z-Achse ein gewöhnliches Büschel von Komplexstrahlen enthalten, dessen Scheitel der Schnittpunkt der Ebene mit dem zu ihr senkrechten Regelstrahl des Zylindroids ist.

Wir wollen jetzt versuchen, die Schrauben des Schraubengewebes in eindeutige Beziehung zu den Punkten zu setzen, mit anderen Worten, das Schraubengewebe auf den Punktraum abzubilden. Nennen wir X, Y, Z die Koordinaten eines Punktes in diesem Punktraum, so ergibt sich die gesuchte Beziehung am einfachsten und ungezwungensten, wenn wir:

$$(20) \qquad X = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{w}}, \quad Y = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{w}}, \quad Z = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{w}}$$

machen. Durch die Verhältnisse der vier Größen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{w}$ ist eine Schraube im Schraubengewebe vollkommen festgelegt, es findet also in der Tat die wechselweise eindeutige Beziehung zwischen den

Schrauben des Schraubengewebes und den Punkten des Bildraumes statt.

Der Koordinatenursprung $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, den wir als den Mittelpunkt O des Bildraumes bezeichnen wollen, entspricht der einen in dem Schraubengewebe enthaltenen singulären Schraube, für die $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r} = 0$ werden und die sich auf eine einfache Richtung, nämlich die Richtung einer Translation, reduziert. Dem Schraubennetze, das durch die Gleichung $\mathfrak{w} = 0$ aus dem Schraubengewebe herausgehoben wird, entsprechen die unendlich fernen Punkte des Bildraumes.

Für den Parameter k einer Schraube des Gewebes gilt die Gleichung (2), die wir schreiben können:

$$(k-\alpha)\mathfrak{p}^2 + (k-\beta)\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}(k\mathfrak{r} - \mathfrak{w}) = 0.$$

Führen wir hierin die Koordinaten des Bildpunktes ein, so erhalten wir:

$$(21) \qquad (k-\alpha)X^2 + (k-\beta)Y^2 + kZ^2 = Z,$$

also die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, die durch den Mittelpunkt des Bildraumes hindurchgeht und in ihm die XY-Ebene berührt, von der ferner eine Hauptachse in die Z-Achse fällt, während ihre anderen beiden Hauptachsen der X- und Y-Achse parallel sind. Diese Fläche wird erfüllt von den Bildpunkten der Schrauben des Gewebes, deren Parameter k ist. Wir wollen jede solche Fläche eine Parameterfläche des Bildraumes nennen. Alle Parameterflächen insgesamt bilden ein Flächenbüschel, durch jeden Punkt des Raumes geht eine von ihnen. Unter ihnen sind zwei Zylinder enthalten, die man für $k=\alpha$ und $k=\beta$ bekommt, und ein Paraboloid, das sich für $k=0$ ergibt, dessen Gleichung also lautet:

$$(22) \qquad \alpha X^2 + \beta Y^2 + Z = 0.$$

Die Punkte dieses Paraboloids entsprechen den unter den Schrauben des Gewebes enthaltenen Nullschrauben oder einfachen Linien. Dieses Paraboloid nennen wir die Nullfläche des Bildraumes.

Zwei Schrauben sind korreziprok, wenn ihre Koordinaten der Bedingung genügen:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{u}' + \mathfrak{q}\mathfrak{v}' + \mathfrak{r}\mathfrak{w}' + \mathfrak{u}\mathfrak{p}' + \mathfrak{v}\mathfrak{q}' + \mathfrak{w}\mathfrak{r}' = 0.$$

Gehören die beiden Schrauben dem Schraubengewebe an, so wird $\mathfrak{u} = \alpha\mathfrak{p}$, $\mathfrak{v} = \beta\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{u}' = \alpha\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{v}' = \beta\mathfrak{q}'$, damit wird die vorstehende Gleichung:

$$\alpha\mathfrak{p}\mathfrak{p}' + \beta\mathfrak{q}\mathfrak{q}' + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{r}\mathfrak{w}' + \mathfrak{w}\mathfrak{r}') = 0.$$

Führen wir die Koordinaten X, Y, Z und X', Y', Z' der Bildpunkte dieser Schrauben ein, so entsteht aus der letzten Gleichung:

$$(23) \qquad \alpha XX' + \beta YY' + \tfrac{1}{2}(Z+Z') = 0.$$

Dies bedeutet aber: Die Bildpunkte zweier korreziproken Schrauben des Gewebes sind einander bezüglich der Nullfläche konjugiert.

Die Schrauben des Gewebes, die zu einer bestimmten Schraube desselben korreziprok sind, bilden ein Schraubennetz, und so kann man zu allen in dem Gewebe enthaltenen Netzen gelangen. Die Bildpunkte dieser Schrauben müssen aber zu dem Bildpunkte der korreziproken Schraube konjugiert sein bezüglich der Nullfläche, sie müssen also die Polarebene dieses Bildpunktes erfüllen, und so sehen wir gleichzeitig: Die Schrauben eines in dem Schraubengewebe enthaltenen Netzes werden durch die Punkte einer Ebene abgebildet. Daraus folgt weiter: Den Schrauben einer Schraubenreihe in dem Schraubengewebe entsprechen die Punkte einer geraden Linie. Irgend zwei Netze, die zu dem Gewebe gehören, haben immer eine solche Schraubenreihe gemein, weil sie zusammen vier lineare Gleichungen zwischen den Schraubenkoordinaten bedingen.

Es ist nun von Interesse, insbesondere nach den Schraubenreihen in dem Schraubengewebe zu fragen, die durch die Regelstrahlen einer Parameterfläche abgebildet werden. Die Antwort ist sofort gefunden. Erstens nämlich müssen die Achsen der Schrauben einer solchen Reihe, als Achsen von Schrauben gleichen Parameters, zwei konjugierte Regelstrahlen des Zylindroids, das zu dem Schraubengewebe gehört, treffen. Zweitens aber müssen sie, wie die Achsen einer jeden solchen Schraubenreihe, ein Büschel bilden. Sie müssen also ein Büschel bilden, dessen Scheitel auf dem einen der konjugierten Strahlen liegt und dessen Ebene durch den anderen Strahl hindurchgeht. Die Scheitel der Strahlenbüschel, die zwei Regelstrahlen aus verschiedenen Regelscharen der Parameterfläche entsprechen, müssen auf verschiedenen Leitlinien liegen, denn die beiden Regelstrahlen haben einen Punkt gemein, und folglich müssen auch die beiden Strahlenbüschel einen Strahl gemein haben. So gelangen wir zu einer Abbildung der Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz durch die Punkte einer Fläche zweiter Ordnung. Den Strahlenbüscheln in der Kongruenz, welche die Punkte der einen Leitlinie aus je einem Punkte der anderen Leitlinie projizieren, entsprechen hierbei die Regelstrahlen der einen Regelschar auf der Fläche zweiter Ordnung und ebenso den Strahlenbüscheln, welche aus je einem Punkte der ersten Leitlinie die Punkte der zweiten projizieren, die Strahlen der anderen Regelschar.

Halten wir die Gleichung:

$$(k-\alpha)x^2 + (k-\beta)y^2 = 0,$$

die aus den Formeln (9) folgt und sich auffassen läßt als die Gleichung eines Paares von geraden Linien, die in der xy-Ebene parallel zu den Leitlinien der Strahlenkongruenz gezogen sind, zusammen mit der Gleichung:

$$(k-\alpha)X^2+(k-\beta)Y^2=0,$$

die für $Z=0$ aus (21) folgt und das Paar der Regelstrahlen darstellt, welche die Regelfläche mit der XY-Ebene gemein hat, so sieht man, daß die Regelstrahlen der Regelfläche, die durch den Mittelpunkt O des Bildraumes gehen, parallel sind zu den Leitlinien der Strahlenkongruenz, gleiche Orientierung der Koordinatenachsen im Bildraum und im Raume der Schrauben vorausgesetzt. Nach den Gleichungen (20) ist aber der Radiusvektor, den man vom Punkte O nach einem Bildpunkte zieht, der Achse der zugehörigen Schraube parallel. Die Abbildung der Strahlenkongruenz auf die Regelfläche geschieht also einfach so, daß wir zu jedem Strahle der Kongruenz die Parallele durch den Punkt O ziehen. Diese schneidet den zugehörigen Bildpunkt aus der Fläche aus.

Hinzuzufügen ist noch, daß wir eine geradlinige Fläche und reelle Leitstrahlen der Kongruenz nur bekommen, wenn der Wert von k zwischen den Werten von α und β liegt. Die Regel für die Abbildung der Strahlenkongruenz auf die Fläche läßt sich aber auch auf die anderen Fälle ausdehnen.

Über die linearen Schraubensysteme fünfter Stufe oder, wie wir sie nennen wollen, Schraubengewinde genügen wenige Bemerkungen, die sich wieder auf den Hauptfall beschränken.

Jedes Schraubengewinde ist zu einer bestimmten Schraube korreziprok. Die Achse dieser Schraube bezeichnen wir als die Zentralachse des Schraubengewindes. Legen wir die z-Achse des Koordinatensystems in sie hinein, so werden die Koordinaten der festen Schraube von der Form:

$$\mathfrak{p}'=0,\quad \mathfrak{q}'=0,\quad \mathfrak{r}'=1,\quad \mathfrak{u}'=0,\quad \mathfrak{v}'=0,\quad \mathfrak{w}'=-\alpha.$$

Damit eine Schraube zu dieser korreziprok sei, muß zwischen ihren Koordinaten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Beziehung stattfinden:

$$\mathfrak{u}=\alpha\mathfrak{p}. \tag{24}$$

Jede gerade Linie des Raumes ist jetzt Achse einer Schraube des Systems. Den Parameter k, der ihr zuzuordnen ist, finden wir leicht, wenn wir den Winkel φ einführen, unter dem die gerade Linie die Zentralachse kreuzt, und ihren kürzesten Abstand d von derselben. Da die Konkurrenz der Schraube des Gewindes und der zu diesem korreziproken Schraube verschwinden muß, ergibt sich sofort die Gleichung:

$$(k-\alpha)\cos\varphi+d\sin\varphi=0$$

und hieraus:

$$(25) \qquad k = \alpha - d \operatorname{tang} \varphi.$$

Setzen wir:

$$(26) \qquad d \operatorname{tang} \varphi = -\varkappa,$$

so wird also einfach:

$$(25\text{a}) \qquad k = \alpha + \varkappa.$$

Für die Schrauben des Gewindes, für die k einen bestimmten Wert hat, nimmt mithin auch $\varkappa$ einen bestimmten Wert an. Da die Achsen dieser Schrauben also der Bedingung $d \cdot \operatorname{tang} \varphi = \text{const.}$ genügen, bilden sie einen linearen Strahlenkomplex; dieser gehört zu einer Schraube mit dem Parameter $\varkappa$, deren Achse mit der Zentralachse des Schraubengewindes zusammenfällt.

Suchen wir in dem Schraubengewinde die Schrauben, die zu einer bestimmten Schraube desselben korreziprok sind, so muß wieder eine Beziehung:

$$(27) \qquad (k_0 + k) \cos \varphi' + d' \sin \varphi' = 0$$

bestehen, wenn k_0, k die Parameter der beiden Schrauben, der festen und der veränderlichen, bedeuten, φ' den Winkel, unter dem ihre Achsen sich kreuzen, und d' den kürzesten Abstand der Achsen. Wir setzen nun den Wert von k aus (25) ein und finden:

$$(28) \qquad d \cdot \operatorname{tang} \varphi - d' \cdot \operatorname{tang} \varphi' = \alpha + k_0.$$

Diese Gleichung gestattet aber eine beachtenswerte Deutung. Es bilden nämlich die Schrauben des Gewindes, die zu einer bestimmten Schraube desselben korreziprok sind, ein allgemeines Schraubengewebe. Dieses Schraubengewebe erscheint hier festgelegt durch zwei Schrauben, die zu ihm und zueinander korreziprok sind. (Die erste dieser Schrauben ist diejenige, zu der alle Schrauben des Gewindes korreziprok sind, die zweite die in dem letzteren angenommene feste Schraube.) Die Achsen aller Schrauben des Gewebes aber bilden einen speziellen quadratischen Strahlenkomplex, den wir im vorhergehenden bereits untersucht haben. Die Gleichung (28) zeigt nun, wie sich dieser Strahlenkomplex mit Hilfe zweier fester Achsen einfach festlegen läßt. Wir können den Ausdruck $d \cdot \operatorname{tang} \varphi$ kurz die D i v e r g e n z der zwei geraden Linien, auf die sich d und φ beziehen, nennen. Ist dann die Divergenz einer veränderlichen Linie von einer festen Linie konstant, so bewegt sich die veränderliche Linie in einem linearen Strahlenkomplex; ist aber der Unterschied ihrer Divergenzen von zwei festen Linien konstant, so erfüllt sie einen quadratischen Strahlenkomplex der betrachteten Art.

Nachdem wir die Übersicht der linearen Schraubensysteme beendet haben, bietet sich der Gedanke dar, ob die Begriffe der Schraubung und der Dyname, als die Begriffe, die zur Definition der Schraube den Anlaß geben und so der Schraubentheorie zugrunde liegen, nicht einer gewissen Verallgemeinerung fähig sind. Die Richtung, nach der hin wir diese Verallgemeinerung zu suchen haben, liegt auf der Hand. Die Verschiebungen, die ein beliebiger Punkt bei einer bestimmten Schraubung erfährt, sind lineare Funktionen seiner Koordinaten, aber nicht allgemeine lineare Funktionen, denn wenn wir den allgemeinsten Ansatz aufstellen, der in diesem Sinne für die Änderungen δx, δy, δz der Koordinaten x, y, z eines Punktes, verglichen mit einer sehr kleinen Größe $\tau = \delta t$, möglich ist, nämlich:

$$\begin{aligned}\delta x &= (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)\,\delta t,\\ \delta y &= (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)\,\delta t,\\ \delta z &= (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z)\,\delta t,\end{aligned}$$

so wird hieraus erst eine Schraubung, wenn:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0, \quad \alpha_2 = -\beta_1, \quad \gamma_1 = -\alpha_3, \quad \beta_3 = -\gamma_2$$

ist. Man muß sich also fragen, welchen Sinn die allgemeineren Gleichungen, aus denen in einem besonderen Falle die Schraubungen hervorgehen, für sich betrachtet haben.

Ebenso war die zu einem Kräftesystem gehörende Dyname festgelegt durch die sechs Summenausdrücke, welche aus den Komponenten $X_\varrho, Y_\varrho, Z_\varrho$ der Kräfte und den Koordinaten $x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho$ ihrer Angriffspunkte gebildet sind, nämlich:

$$\Sigma X_\varrho,\ \Sigma Y_\varrho,\ \Sigma Z_\varrho,\ \Sigma(Z_\varrho y_\varrho - Y_\varrho z_\varrho),\ \Sigma(X_\varrho z_\varrho - Z_\varrho x_\varrho),\ \Sigma(Y_\varrho x_\varrho - X_\varrho y_\varrho).$$

Diese Summen liegen aber von vornherein ferner als die folgenden einfachen Kombinationen von Kräftekomponenten und Punktkoordinaten:

$$\begin{matrix}\Sigma X_\varrho, & \Sigma X_\varrho x_\varrho, & \Sigma X_\varrho y_\varrho, & \Sigma X_\varrho z_\varrho,\\ \Sigma Y_\varrho, & \Sigma Y_\varrho x_\varrho, & \Sigma Y_\varrho y_\varrho, & \Sigma Y_\varrho z_\varrho,\\ \Sigma Z_\varrho, & \Sigma Z_\varrho x_\varrho, & \Sigma Z_\varrho y_\varrho, & \Sigma Z_\varrho z_\varrho,\end{matrix}$$

aus denen die ersteren Summen nur eine besondere Auswahl und Zusammenfassung bedeuten. Wieder ist die Frage, welche selbständige Bedeutung dem System dieser zwölf Summenausdrücke zukommt, und diesen Fragen wollen wir im folgenden nachgehen.

Sechzehntes Kapitel.

Deformationen.

Wir haben bereits im dritten Kapitel mit linearen Transformationen des Raumes zu tun gehabt. Diese Transformationen sind dadurch gekennzeichnet, daß jeder Punkt in einen bestimmten anderen Punkt übergeht und jeder Punkt nur aus einem einzigen Punkte hervorgeht, daß ferner die Punkte einer Ebene immer wieder in die Punkte einer Ebene übergeführt werden und daß endlich alle unendlich fernen Punkte in unendlicher Entfernung bleiben. Die letzte Bedingung läßt sich auch so formulieren, daß parallele Linien oder Ebenen immer wieder in parallele Linien oder Ebenen übergehen sollen. Aus dieser Eigenschaft aber läßt sich folgern, daß das Abstandsverhältnis dreier Punkte einer geraden Linie vor und nach der Transformation dasselbe sein muß, ferner daß einem Parallelepipedon wieder ein Parallelepipedon entsprechen muß, und wenn man die Kanten des ersten Parallelepipedon in einem bestimmten Verhältnis vergrößert, auch die entsprechenden Kanten des anderen in demselben Verhältnis vergrößert erscheinen. Wenn wir für das erste Parallelepipedon einen Würfel von der Kantenlänge 1 wählen, von dem drei Kanten in die Koordinatenachsen fallen, so gelangen wir auf Grund der vorstehenden Sätze sofort zu der analytischen Darstellung der Transformation. Es ergeben sich, wenn x, y, z die Koordinaten des ursprünglichen Punktes sind, die Koordinaten x', y', z' des transformierten Punktes als ganze lineare Funktionen von x, y, z. Damit werden die Differenzen $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ ebenfalls lineare Funktionen von x, y, z. Diese Differenzen sind aber die Komponenten der Verschiebung, welche der Punkt bei der Transformation erfährt. Wir wollen diese Verschiebung für alle im Endlichen gelegenen Punkte als sehr klein voraussetzen und demgemäß schreiben:

$$(1) \qquad x' - x = u\tau, \quad y' - y = v\tau, \quad z' - z = w\tau,$$

wobei τ wieder eine sehr kleine Größe bezeichnen soll. Wir setzen nun nicht $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, sondern die ihnen proportionalen Größen u, v, w als lineare Funktionen der Punktkoordinaten an in der Form:

$$(2) \qquad \begin{cases} u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ v = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ w = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{cases}$$

Die durch diese Gleichungen dargestellte Veränderung der Punkte des Raumes bezeichnen wir als eine lineare Deformation oder kurz als eine Deformation.

Nehmen wir nun von der Verschiebung eines beliebigen Punktes die Komponente nach einer bestimmten Richtung, die mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν einschließen soll, so erhalten wir für die Größe $\varrho \cdot \tau$ dieser Komponente, wenn wir die Ausdrücke für u, v, w der Reihe nach mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ multiplizieren und addieren:

$$\varrho = \theta + \xi x + \eta y + \zeta z, \tag{3}$$

indem wir zur Abkürzung setzen:

$$\begin{aligned}
\theta &= \alpha_0 \cos\lambda + \beta_0 \cos\mu + \gamma_0 \cos\nu,\\
\xi &= \alpha_1 \cos\lambda + \beta_1 \cos\mu + \gamma_1 \cos\nu,\\
\eta &= \alpha_2 \cos\lambda + \beta_2 \cos\mu + \gamma_2 \cos\nu,\\
\zeta &= \alpha_3 \cos\lambda + \beta_3 \cos\mu + \gamma_3 \cos\nu.
\end{aligned}$$

Nimmt man für jeden Punkt nicht die wirkliche Verschiebung, die er bei der gegebenen Deformation erfährt, sondern nur die in Rede stehende Komponente davon, so ergibt sich auf diese Weise eine neue, spezielle Deformation, welche wir als die Komponente der vorgelegten Transformation nach der betreffenden Richtung bezeichnen und durch die Gleichungen darstellen:

$$\left\{\begin{aligned}
u_\varrho &= \cos\lambda\,(\theta + \xi x + \eta y + \zeta z),\\
v_\varrho &= \cos\mu\,(\theta + \xi x + \eta y + \zeta z),\\
w_\varrho &= \cos\nu\,(\theta + \xi x + \eta y + \zeta z).
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Bei dieser speziellen Deformation sind die Verschiebungsrichtungen aller Punkte dieselben. Die Punkte einer bestimmten Ebene, nämlich der durch die Gleichung:

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \theta = 0 \tag{5}$$

dargestellten Ebene, bleiben unverrückt; wir nennen die Deformation deswegen eine planare und die Ebene, deren Punkte in Ruhe bleiben, ihre Zentralebene. Bezeichnen wir mit p den Abstand eines Punktes von der Zentralebene und setzen:

$$\omega = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \tag{6}$$

so wird die durch die Gleichung (3) gegebene Größe der Verschiebung dieses Punktes:

$$\varrho = \omega \cdot p, \tag{7}$$

also dem Abstande des Punktes von der Zentralebene proportional.

Wir wollen noch zwei Sonderfälle dieser speziellen Deformationen hervorheben. Der eine Fall ist der, wo die Verschiebungsrichtung aller Punkte senkrecht zur Zentralebene ist, dann sprechen wir von einer Dehnung. Der andere Fall ist der, wo diese Richtung parallel zur Zentralebene ist, dann sprechen wir von einer Scherung.

Wir diskutieren nun die allgemeine, durch die Gleichungen (2) gegebene Deformation. Diese Diskussion beruht zunächst auf der Aufstellung der Determinante:

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

die wir als die Diskriminante der Deformation bezeichnen. Wenn nämlich diese Diskriminante von Null verschieden ist, so ergibt sich, daß die drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0, \\ \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = 0, \\ \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = 0 \end{cases} \tag{9}$$

ein einziges Lösungssystem x, y, z, das wir mit x_0, y_0, z_0 bezeichnen, zulassen. Es gibt also einen einzigen Punkt, dessen Lage bei der Deformation ungeändert bleibt. Diesen Punkt nennen wir das Zentrum der Deformation und die Deformation selbst eine zentrale. Wählen wir das Zentrum zum Ursprung eines neuen Koordinatensystems, so verschwinden aus den Gleichungen der Deformation die konstanten Glieder $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$.

Ist aber die Diskriminante $\mathfrak{D} = 0$, ohne daß von den folgenden drei Determinanten eine verschwindet:

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_1 = \alpha_0(\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + \beta_0(\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3) + \gamma_0(\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3), \\ \mathfrak{D}_2 = \alpha_0(\beta_3\gamma_1 - \gamma_3\beta_1) + \beta_0(\gamma_3\alpha_1 - \alpha_3\gamma_1) + \gamma_0(\alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1), \\ \mathfrak{D}_3 = \alpha_0(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) + \beta_0(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) + \gamma_0(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2), \end{cases} \tag{10}$$

dann sind die Gleichungen (9) nicht zu befriedigen. In diesem Falle ergibt sich aber die identische Beziehung:

$$(\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3)u + (\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3)v + (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)w = \mathfrak{D}_1,$$

die von den zwei anderen auf ähnliche Weise folgenden Relationen nicht verschieden ist, so daß tatsächlich nur eine identische Beziehung zwischen den Verschiebungskomponenten u, v, w statthat. Bestimmen wir drei Richtungswinkel λ, μ, ν durch die Proportion:

$$\lambda : \mu : \nu = \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3 : \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3 : \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3,$$

so wird:

$$u \cos\lambda + v \cos\mu + w \cos\nu = \text{const.}$$

für alle Punkte des Raumes. Die Komponenten der Verschiebungen aller Punkte nach dieser Richtung sind also dieselben, und die Komponente der Deformation nach der in Rede stehenden Richtung wird eine einfache Translation. Eine solche Deformation können wir eine parabolische nennen. Zu diesen parabolischen Deformationen gehören die Schraubungen, da ja bei diesen die Komponente der Verschiebung nach der Richtung der Schraubenachse für alle Punkte dieselbe ist.

Wenn nun außer $\mathfrak{D}$ eine der Determinanten $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ verschwindet, so verschwinden alle drei, weil infolge der Bedingung $\mathfrak{D} = 0$ die in den Ausdrücken (10) für $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ eingeklammerten Größen einander proportional werden. Z. B. ergibt die Gleichung $\mathfrak{D} = 0$, wenn man sie in der Form schreibt:

$$\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + \beta_1(\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3) + \gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3) = 0,$$

zusammen mit der Identität:

$$\alpha_2(\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + \beta_2(\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3) + \gamma_2(\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3) = 0$$

die Proportion:

$$\begin{aligned} &\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3 : \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3 : \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3 \\ &\qquad = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 : \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2 : \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2. \end{aligned}$$

In diesem Falle erhält man, wenn man aus den Gleichungen (9) zwei der Koordinaten eliminiert, identisch Null. Von den drei Gleichungen ist also eine überzählig; jedes Wertesystem, das zweien von ihnen genügt, genügt auch der dritten. Durch die zwei Gleichungen wird aber eine gerade Linie dargestellt, und alle Punkte dieser Linie erfahren bei der Deformation keine Lagenänderung. Wir bezeichnen die Deformation deswegen als eine lineale. Die momentanen Rotationen sind solche lineale Deformationen, denn bei ihnen bleiben alle Punkte der Rotationsachse unverrückt.

Es können die Determinanten $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ auch dadurch verschwinden, daß die Unterdeterminanten von $\mathfrak{D}$ (d. h. die in den Ausdrücken (10) eingeklammerten Größen) verschwinden. Dann gilt das vorige nicht mehr. Wir können in diesem Falle aber setzen:

$$(11) \qquad \begin{cases} u = \alpha_0 + l\,(\xi x + \eta y + \zeta z), \\ v = \beta_0 + m(\xi x + \eta y + \zeta z), \\ w = \gamma_0 + n(\xi x + \eta y + \zeta z), \end{cases}$$

und erhalten somit:

$$u \cos\lambda + v \cos\mu + w \cos\nu = \alpha_0 \cos\lambda + \beta_0 \cos\mu + \gamma_0 \cos\nu,$$

wenn die Richtungswinkel λ, μ, ν nur der einen Bedingung:

$$l \cos\lambda + m \cos\mu + n \cos\nu = 0$$

unterworfen werden. Es reduzieren sich also die Komponenten der Deformation nach allen Richtungen, die einer bestimmten Ebene parallel sind, auf einfache Translationen. Wir können diese Deformationen als zweifach parabolische bezeichnen.

Wird in den Gleichungen (11) nun noch:

$$\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 = l : m : n,$$

so verschwinden auch von den Determinanten $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ alle Unterdeterminanten. Dann erhalten wir die Gleichungsformen:

$$(12) \qquad \begin{cases} u = l\,(\theta + \xi x + \eta y + \zeta z), \\ v = m(\theta + \xi x + \eta y + \zeta z), \\ w = n\,(\theta + \xi x + \eta y + \zeta z), \end{cases}$$

die eine planare Deformation repräsentieren.

Hinzuzufügen ist noch, daß, wenn von der Determinante $\mathfrak{D}$ alle Elemente verschwinden, die Gleichungen der Deformation einfach werden:

$$u = \alpha_0, \quad v = \beta_0, \quad w = \gamma_0$$

und eine Translation darstellen.

Wenn zwei Deformationen vorliegen, so kann man dieselben zu einer Deformation zusammensetzen, genau ebenso wie man die Schraubungen, die ja nur einen besonderen Fall der parabolischen Deformationen bilden, zusammensetzt. Die Verschiebungen, die ein beliebiger Punkt bei den beiden Deformationen erfährt, vereinigt man nach dem Parallelogrammgesetz und erhält so die Verschiebungen, welche die resultierende Deformation ausmachen. Sind aber $u_1\tau$, $v_1\tau$, $w_1\tau$ und $u_2\tau$, $v_2\tau$, $w_2\tau$ die Komponenten der zusammenzusetzenden Verschiebungen eines Punktes, so werden die Komponenten der resultierenden Verschiebung $(u_1 + u_2)\tau$, $(v_1 + v_2)\tau$, $(w_1 + w_2)\tau$. Man hat also wieder die Ausdrücke für die Verschiebungskomponenten einfach zu addieren, um die Komponenten der resultierenden Verschiebung zu erhalten. Nennen wir die Koeffizienten in den Deformationsgleichungen die Koordinaten der Deformation, so können wir demnach sagen: Deformationen werden zusammengesetzt, indem man ihre homologen Koordinaten addiert.

Wir können nun zunächst bemerken, daß sich die rechten Seiten der Deformationsgleichungen (2) in zwei Teile, einen konstanten und einen von Punkt zu Punkt veränderlichen, zerlegen lassen. Dem entspricht eine Zusammensetzung der Deformation aus einer Translation und einer Deformation, die wenigstens einen im Endlichen gelegenen Punkt, nämlich den Koordinatenursprung, ungeändert läßt. Da der Koordinatenursprung aber durchaus willkürlich ist, so kann man demnach jede Deformation durch Hinzufügung einer Translation auf eine Deformation zurückführen, die einen willkürlich wählbaren Punkt ungeändert läßt.

Lassen wir in den Gleichungen (2) die konstanten Glieder weg und führen die Koordinaten des veränderten Punktes durch die Beziehungen:

$$x' = x + u\tau, \quad y' = y + v\tau, \quad z' = z + w\tau \tag{13}$$

ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x' &= (1 + \alpha_1\tau)\cdot x + \alpha_2\tau\cdot y + \alpha_3\tau\cdot z, \\ y' &= \beta_1\tau\cdot x + (1 + \beta_2\tau)\cdot y + \beta_3\tau\cdot z, \\ z' &= \gamma_1\tau\cdot x + \gamma_2\tau\cdot y + (1 + \gamma_3\tau)\cdot z. \end{aligned}$$

Wir haben nun früher (S. 30) gefunden, daß bei einer solchen Transformation alle Volumina in demselben Verhältnis vergrößert oder vermindert werden. Dieses Vergrößerungsverhältnis wird gegeben durch die Determinante:

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 + \alpha_1\tau & \alpha_2\tau & \alpha_3\tau \\ \beta_1\tau & 1 + \beta_2\tau & \beta_3\tau \\ \gamma_1\tau & \gamma_2\tau & 1 + \gamma_3\tau \end{vmatrix}.$$

Rechnen wir diese Determinante aus und vernachlässigen die höheren Potenzen der sehr kleinen Größe τ gegen die erste, so ergibt sich:

$$\Theta = 1 + (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\tau,$$

und indem wir $\Theta = 1 + \delta\cdot\tau$ setzen, bezeichnen wir:

$$\delta = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 \tag{14}$$

als Dilatation. Durch Hinzufügung einer Translation zu der Deformation wird an alledem nichts geändert. Also gilt das Gesagte auch für die allgemeineren Deformationsgleichungen (2), in denen noch die Translationskomponenten α_0, β_0, γ_0 hinzugekommen sind.

Es ist nun von Vorteil, von den Deformationen nicht eine einfache Translation, sondern eine allgemeine Schraubung abzusondern, um sie dadurch auf eine besonders einfache Form zu reduzieren. Wir nehmen an, die Schraubung werde durch die Gleichungen gegeben:

$$u' = \mathrm{u} - \mathrm{r}y + \mathrm{q}z, \quad v' = \mathrm{v} - \mathrm{p}z + \mathrm{r}x, \quad w' = \mathrm{w} - \mathrm{q}x + \mathrm{p}y, \tag{15}$$

indem $u'\tau$, $v'\tau$, $w'\tau$ die Verschiebungskomponenten des Punktes mit den Koordinaten x, y, z bezeichnen. Dann wird die übrigbleibende Deformation durch die Gleichungen dargestellt:

$$\begin{aligned} u'' &= u - u' = (\alpha_0 - \mathrm{u}) + \alpha_1 x + (\alpha_2 + \mathrm{r})y + (\alpha_3 - \mathrm{q})z, \\ v'' &= v - v' = (\beta_0 - \mathrm{v}) + (\beta_1 - \mathrm{r})x + \beta_2 y + (\beta_3 + \mathrm{p})z, \\ w'' &= w - w' = (\gamma_0 - \mathrm{w}) + (\gamma_1 + \mathrm{q})x + (\gamma_2 - \mathrm{p})y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Nun wollen wir p, q, r so bestimmen, daß:

$$\beta_3 + \mathrm{p} = \gamma_2 - \mathrm{p}, \quad \gamma_1 + \mathrm{q} = \alpha_3 - \mathrm{q}, \quad \alpha_2 + \mathrm{r} = \beta_1 - \mathrm{r}$$

wird, dann ergibt sich:

$$(16) \quad \mathrm{p} = \tfrac{1}{2}(\gamma_2 - \beta_3), \quad \mathrm{q} = \tfrac{1}{2}(\alpha_3 - \gamma_1), \quad \mathrm{r} = \tfrac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_2).$$ [1]

Außerdem nehmen wir noch an, es sei:

$$(17) \quad \begin{cases} \mathrm{u} - \mathrm{r}y_0 + \mathrm{q}z_0 = \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 y_0 + \alpha_3 z_0, \\ \mathrm{v} - \mathrm{p}z_0 + \mathrm{r}x_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0 + \beta_3 z_0, \\ \mathrm{w} - \mathrm{q}x_0 + \mathrm{p}y_0 = \gamma_0 + \gamma_1 x_0 + \gamma_2 y_0 + \gamma_3 z_0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen drücken aus, daß von einem besonderen Punkt, dessen Koordinaten wir x_0, y_0, z_0 nennen, die Verrückung infolge der Schraubung dieselbe sein soll wie die Verrückung bei der Deformation. Durch die Gleichungen (16) und (17) sind die Größen p, q, r, u, v, w, welche die Schraubung festlegen, eindeutig bestimmt. Die Koordinaten x_0, y_0, z_0 bleiben hierbei willkürlich wählbar, und hiernach können (bei Ausschließung eines Ausnahmefalles) die Größen u, v, w alle möglichen Werte annehmen, während die Werte von p, q, r immer dieselben sind. Von der Schraubung ist also die Richtung der Achse und die Winkelgeschwindigkeit von vornherein auf die angegebene Weise eindeutig bestimmt.

Wenn wir jetzt die übersichtlicheren Bezeichnungen einführen:

$$(18) \quad \begin{cases} \alpha_1 = a_{11}, \quad \beta_2 = a_{22}, \quad \gamma_3 = a_{33}, \\ \tfrac{1}{2}(\beta_3 + \gamma_2) = a_{23} = a_{32}, \quad \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \alpha_3) = a_{31} = a_{13}, \quad \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_1) = a_{12} = a_{21}, \end{cases}$$

so können wir die Gleichungen für u'', v'', w'' schreiben:

$$(19) \quad \begin{cases} u'' = a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) + a_{13}(z - z_0), \\ v'' = a_{21}(x - x_0) + a_{22}(y - y_0) + a_{23}(z - z_0), \\ w'' = a_{31}(x - x_0) + a_{32}(y - y_0) + a_{33}(z - z_0). \end{cases}$$

Da hierin nun $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$ wird, haben wir in der Tat eine spezielle Deformation vor uns, die wir als eine reine Deformation bezeichnen wollen.[2] Den Punkt (x_0, y_0, z_0) nennen wir den Mittelpunkt oder das Zentrum derselben und sprechen von einer Deformation um einen bestimmten Mittelpunkt.

Dieser Mittelpunkt bleibt bei der Deformation ungeändert. Die parabolischen Deformationen sind also bei den reinen Deformationen ausgeschlossen. Wenn die Determinante:

---

1) Cauchy, Exercices d'analyse, Vol. 2, 1841, p. 302.
2) S. Thomson und Tait, Natural Philosophy, Vol. 1, Art. 182 seq.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{20}$$

verschwindet, so bekommen wir stets eine lineale Deformation. Wir können dann drei Richtungskosinus $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ bestimmen, die den drei Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} a_{11}\cos\lambda + a_{12}\cos\mu + a_{13}\cos\nu = 0, \\ a_{21}\cos\lambda + a_{22}\cos\mu + a_{23}\cos\nu = 0, \\ a_{31}\cos\lambda + a_{32}\cos\mu + a_{33}\cos\nu = 0. \end{aligned}$$

Deshalb bleiben alle Punkte ungeändert, deren Koordinaten von der Form sind:

$$x = x_0 + \varrho\cos\lambda, \quad y = y_0 + \varrho\cos\mu, \quad z = z_0 + \varrho\cos\nu,$$

und diese Punkte erfüllen eine gerade Linie, die Mittelachse der Deformation. Multiplizieren wir ferner die Gleichungen (19) der Reihe nach mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ und addieren sie, so wird, weil $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$:

$$u'' \cos\lambda + v'' \cos\mu + w'' \cos\nu = 0.$$

Jeder Punkt verschiebt sich also in einer zu der Achse normalen Richtung. Wir wollen diese besonderen linealen Deformationen, die gleichzeitig reine Deformationen sind, als axiale Deformationen bezeichnen.

Wenn die Determinante Δ mit ihren Unterdeterminanten verschwindet, werden die Verschiebungsrichtungen aller Punkte dieselben, und indem wir diese gemeinsame Richtung mit der Richtung der x-Achse zusammenfallen lassen, können in den Gleichungen (18) nur die Koeffizienten von $x - x_0$ einen von Null verschiedenen Wert besitzen. Weil aber $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, müssen auch die Koeffizienten a_{21}, a_{31} verschwinden und die Gleichungen lauten:

$$u = a_{11}(x - x_0), \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Es bleiben also die Punkte der Ebene, für die $x = x_0$ wird, unverrückt. Die Verrückung irgendeines anderen Punktes ist seinem Abstande von dieser Ebene proportional und zu der Ebene senkrecht. Wir kommen also wieder auf eine einfache Dehnung zurück.

Die Bedingung dafür, daß durch geeignete Wahl von x_0, y_0, z_0 sich den Größen u, v, w in den Gleichungen (17) jeder beliebige Wert erteilen läßt, ist, wie man leicht sieht, dadurch gegeben, daß $\Delta \neq 0$ ist. Denn diesen Gleichungen läßt sich die Form geben:

$$\begin{aligned} \mathrm{u} &= \alpha_0 + a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0, \\ \mathrm{v} &= \beta_0 + a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0, \\ \mathrm{w} &= \gamma_0 + a_{31}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0. \end{aligned}$$

Wenn wir nun noch fragen, wie der Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 zu wählen ist, damit die Schraubung sich auf eine bloße Drehung reduziert, so erkennen wir sofort, indem wir die Gleichungen (17) der Reihe nach mit $2\mathrm{p} = \gamma_2 - \beta_3$, $2\mathrm{q} = \alpha_3 - \gamma_1$, $2\mathrm{r} = \beta_1 - \alpha_2$ multiplizieren und die Summe, nämlich

$$2(\mathrm{up} + \mathrm{vq} + \mathrm{wr}),$$

gleich Null setzen, daß wir die Gleichung einer Ebene:

$$\begin{aligned}(21)\qquad &(\gamma_2 - \beta_3)(\alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 y_0 + \alpha_3 z_0)\\ &+ (\alpha_3 - \gamma_1)(\beta_0 + \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0 + \beta_3 z_0)\\ &+ (\beta_1 - \alpha_2)(\gamma_0 + \gamma_1 x_0 + \gamma_2 y_0 + \gamma_3 z_0) = 0\end{aligned}$$

erhalten, in welcher der Punkt (x_0, y_0, z_0) liegen muß, damit die vorgelegte Deformation sich aus einer reinen Deformation um diesen Punkt als Mittelpunkt und einer bloßen Drehung zusammensetzen läßt. Wir wollen diese Ebene als die Mittelebene der vorgelegten Deformation bezeichnen.

Wir wenden uns jetzt zur näheren Untersuchung der reinen Deformation, die durch die Gleichungen (19) gegeben wird. Wir legen noch den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt der Deformation und lassen die doppelten Akzente an den u, v, w fort. Dann werden die Gleichungen, von denen wir auszugehen haben:

$$(22)\qquad \begin{cases} u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen können wir eine geometrische Interpretation geben, wenn wir eine Fläche zweiter Ordnung einführen, die wir als die Deformationsfläche[1]) bezeichnen und deren Gleichung die folgende sein soll:

$$(23)\qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 1.$$

Suchen wir von einem Punkte P mit den Koordinaten x, y, z bezüglich dieser Fläche die Polarebene, so hat dieselbe die Gleichung:

$$(24)\qquad ux' + vy' + wz' = 1,$$

wenn x', y', z' die laufenden Punktkoordinaten bezeichnen und u, v, w die durch die Gleichungen (22) festgesetzte Bedeutung haben. Denken wir uns die Gleichung der Polarebene aber in der Form geschrieben:

$$(24\mathrm{a})\qquad \cos\lambda x' + \cos\mu y' + \cos\nu z' = p,$$

1) Sie rührt von Cauchy her, Exercices de mathématiques, Vol. 2, 1827, p. 60.

indem λ, μ, ν die Richtungswinkel und p die Länge des aus dem Koordinatenursprunge auf die Ebene gefällten Lotes bezeichnen, so wird:

$$(25) \qquad u = \frac{1}{p}\cos\lambda, \quad v = \frac{1}{p}\cos\mu, \quad w = \frac{1}{p}\cos\nu.$$

Man muß also auf der Linie des Lotes vom Ursprunge aus den reziproken Wert seiner Länge abtragen, dann hat der Endpunkt dieser Strecke die Koordinaten u, v, w, die Strecke gibt also den Verschiebungsvektor des Punktes P.

Der Endpunkt der Strecke ist aber gleichzeitig der Pol der gefundenen Polarebene bezüglich der Kugel, die mit dem Radius 1 um den Koordinatenursprung beschrieben ist und die wir kurz die Einheitskugel nennen wollen. In der Tat wird die Polarebene des Punktes mit den Koordinaten u, v, w bezüglich der durch die Gleichung:

$$(26) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

dargestellten Kugel gegeben durch die Gleichung:

$$ux' + vy' + wz' = 1.$$

Den Punkt mit den Koordinaten u, v, w wollen wir den Deformationspol des Punktes P mit den Koordinaten x, y, z nennen. Wir finden also von einem Punkte den Deformationspol, indem wir von ihm die Polarebene bezüglich der Deformationsfläche aufsuchen und von dieser wieder den Pol bezüglich der Einheitskugel. Dieser Pol ist der Deformationspol.

Wir wollen nun voraussetzen, der Deformationspol liege auf einer Kugel, die mit dem Radius r um den Koordinatenursprung beschrieben ist. Dann umhüllen die Polarebenen dieser Pole bezüglich der Einheitskugel eine konzentrische Kugel vom Radius $\frac{1}{r}$. Von dieser Kugel müssen wir die reziproke Fläche — d. h. die von den Polen der Tangentialebenen der Kugel erfüllte oder von den Polarebenen der Punkte der Kugel umhüllte Fläche — bezüglich der Deformationsfläche suchen, dann finden wir den Ort der Punkte, deren Deformationspole die Kugel mit dem Radius r erfüllen, d. h. den Ort der Punkte, welche die gleiche Verschiebung $r \cdot \tau$ erfahren. Die Gleichungen (22) ergeben aber unmittelbar, wenn man:

$$(27) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = r^2$$

annimmt:

$$(28) \qquad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^2 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^2 + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^2 = r^2,$$

und dies ist sonach die Gleichung der gesuchten Fläche, die wir als eine Verschiebungsfläche bezeichnen wollen.[1]) Diese Flächen sind immer Ellipsoide. In der Tat zeigt die Gleichung (28) in ihrer Bauart sofort, daß sie nur für endliche Werte der Koordinaten erfüllbar ist. Die Verschiebungsellipsoide sind konzentrische, ähnliche und ähnlich liegende Flächen. Greift man demnach unter ihnen dasjenige heraus, das sich für $r = 1$ ergibt, so erhält man aus diesem allein die Verschiebung eines beliebigen Punktes P, indem man den Radiusvektor vom Mittelpunkte O nach dem Punkte P mit der Fläche schneidet. Ist P_0 der Schnittpunkt, so wird die Verschiebung des Punktes P an Größe gleich:

$$\frac{OP}{OP_0} \cdot \tau.$$

Die Richtung der Verschiebung ergibt sich am einfachsten daraus, daß sie normal zu der Polarebene des Punktes bezüglich der Deformationsfläche sein soll.

Wir suchen nun die Hauptachsen der Deformation. Darunter verstehen wir die Linien durch den Mittelpunkt, deren Punkte sich bei der Deformation alle in ihnen verschieben, so daß die Linien in sich transformiert werden. Den Bedingungen hierfür können wir die Form geben:

$$u = \lambda x, \quad v = \lambda y, \quad w = \lambda z, \tag{29}$$

und wenn wir diese Werte in die Gleichungen (22) einsetzen, so werden dieselben:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - \lambda)z = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Was die Auflösung dieser Gleichungen betrifft, so ist aus der Theorie der Flächen zweiten Grades folgendes bekannt. Die Gleichungen sind alle drei nur dann erfüllbar, wenn λ eine Wurzel der Gleichung dritten Grades:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{31}$$

ist. Zu den drei Wurzeln dieser Gleichung gehören drei Lösungssysteme $x : y : z$ der Gleichungen (30), und jedem Lösungssystem entspricht eine Hauptachse. Die drei Hauptachsen, die man so findet, sind zueinander normal und immer reell, indem auch die drei Wurzeln α, β, γ der Gleichung dritten Grades immer reell ausfallen.

1) Sie stammt gleichfalls von Cauchy, Exercices de mathématiques, Vol. 3, 1828, p. 237.

Wenn wir nun ein neues Koordinatensystem auf diese Hauptachsen beziehen, so werden die Gleichungen der Deformation einfach:

$$(32) \qquad u = \alpha x, \quad v = \beta y, \quad w = \gamma z,$$

also wird die Gleichung der Deformationsfläche:

$$(33) \qquad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1,$$

und die Gleichungen der Verschiebungsellipsoide lauten:

$$(34) \qquad \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = r^2.$$

Die Hauptachsen der Deformation sind also auch die Hauptachsen dieser Flächen.

Die Größen α, β, γ nennen wir die Parameter der Deformation. Die symmetrischen Funktionen dieser Parameter:

$$\delta = \alpha + \beta + \gamma, \quad \varepsilon = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \quad \varDelta = \alpha\beta\gamma$$

heißen die Invarianten der Deformation.[1]) Sie sind die Koeffizienten in der Gleichung dritten Grades:

$$(31\text{a}) \qquad \lambda^3 - \delta\lambda^2 + \varepsilon\lambda - \varDelta = 0,$$

deren Wurzeln α, β, γ sind. Vergleichen wir diese Gleichung mit der früher gegebenen (31), mit der sie identisch sein muß, so ergibt sich:

$$\delta = \alpha + \beta + \gamma = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\varepsilon = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2,$$

$$\varDelta = \alpha\beta\gamma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Es sind nun noch die besonderen Fälle durchzusprechen, die bei den reinen Deformationen auftreten können.

Wenn zwei Wurzeln der Gleichung dritten Grades, etwa α und β, einander gleich werden, dann sind zwei der Hauptachsen insofern unbestimmt, als sie nur einer bestimmten Ebene, die zu der dritten Hauptachse normal ist, angehören müssen. In diesem Falle werden die Deformationsfläche und die Verschiebungsellipsoide Rotationsflächen, und da jetzt:

$$u : v = x : y$$

wird, bleibt jeder Punkt in der Ebene, die ihn mit der Rotationsachse der Flächen, nämlich der z-Achse, verbindet.

Wird $\alpha = \beta = \gamma$, so gelangen wir zu einer Deformation, bei welcher alle Punkte sich in der Linie verschieben, die sie mit dem

1) Vgl. Rankine, Philos. Transactions, Vol. 146, 1856, p. 261.

Mittelpunkt verbindet, und zwar um eine Strecke, die ihrem Abstande von dem Mittelpunkte proportional ist. Wir bezeichnen eine solche Deformation als eine radiale Deformation.

Wenn $\delta = 0$ wird, so ist zu beachten, daß nach Gleichung (14), die in der neuen Bezeichnung lautet:

$$\delta = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

das neu eingeführte δ mit dem früher zur Bezeichnung der Volumdilatation gebrauchten identisch ist. Wird also $\delta = 0$, so ändern bei der Deformation die Raumteile wohl ihre Gestalt, aber nicht ihren Rauminhalt. Wir wollen eine solche Deformation deshalb als eine raumgleiche Deformation bezeichnen. Da jetzt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

ist, können wir setzen:

$$\alpha = b - c, \quad \beta = c - a, \quad \gamma = a - b,$$

wobei von den drei Größen a, b, c eine beliebig bleibt. So erhalten wir aber gleichzeitig eine Zusammensetzung dieser Deformation aus drei spezielleren, nämlich den in der folgenden Form darstellbaren:

$$\begin{array}{lll} u_1 = 0, & v_1 = -ay, & w_1 = az, \\ u_2 = bx, & v_2 = 0, & w_2 = -bz, \\ u_3 = -cx, & v_3 = cy, & v_3 = 0. \end{array}$$

Für die aus diesen dreien zusammengesetzte Deformation werden die Verschiebungskomponenten:

$$u = u_1 + u_2 + u_3, \quad v = v_1 + v_2 + v_3, \quad w = w_1 + w_2 + w_3,$$

und so ergibt sich wirklich:

$$u = (b - c)x, \quad v = (c - a)y, \quad w = (a - b)z.$$

Die speziellen Deformationen, auf welche wir die allgemeine raumgleiche Deformation zurückgeführt haben, bezeichnen wir als Doppelscherungen.[1]) Wir wollen sie an der Hand der Gleichungen:

$$u_1 = 0, \quad v_1 = -ay, \quad w_1 = az$$

kurz diskutieren. Es ist zunächst sofort zu sehen, daß diese Doppelscherung wieder eine raumgleiche Deformation darstellt. Sie ist dadurch ausgezeichnet, daß die Verschiebungsrichtung aller Punkte senkrecht zur x-Achse ist und die Punkte dieser Achse unverrückt bleiben. Es ist also nach unserer Ausdrucksweise eine axiale raumgleiche Deformation. Diese Deformation läßt sich nun leicht auf zwei Scherungen zurückführen. Zu dem Zwecke drehen wir das

1) Vgl. Helmholtz' Vorlesungen, 2. Band, 1902, Erster Teil.

Koordinatensystem um die x-Achse durch 45^0 herum. Dann werden die neuen Punktkoordinaten:

$$x' = x, \quad y' = \frac{y+z}{\sqrt{2}}, \quad z' = \frac{y-z}{\sqrt{2}}$$

und die neuen Verschiebungskomponenten:

$$u' = u_1, \quad v' = \frac{v_1 + w_1}{\sqrt{2}}, \quad w' = \frac{v_1 - w_1}{\sqrt{2}}.$$

Somit erhalten wir gemäß den obenstehenden Deformationsgleichungen:

$$u' = 0, \quad v' = -az', \quad w' = -ay'.$$

Die so dargestellte Deformation können wir aber sofort zerlegen in die zwei Deformationen, deren Gleichungen lauten:

$$u_1' = 0, \quad v_1' = -az', \quad w_1' = 0,$$
$$u_2' = 0, \quad v_2' = 0, \quad w_2' = -ay'.$$

Dies sind in der Tat einfache Scherungen. Die Zentralebene ist im einen Falle die xy-Ebene, im anderen Falle die xz-Ebene. Im ersten Falle sind die Verschiebungen der Punkte parallel der y-Achse, im zweiten Falle der z-Achse. Es sind also die Zentralebenen und die Verschiebungsrichtungen der beiden Scherungen senkrecht aufeinander, und unter dieser doppelten Bedingung setzen sie sich zu einer Doppelscherung zusammen, wenn außerdem die Größe der Verschiebung in Punkten, die gleich weit von der jeweiligen Zentralebene entfernt sind, dieselbe wird. Von drei Doppelscherungen können wir sagen, sie bilden ein Tripel, wenn die zugehörigen, zueinander normalen Zentralebenen zu zweien zusammenfallen, so daß sie jedesmal aus zweien von drei zueinander senkrechten Ebenen bestehen. Dann ergibt sich einfach: Eine allgemeine raumgleiche Deformation ist mit einem Tripel von Doppelscherungen identisch.

Es ist sehr leicht zu sehen, daß irgend eine reine Deformation einer raumgleichen Deformation zusammen mit einer radialen Deformation äquivalent ist. Man kann sie also auch aus einem Tripel von Doppelscherungen, verbunden mit einer radialen Deformation, zusammensetzen. —

Wenn $\Delta = 0$ wird, ist die Gleichung (31) erfüllt für $\lambda = 0$, eine Wurzel, sagen wir γ, wird also Null, und die Gleichungen (32) werden:

$$u = \alpha x, \quad v = \beta y, \quad w = 0, \tag{32a}$$

während die Deformations- und Verschiebungsflächen Zylinder werden. Die Verschiebungen aller Punkte sind dann senkrecht zur z-Achse gerichtet, und die Punkte dieser letzteren selbst bleiben unverrückt. Wir haben eine axiale Deformation vor uns, deren Mittelachse die z-Achse ist.

Wenn die Determinante $\varDelta$ mit ihren Unterdeterminanten verschwindet, so werden zwei Wurzeln der Gleichung dritten Grades Null, wir können setzen:

$$u = \alpha x, \quad v = 0, \quad w = 0 \tag{32b}$$

und erhalten eine einfache Dehnung, die wir als Pressung oder Streckung unterscheiden können, je nachdem $\alpha < 0$ oder $\alpha > 0$ ist.

Die Gleichungen (32) zeigen nun aber, daß die allgemeinste reine Deformation sich aus drei solchen Dehnungen zusammensetzen läßt, deren Richtungen zueinander normal, nämlich durch die Hauptachsen gegeben sind.[1]) Je nach den Vorzeichen von α, β, γ sind diese Dehnungen Pressungen oder Streckungen, und hierauf läßt sich eine Klassifikation der reinen Deformationen begründen, bei der vier Arten von solchen zu unterscheiden sind, je nachdem in ihnen drei, zwei, eine oder keine Streckung enthalten.

Wir wollen nun die reine Deformation mit einer Drehung um ihren Mittelpunkt kombinieren und erhalten so jedesmal eine unreine Deformation mit demselben Zentrum. Die Drehung denken wir uns gegeben durch ihre Komponenten p, q, r und wollen sie illustrieren durch einen Punkt, dem wir die Koordinaten p, q, r geben und den wir als den Drehungspol bezeichnen. Er liegt jedesmal auf der Drehachse und sein Abstand vom Zentrum mißt die Drehgeschwindigkeit. Die Koordinatenachsen denken wir uns in die Hauptachsen der reinen Deformation gelegt, dann wird die Darstellung der aus ihr und der Drehung zusammengesetzten Deformation:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \alpha x - \mathrm{r} y + \mathrm{q} z, \\ v &= \mathrm{r} x + \beta y - \mathrm{p} z, \\ w &= -\mathrm{q} x + \mathrm{p} y + \gamma z. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Auch diese allgemeine Deformation besitzt drei Hauptachsen in dem Sinne, daß die Punkte derselben sich bei der Deformation in ihnen verschieben. Nehmen wir nämlich:

$$u = kx, \quad v = ky, \quad w = kz, \tag{36}$$

so werden die Gleichungen (35):

$$\left\{\begin{aligned} (\alpha - k)x - \mathrm{r} y + \mathrm{q} z &= 0, \\ \mathrm{r} x + (\beta - k) y - \mathrm{p} z &= 0, \\ -\mathrm{q} x + \mathrm{p} y + (\gamma - k) z &= 0. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Daraus entsteht durch Elimination von x, y, z wieder zunächst eine Gleichung dritten Grades, jetzt für k, die wir ausgerechnet schreiben können:

1) Vgl. Stokes, Trans. of the Cambr. Philos. Soc. 8, 1848, p. 287, Papers I p. 75, Helmholtz, Journ. f. Math. 55, 1858, p. 25, Wiss. Abhdlgn. I, p. 101.

$$(38) \quad (\alpha - k)\mathrm{p}^2 + (\beta - k)\mathrm{q}^2 + (\gamma - k)\mathrm{r}^2 + (\alpha - k)(\beta - k)(\gamma - k) = 0,$$

und den drei Wurzeln dieser Gleichung entsprechen drei Hauptachsen der Deformation. Diese Hauptachsen sind aber nicht mehr zueinander senkrecht, ja nicht einmal notwendigerweise alle reell.

Wir denken uns jedesmal durch den Drehungspol, der zu der Deformation gehört, die Parallelen zu den Hauptachsen derselben gezogen. Nimmt man nun irgendeinen Punkt auf einer dieser Parallelen als neuen Drehungspol, so werden die Koordinaten desselben von der Form:

$$\mathrm{p}' = \mathrm{p} + \varrho x, \quad \mathrm{q}' = \mathrm{q} + \varrho y, \quad \mathrm{r}' = \mathrm{r} + \varrho z,$$

wenn x, y, z ein Lösungssystem der Gleichungen (37) bezeichnen. Setzt man in den Gleichungen (37) aber $\mathrm{p}', \mathrm{q}', \mathrm{r}'$ für $\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}$ ein, so bleiben sie völlig ungeändert, da ja $\mathrm{r}'y - \mathrm{q}'z = \mathrm{r}y - \mathrm{q}z$ wird usw. Es kann deshalb auch in (38) $\mathrm{p}', \mathrm{q}', \mathrm{r}'$ für $\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}$ gesetzt werden, ohne daß die Wurzel k, welche das Lösungssystem x, y, z der Gleichungen (37) liefert, sich ändert. Es liegt also die Parallele auf der Regelfläche zweiten Grades, die durch die Gleichung (38) dargestellt wird, wenn man in derselben dem k den bestimmten Wert gibt und $\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}$ als Punktkoordinaten auffaßt. Die Gleichung ist dann aber dieselbe wie die der „Achsenflächen", die wir im 14. Kapitel behandelt haben. Wir finden also die dort untersuchte Achsenkongruenz wieder, ihre Strahlen sind jetzt die Parallelen, die wir durch einen Drehungspol zu den Hauptachsen der zugehörigen Deformation ziehen. Die Achsenkongruenz liefert so das Mittel, wenn die Drehung durch den Drehungspol gegeben ist, die Hauptachsen der zugehörigen Deformation zu finden.[1])

Siebzehntes Kapitel.

Die Reyeschen Strahlenkomplexe.

Mit jeder Deformation ist ein Strahlenkomplex aufs engste verbunden. Es ist der Komplex der Linien, in denen sich die Punkte des Raumes bei der Deformation verschieben. Sind $u \cdot \tau$, $v \cdot \tau$, $w \cdot \tau$ die Veränderungen, welche die Koordinaten x, y, z eines Punktes bei der Deformation erleiden, so hat ein beliebiger Punkt auf der Verschiebungslinie dieses Punktes die Koordinaten:

$$x' = x + \varrho u, \quad y' = y + \varrho v, \quad z' = z + \varrho w,$$

1) Dieser interessante Zusammenhang ist aufgedeckt worden von Joly, Trans. of the Irish Acad. Vol. 25, p. 597.

wenn ϱ einen veränderlichen Parameter bezeichnet. Wir nehmen nun an, die Hauptachsen der Deformation seien reell und wollen auf diese Hauptachsen schiefwinklige Koordinaten beziehen, die wir mit x_1, x_2, x_3 bezeichnen. Entsprechend nennen wir $u_1\tau, u_2\tau, u_3\tau$ die Komponenten der Verschiebung des Punktes (x_1, x_2, x_3) nach den Hauptachsen. Dann läßt sich die Deformation in der folgenden einfachen Weise darstellen:

$$u_1 = \lambda_1 x_1, \quad u_2 = \lambda_2 x_2, \quad u_3 = \lambda_3 x_3, \tag{1}$$

und die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Verschiebungslinie dieses Punktes werden von der Form:

$$x_1' = x_1 + \varrho u_1, \quad x_2' = x_2 + \varrho u_2, \quad x_3' = x_3 + \varrho u_3$$

oder:

$$x_1' = (1 + \varrho\lambda_1)x_1, \quad x_2' = (1 + \varrho\lambda_2)x_2, \quad x_3' = (1 + \varrho\lambda_3)x_3. \tag{2}$$

Die Ebenen, welche die Hauptachsen der Deformation paarweise verbinden und jetzt die Koordinatenebenen bilden, wollen wir als die Hauptebenen bezeichnen. Wir suchen nunmehr die Schnittpunkte des durch die Gleichungen (2) festgelegten Komplexstrahles mit den Hauptebenen. Jeder Punkt des Komplexstrahles gehört zu einem bestimmten Werte des veränderlichen Parameters ϱ. Für die Schnittpunkte des Strahles mit den Hauptebenen muß aber eine der Koordinaten verschwinden, und danach sind die zugehörigen Werte des Parameters sofort zu bestimmen. Es sind die folgenden:

$$\varrho_1 = -\frac{1}{\lambda_1}, \quad \varrho_2 = -\frac{1}{\lambda_2}, \quad \varrho_3 = -\frac{1}{\lambda_3}. \tag{3}$$

Bezeichnen wir die Entfernungen dieser Schnittpunkte von dem Pole des Komplexstrahles, d. h. von dem Punkte, dessen Verschiebungslinie er darstellt, der Reihe nach mit r_1, r_2, r_3, dann wird:

$$r_1 = \varrho_1 r_0, \quad r_2 = \varrho_2 r_0, \quad r_3 = \varrho_3 r_0, \tag{4}$$

wenn wir die Größe der Verschiebung, die der Pol erfährt, $r_0\tau$ nennen. In der Tat folgt aus den allgemeinen Gleichungen:

$$x_1' - x_1 = \varrho u_1, \quad x_2' - x_2 = \varrho u_2, \quad x_3' - x_3 = \varrho u_3,$$

daß die Komponenten des Abstandes der beiden Punkte (x_1, x_2, x_3) und (x_1', x_2', x_3') nach den Hauptachsen das ϱ/τ-fache von den Komponenten $u_1\tau, u_2\tau, u_3\tau$ der Verschiebung des Poles sind. Aus den Gleichungen (4) folgt aber:

$$\frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_2} = \frac{\varrho_3 - \varrho_1}{\varrho_3 - \varrho_2}$$

oder, wenn wir die Werte der ϱ aus (3) einsetzen:

$$\frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}. \tag{5}$$

Das Abstandsverhältnis der Schnittpunkte mit den drei Hauptebenen ist also für jeden Komplexstrahl dasselbe, und wir können einfach sagen, der Komplex wird gebildet von allen Strahlen, für die das Abstandsverhältnis der Schnittpunkte mit den drei Hauptebenen den gefundenen konstanten Wert hat. Einen solchen Komplex bezeichnen wir als einen Reyeschen Komplex, weil er zuerst von Reye allgemein untersucht worden ist.[1])

Nehmen wir in den Gleichungen (2) $x_3 = 0$, so wird auch für jeden Wert von ϱ $x_3' = 0$. Ein Komplexstrahl, dessen Pol in einer Hauptebene liegt, gehört ganz dieser Hauptebene an, und so sind alle Linien in den Hauptebenen Strahlen des Komplexes, denn z. B. kann durch die Gleichungen:

$$(6) \qquad x_1' = (1 + \varrho\lambda_1)x_1, \quad x_2' = (1 + \varrho\lambda_2)x_2$$

jede gerade Linie der dritten Hauptebene dargestellt werden. Die Gleichung der Linie kann nämlich zunächst in der Form angenommen werden:

$$(6\text{a}) \qquad \xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' = 1,$$

und definieren wir dann x_1, x_2 durch die Gleichungen:

$$(6\text{b}) \qquad \xi_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{1}{x_1}, \quad \xi_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{1}{x_2},$$

so gelangen wir zu derselben Gleichung, die aus den Gleichungen (6) durch Elimination von ϱ folgt.

Zu dem Zentrum der Deformation, d. h. dem Schnittpunkte der drei Hauptebenen, gehört kein bestimmter Komplexstrahl, vielmehr sind diesem Punkte alle Strahlen, die durch ihn gehen, zuzuweisen, so daß alle Strahlen durch das Zentrum zu dem Reyeschen Komplex zu zählen sind. Nimmt man nämlich x_1, x_2, x_3 sehr klein, ϱ dagegen sehr groß, so ist 1 gegen $\varrho\lambda_1$ usw. zu vernachlässigen, und wir können schreiben:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \lambda_1(\varrho x_1) : \lambda_2(\varrho x_2) : \lambda_3(\varrho x_3),$$

wenn wir annehmen, daß beim Übergang zur Grenze ϱx_1, ϱx_2, ϱx_3 irgendwelche endlichen Werte annehmen. Durch die vorstehende Proportion wird so aber irgendein Strahl durch den Koordinatenursprung, d. h. das Zentrum, dargestellt.

Rückt der Pol ins Unendliche, werden also die Koordinaten x_1, x_2, x_3 in den Gleichungen (2) unendlich groß, so werden auch die Koordinaten x_1', x_2', x_3' unendlich groß, d. h. es rückt der ganze Komplexstrahl in unendliche Entfernung. Wenn aber nur eine der

1) Geometrie der Lage, zweite Abteilung. Erste Auflage Hannover 1868.

Koordinaten x_1, x_2, x_3, etwa x_3, unendlich wird, die anderen dagegen irgendwelche endlichen Werte annehmen, dann mache man $(1 + \varrho\lambda_3)$ so klein, daß x_3' auch beim Übergang zur Grenze endlich bleibt. Es wird dabei, je mehr man sich der Grenze nähert, mit um so größerer Annäherung $\varrho = -\frac{1}{\lambda_3}$ und damit:

$$x_1' = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)x_1, \quad x_2' = \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)x_2,$$

während der Wert von x_3' unbestimmt bleibt. Durch diese Gleichungen wird irgendein Parallelstrahl zur dritten Hauptachse dargestellt, und man kann demnach sagen: Rückt der Pol nach der Richtung einer Hauptachse in unendliche Entfernung, so wird der zugehörige Komplexstrahl irgendein Parallelstrahl zu der betreffenden Hauptachse und es gehören demnach alle Parallellinien zu den Hauptachsen dem Reyeschen Komplexe an.

Wir fragen nun nach den Komplexstrahlen, die durch einen beliebig gegebenen Punkt P' gehen. Sind x_1', x_2', x_3' die Koordinaten dieses Punktes, so müssen nach den Gleichungen (2) die Koordinaten x_1, x_2, x_3 für den Pol eines durch den Punkt P' gehenden Komplexstrahles den Gleichungen genügen:

$$(7) \qquad x_1 = \frac{x_1'}{1 + \lambda_1\varrho}, \quad x_2 = \frac{x_2'}{1 + \lambda_2\varrho}, \quad x_3 = \frac{x_3'}{1 + \lambda_3\varrho},$$

wobei ϱ unbestimmt bleibt. Alle Punkte, deren Koordinaten von dieser Form sind, erfüllen aber eine Raumkurve dritter Ordnung, denn durch Einsetzen der vorstehenden Werte in die Gleichung einer Ebene:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 1$$

ergibt sich eine Gleichung dritten Grades für ϱ, also liegen drei Punkte der Kurve in der Ebene. Wenn ϱ einen der drei Werte:

$$(8) \qquad \varrho_1 = -\frac{1}{\lambda_1}, \quad \varrho_2 = -\frac{1}{\lambda_2}, \quad \varrho_3 = -\frac{1}{\lambda_3}$$

annimmt, wird für den zugehörigen Kurvenpunkt eine seiner Koordinaten unendlich groß, die Kurve besitzt also drei reelle unendlichferne Punkte in den Richtungen der Hauptachsen, und man bezeichnet sie deshalb als eine Raumhyperbel.[1]) Für $\varrho = 0$ wird $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$, die Raumhyperbel geht also durch den angenommenen festen Punkt hindurch. Für $\varrho = \infty$ wird $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, die Raumhyperbel geht mithin auch stets durch das Zentrum hindurch.

1) So nennt sie Reye in der neuesten Auflage seiner Geometrie der Lage nach dem Vorgange von Seydewitz, der „räumliche Hyperbel" sagt.

Projizieren wir die Raumkurve aus dem Punkte P', so ist der projizierende Kegel der Komplexkegel des Punktes, nämlich der Kegel, den die durch den Punkt P' gehenden Komplexstrahlen erfüllen. Die Gleichung dieses Kegels muß homogen und vom zweiten Grade in den Koordinatendifferenzen:

$$x_1' - x_1, \quad x_2' - x_2, \quad x_3' - x_3$$

sein. Wir erhalten aus den Gleichungen (7) zunächst:

$$x_1' - x_1 = \frac{\lambda_1 \varrho}{1 + \lambda_1 \varrho} x_1', \quad x_2' - x_2 = \frac{\lambda_2 \varrho}{1 + \lambda_2 \varrho} x_2', \quad x_3' - x_3 = \frac{\lambda_3 \varrho}{1 + \lambda_3 \varrho} x_3'$$

und daraus:

$$\frac{x_1'}{x_1' - x_1} = 1 + \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{x_2'}{x_2' - x_2} = 1 + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{x_3'}{x_3' - x_3} = 1 + \frac{1}{\lambda_3} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit:

$$\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2}, \quad \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3}, \quad \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}$$

und addieren sie, so wird:

$$(9) \qquad \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{x_1'}{x_1' - x_1} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3}\right) \frac{x_2'}{x_2' - x_2} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \frac{x_3'}{x_3' - x_3} = 0$$

die Gleichung des gesuchten Komplexkegels. Dieselbe zeigt auf ihrer linken Seite, wenn man sie mit $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (x_1' - x_1)(x_2' - x_2)(x_3' - x_3)$ erweitert, eine homogene quadratische Funktion der Koordinatendifferenzen. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}(9\,\mathrm{a}) \qquad \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3) x_1'(x_2' - x_2)(x_3' - x_3) + \lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) x_2'(x_3' - x_3)(x_1' - x_1) \\ + \lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2) x_3'(x_1' - x_1)(x_2' - x_2) = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungsform läßt sofort erkennen, daß, wenn eines der x', etwa x_3', verschwindet, der Komplexkegel in zwei Ebenen zerfällt. Die eine dieser Ebenen hat die Gleichung $x_3' - x_3 = 0$ oder $x_3 = 0$, sie ist also die Hauptebene, in welcher der Punkt P' jetzt liegt. Die andere Ebene hat die Gleichung:

$$\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3) x_1'(x_2' - x_2) + \lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) x_2'(x_1' - x_1) = 0,$$

ist also der dritten Hauptachse parallel, und in ihr liegt wie in der Hauptebene ein Büschel von Komplexstrahlen, die durch P' gehen.

Jede gerade Linie geht durch die Deformation wieder in eine gerade Linie über. Es ist leicht zu sehen, daß, wenn die neue Linie die alte schneidet, beide zu dem Reyeschen Komplex der Verschiebungslinien gehören müssen. Denn der Schnittpunkt S beider Linien muß als Punkt der ersten Linie in einen Punkt S' der zweiten Linie übergehen, diese ist also die Verschiebungslinie des Schnittpunktes. Als Punkt der zweiten Linie aber geht der Schnittpunkt S aus einem

Punkte S_1 der ersten Linie hervor und diese Linie ist somit die Verschiebungslinie des Punktes S_1. Zwischen den Punkten der beiden geraden Linien wird durch die Deformation eine wechselweise eindeutige Beziehung hergestellt, indem jedem Punkte der ersten Linie der Punkt der zweiten Linie zugewiesen wird, in den jener durch die Deformation übergeht. Diese Beziehung ist derart, daß das Abstandsverhältnis von irgend drei Punkten gleich dem Abstandsverhältnis der drei entsprechenden Punkte wird. In der Tat, sind x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die Koordinaten irgend zweier Punkte, so werden die Koordinaten des Punktes auf ihrer Verbindungslinie, für welchen das Abstandsverhältnis von den beiden ersten Punkten gleich μ ist:

$$\frac{x_1 + \mu y_1}{1+\mu}, \quad \frac{x_2 + \mu y_2}{1+\mu}, \quad \frac{x_3 + \mu y_3}{1+\mu}.$$

Diese drei Punkte gehen durch die Deformation über in drei Punkte mit den Koordinaten:

$$(1 + \lambda_1\tau)x_1, \quad (1 + \lambda_2\tau)x_2, \quad (1 + \lambda_3\tau)x_3;$$
$$(1 + \lambda_1\tau)y_1, \quad (1 + \lambda_2\tau)y_2, \quad (1 + \lambda_3\tau)y_3;$$
$$\frac{(1+\lambda_1\tau)x_1 + \mu(1+\lambda_1\tau)y_1}{1+\mu}, \quad \frac{(1+\lambda_2\tau)x_2 + \mu(1+\lambda_2\tau)y_2}{1+\mu}, \quad \frac{(1+\lambda_3\tau)x_3 + \mu(1+\lambda_3\tau)y_3}{1+\mu},$$

und das Abstandsverhältnis des dritten dieser Punkte von den beiden ersten ist wieder μ. Sind aber zwei gerade Punktreihen in einer Ebene derart eindeutig aufeinander bezogen, daß das Abstandsverhältnis dreier Punkte in der einen gleich dem Abstandsverhältnis der drei entsprechenden Punkte in der anderen Punktreihe wird, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Parabel. Diese Verbindungslinien sind hier die Verschiebungslinien der Punkte auf der ersten Geraden und gehören somit zu dem Reyeschen Komplex. So finden wir: Die Verschiebungslinien der Punkte eines Komplexstrahles liegen in einer Ebene und umhüllen eine Parabel.[1]) Wir denken uns den ersten Komplexstrahl durch die Koordinaten x_1, x_2, x_3 seines Poles festgelegt, dann werden die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf ihm:

$$(1 + \varrho\lambda_1)x_1, \quad (1 + \varrho\lambda_2)x_2, \quad (1 + \varrho\lambda_3)x_3,$$

und wenn dieser Punkt wieder als der Pol eines Komplexstrahles angesehen wird, so hat ein beliebiger Punkt auf dem letzteren Koordinaten von folgender Form:

$$z_1 = \{1 + (\varrho + \varrho')\lambda_1 + \varrho\varrho'\lambda_1^2\}x_1,$$
$$z_2 = \{1 + (\varrho + \varrho')\lambda_2 + \varrho\varrho'\lambda_2^2\}x_2,$$
$$z_3 = \{1 + (\varrho + \varrho')\lambda_3 + \varrho\varrho'\lambda_3^2\}x_3.$$

1) Chasles, Journ. de Math. (1) 4, 1839, p. 350.

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_1}\cdot\frac{1}{x_1},\quad \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{1}{x_2},\quad \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3}\cdot\frac{1}{x_3}$$

und addieren sie, so heben sich ϱ und ϱ' heraus und wir erhalten die Gleichung:

$$\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_1}\cdot\frac{z_1}{x_1}+\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{z_2}{x_2}+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3}\cdot\frac{z_3}{x_3}=-\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

oder:

$$\begin{aligned}(10)\quad \lambda_2\lambda_3(\lambda_2-\lambda_3)\frac{z_1}{x_1}+\lambda_3\lambda_1(\lambda_3-\lambda_1)\frac{z_2}{x_2}+\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\frac{z_3}{x_3}&\\ +(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)&=0.\end{aligned}$$

In der durch diese Gleichung für z_1, z_2, z_3 dargestellten Ebene liegen alle Komplexstrahlen, die wir so finden. Es ist leicht zu sehen, daß jede Ebenengleichung sich auf diese Form bringen läßt. Also sind die Komplexstrahlen, die in einer beliebigen Ebene liegen, die Verschiebungslinien der Punkte eines besonderen in dieser Ebene enthaltenen Komplexstrahles und umhüllen eine Parabel. Diese Parabel muß die drei Hauptebenen berühren, da die Schnittlinien ihrer Ebene mit den Hauptebenen wie alle geraden Linien in den Hauptebenen zu dem Reyeschen Komplex gehören.

Läßt man den Pol sich auf einem Strahl durch das Zentrum bewegen, so verschiebt sich der zugehörige Komplexstrahl so, daß er seine Richtung nicht ändert. In der Tat sind die Verrückungen, welche die Punkte eines Strahles durch das Zentrum erfahren, alle parallel gerichtet. Denn wenn man in den Gleichungen (1) x_1, x_2, x_3 durch $\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3$ ersetzt, so gehen auch u_1, u_2, u_3 über in ϱu_1, ϱu_2, ϱu_3, und die Verhältnisse $u_1 : u_2 : u_3$, welche die Richtung der Verschiebung bestimmen, bleiben ungeändert. Jedem Strahle s durch das Zentrum ist so eine Ebene σ zugeordnet, in der die Verschiebungslinien seiner Punkte liegen. Sind x_1, x_2, x_3 die Koordinaten eines Punktes des Strahles s, so muß die Ebene σ ebenfalls den Punkt mit den Koordinaten x_1', x_2', x_3' [vgl. (2)] enthalten, der auf der Verschiebungslinie jenes Punktes liegt. Die Gleichung der Ebene lautet sonach in laufenden Koordinaten z_1, z_2, z_3:

$$(\lambda_2-\lambda_3)\frac{z_1}{x_1}+(\lambda_3-\lambda_1)\frac{z_2}{x_2}+(\lambda_1-\lambda_2)\frac{z_3}{x_3}=0.$$

Anderseits läßt sich die Gleichung einer jeden Ebene durch das Zentrum auf diese Form bringen. Eine jede solche Ebene enthält demnach ein Büschel paralleler Komplexstrahlen, außerdem aber noch ein zentrisches Büschel von Komplexstrahlen, denn alle Strahlen der Ebene, die durch das Zentrum gehen, gehören dem Komplex an.

In einer Ebene, die einer Hauptachse parallel ist, liegt, wie wir bereits gefunden haben, ein Büschel von Komplexstrahlen, dessen Scheitel einer Hauptebene angehört, außerdem aber gehören alle zu jener Hauptachse parallelen Linien, die die Ebene enthält, dem Reyeschen Komplex an, und diese zueinander parallelen Linien bilden somit ein zweites Büschel von Komplexstrahlen, die in der Ebene liegen. Die Pole der parallelen Komplexstrahlen liegen alle in unendlicher Entfernung, die Pole der Strahlen des zentrischen Büschels aber liegen auf einer Parallelen zu der Hauptachse, der die Ebene selbst parallel ist. Man erkennt dies sofort, wenn man aus zweien der Gleichungen (2), etwa den beiden ersten, ϱ eliminiert. Dann entsteht die Gleichung:

$$\lambda_2 x_2 x_1' - \lambda_1 x_1 x_2' = (\lambda_2 - \lambda_1) x_1 x_2,$$

in der wir x_1', x_2' als laufende Koordinaten anzusehen haben. In der so dargestellten Ebene liegt der Komplexstrahl, wie auch die dritte Koordinate x_3 seines Poles gewählt wird. In dieser Parallelebene zur dritten Hauptachse muß sich also der Komplexstrahl bewegen, wenn sein Pol eine Parallellinie zu dieser Hauptachse durchläuft.

Wir nehmen jetzt insbesondere an, die Deformation, für die wir den Komplex der Verschiebungslinien untersuchen, sei eine reine Deformation. Dann sind die Hauptebenen zueinander normal, im übrigen bleiben alle Sätze, die im vorstehenden für den allgemeinen Fall entwickelt sind, unverändert bestehen. Wir wollen aber noch die Beziehungen untersuchen, in denen der jetzt entstehende Reyesche Komplex zu der Deformationsfläche steht. Wir hatten in diesem Falle die Gleichungen der Deformation, bezogen auf die nunmehr zueinander rechtwinkligen Hauptachsen, in folgender Form angesetzt:

$$u = \alpha x, \quad v = \beta y, \quad w = \gamma z, \tag{11}$$

die Gleichung der Deformationsfläche wird so:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1. \tag{12}$$

Wir wollen für die Verschiebungslinien gewöhnliche Linienkoordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ einführen. Dann haben wir zu setzen:

$$\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} = u : v : w = \alpha x : \beta y : \gamma z, \tag{13}$$

und weiter:

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} : \mathfrak{m} : \mathfrak{n} &= y\mathfrak{z} - z\mathfrak{y} : z\mathfrak{x} - x\mathfrak{z} : x\mathfrak{y} - y\mathfrak{x} \\ &= (\gamma - \beta) yz : (\alpha - \gamma) zx : (\beta - \alpha) xy. \end{aligned} \tag{13a}$$

Damit wird:

$$\mathfrak{l}\mathfrak{x} : \mathfrak{m}\mathfrak{y} : \mathfrak{n}\mathfrak{z} = \alpha(\gamma - \beta) : \beta(\alpha - \gamma) : \gamma(\beta - \alpha), \tag{14}$$

und diese Proportion, aus der die von den Linienkoordinaten zu erfüllende Identität:

$$\mathfrak{l}\mathfrak{x} + \mathfrak{m}\mathfrak{y} + \mathfrak{n}\mathfrak{z} = 0$$

sofort folgt, können wir als die Darstellung des Reyeschen Komplexes auffassen.

Anderseits erhalten wir für einen Komplexstrahl die den Gleichungen (2) entsprechende Parameterdarstellung:

$$(15) \quad x' = (1 + \varrho\alpha)x, \quad y' = (1 + \varrho\beta)y, \quad z' = (1 + \varrho\gamma)z,$$

indem wir mit x, y, z die Koordinaten des Poles und mit x', y', z' laufende Koordinaten bezeichnen. Diese Formeln gestatten aber bei Heranziehung der Deformationsfläche eine einfache Deutung. Suchen wir nämlich von dem Pole die Polarebene bezüglich der Deformationsfläche, so erhalten wir für dieselbe die Gleichung:

$$\alpha x x_1 + \beta y y_1 + \gamma z z_1 = 1,$$

wenn wir die laufenden Koordinaten mit x_1, y_1, z_1 bezeichnen. Denken wir uns diese Ebenengleichung auf die Normalform gebracht:

$$\cos\lambda\, x_1 + \cos\mu\, y_1 + \cos\nu\, z_1 = p,$$

so ergibt sich für die Richtungskosinus der Ebenennormalen:

$$\cos\lambda = \alpha x \cdot p, \quad \cos\mu = \beta y \cdot p, \quad \cos\nu = \gamma z \cdot p,$$

damit aber werden die Gleichungen (15), wenn wir noch

$$\frac{\varrho}{p} = r$$

machen:

$$(16) \quad x' = x + r\cos\lambda, \quad y' = y + r\cos\mu, \quad z' = z + r\cos\nu,$$

und diese Ausdrücke zeigen sofort, daß wir die Verschiebungslinie eines Punktes P bekommen, indem wir aus demselben auf seine Polarebene bezüglich der Deformationsfläche das Lot fällen.

Suchen wir von der Verschiebungslinie die reziproke Polare bezüglich der Deformationsfläche, so muß dieselbe in der Polarebene des Punktes P liegen, sie kreuzt also die Verschiebungslinie von P unter rechtem Winkel. Wenn anderseits zwei reziproke Polaren der Deformationsfläche sich rechtwinklig kreuzen, so gehören sie dem Reyeschen Komplex der Verschiebungslinien an, denn legt man durch die eine von ihnen die Normalebene π zur anderen, so muß der Pol P dieser Ebene auf der letzteren Linie liegen (nach der allgemeinen Eigenschaft reziproker Polaren), diese Linie ist also das Lot, das man von dem Punkte P auf seine Polarebene π fällt, mithin die Verschiebungslinie dieses Punktes.

Daraus ist nun weiter zu sehen, daß der Reyesche Komplex aus den Hauptachsen aller ebenen Schnittkurven der Deformationsfläche besteht. Denn die reziproke Polare einer solchen Hauptachse muß durch den Pol der letzteren bezüglich der Schnittkurve, d. h. durch den unendlich fernen Punkt der anderen Hauptachse dieser Schnittkurve hindurchgehen, sie ist also der zweiten Hauptachse parallel und kreuzt die erste rechtwinklig, so daß diese, weil sie von ihrer reziproken Polaren rechtwinklig gekreuzt wird, in der Tat zu dem Reyeschen Komplex gehört. Dieser Komplex wird deswegen von Reye der Achsenkomplex der Fläche zweiter Ordnung (in unserem Falle der Deformationsfläche) genannt.

Zu dem Achsenkomplex gehören alle Normalen der Deformationsfläche. Wenn wir nämlich den Pol P auf der Deformationsfläche annehmen, so wird die Polarebene die Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte und die zugehörige Verschiebungslinie die Normale der Tangentialebene in ihrem Berührungspunkte, also eine Normale der Fläche selbst. Alle Strahlen des Achsenkomplexes kann man erhalten, indem man die Fußpunkte zweier Flächennormalen, die in einer Ebene liegen, verbindet.[1]) Sucht man nämlich von dieser Verbindungslinie die reziproke Polare bezüglich der Deformationsfläche, so ist diese Polare die Schnittlinie der Tangentialebenen in den Fußpunkten der beiden Normalen. Diese Schnittlinie steht aber senkrecht auf der Verbindungsebene der beiden Normalen und kreuzt somit die Verbindungslinie der Normalenfußpunkte, da diese in jener Verbindungsebene liegt, rechtwinklig. Die Verbindungslinie der Normalenfußpunkte gehört demnach, weil sie von ihrer reziproken Polaren rechtwinklig gekreuzt wird, dem Achsenkomplexe an.

Man kann den Achsenkomplex endlich gewinnen, indem man auf jeder Ebene in dem Mittelpunkte ihrer Schnittkurve mit der Deformationsfläche das Lot errichtet. Alle diese Lote bilden den Komplex. Es ist nämlich die Polarebene des Mittelpunktes einer ebenen Schnittkurve der Ebene dieser Kurve parallel, denn dem Mittelpunkte sind alle unendlich fernen Punkte in der Ebene der Kurve konjugiert bezüglich der Fläche zweiter Ordnung; durch diese sämtlichen Punkte muß also die Polarebene des Mittelpunktes hindurchgehen, d. h. sie ist der Ebene der Schnittkurve parallel. Die reziproke Polare des Lotes im Mittelpunkte muß aber in der gefundenen Parallelebene liegen. Da diese Ebene zu dem Lote selbst normal ist, wird dasselbe von seiner reziproken Polare unter rechtem Winkel gekreuzt und gehört somit zu dem Achsenkomplexe.

1) Waelsch, Sitzungsber. d. Wiener Akademie II A, Bd. 95, 1887, p. 549. S. dazu ebenda Bd. 97, 1888, p. 583.

Durch eine Deformation ist wohl der zugehörige Achsenkomplex bestimmt, aber es ist nicht umgekehrt die Deformation völlig festgelegt, wenn der Achsenkomplex gegeben ist. Um die sämtlichen reinen Deformationen zu finden, die zu einem vorgelegten Achsenkomplex gehören, beachte man zuerst, daß alle diese Deformationen dieselben Hauptachsen haben müssen. Denn die Hauptebenen, welche diese Hauptachsen paarweise verbinden, sind singuläre Ebenen des Achsenkomplexes, indem alle geraden Linien dieser Ebenen zu dem Komplex gehören. Wir denken uns nun den Achsenkomplex durch die Deformation gegeben, deren Gleichungen lauten:

$$u = \alpha x, \quad v = \beta y, \quad w = \gamma z, \tag{11}$$

dann müssen zunächst die Gleichungen jeder anderen Deformation, die denselben Achsenkomplex liefert, auf dasselbe Koordinatensystem bezogen, von der Form sein:

$$u' = \alpha' x, \quad v' = \beta' y, \; w' = \gamma' z. \tag{11a}$$

Zufolge der Darstellung (14) des Achsenkomplexes muß aber die Proportion bestehen:

$$\alpha(\gamma-\beta) : \beta(\alpha-\gamma) : \gamma(\beta-\alpha) = \alpha'(\gamma'-\beta') : \beta'(\alpha'-\gamma') : \gamma'(\beta'-\alpha')$$

oder:

$$\left[\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right] : \left[\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right] : \left[\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right] = \left[\frac{1}{\beta'}-\frac{1}{\gamma'}\right] : \left[\frac{1}{\gamma'}-\frac{1}{\alpha'}\right] : \left[\frac{1}{\alpha'}-\frac{1}{\beta'}\right].$$

Gemäß dieser Proportion haben wir zu setzen:

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{\mu}{\alpha} + \nu, \quad \frac{1}{\beta'} = \frac{\mu}{\beta} + \nu, \quad \frac{1}{\gamma'} = \frac{\mu}{\gamma} + \nu, \tag{17}$$

wobei μ und ν willkürlich bleiben, und damit werden die Gleichungen der zweiten Deformation:

$$u' = \frac{\alpha}{\mu + \alpha\nu} x, \quad v' = \frac{\beta}{\mu + \beta\nu} y, \quad w' = \frac{\gamma}{\mu + \gamma\nu} z. \tag{18}$$

Die Gleichung der zugehörigen Deformationsfläche schreibt sich am einfachsten, wenn wir setzen:

$$\frac{1}{\alpha} = A, \quad \frac{1}{\beta} = B, \quad \frac{1}{\gamma} = C, \quad \frac{\nu}{\mu} = \lambda, \tag{19}$$

sie lautet dann:

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} = \mu. \tag{20}$$

Lassen wir hierin λ und μ alle möglichen Werte annehmen, so erhalten wir ein Netz von doppelt unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung, die alle denselben Achsenkomplex liefern und die Reye deshalb als koaxiale Flächen bezeichnet. Gibt man μ einen bestimmten Wert, macht man etwa $\mu = 1$, so wird durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} = 1 \tag{20a}$$

eine Schar konfokaler Flächen dargestellt[1]), und der Achsenkomplex wird gebildet von den Normalen der Flächen dieser konfokalen Schar.

Man erkennt auch aus der ursprünglichen Erzeugung des Achsenkomplexes sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes: Die Pole einer beliebigen Ebene für alle Flächen der konfokalen Schar erfüllen eine zu der Ebene senkrechte Linie[2]), und alle Linien, die man für die verschiedenen Ebenen des Raumes so erhält, bilden den zu der konfokalen Flächenschar gehörigen Achsenkomplex.

Werden nun in der Gleichung (20a) den Koordinaten x, y, z bestimmte Werte erteilt, so wird sie vom dritten Grade für λ, und denkt man sich die Werte, welche ihre linke Seite für die verschiedenen Werte von λ annimmt, graphisch aufgetragen, so erkennt man leicht[3]), daß die Gleichung immer drei reelle Wurzeln hat, für die resp. 1, 2 oder 3 der Ausdrücke $A+\lambda$, $B+\lambda$, $C+\lambda$ positiv ausfallen. Daraus ergibt sich, daß durch einen beliebigen Punkt des Raumes drei Flächen der konfokalen Schar gehen und zwar ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid.

Führen wir jetzt durch die allgemeine Ebenengleichung:

$$\xi x + \eta y + \zeta z - \theta = 0$$

homogene Ebenenkoordinaten ξ, η, ζ, θ ein, so wird die in Punktkoordinaten durch die Gleichung (20a) gegebene Fläche in diesen Ebenenkoordinaten dargestellt durch die Gleichung:

$$(A+\lambda)\xi^2 + (B+\lambda)\eta^2 + (C+\lambda)\zeta^2 = \theta^2, \tag{21}$$

oder nach λ geordnet:

$$(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - \theta^2) + \lambda(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0. \tag{21a}$$

Man sieht also, daß die Tangentialgleichung einer beliebigen Fläche der konfokalen Schar durch lineare Kombination aus den beiden Gleichungen:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - \theta^2 = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

hervorgeht.

---

1) Vgl. Dupin, Développements de géométrie, 1813, p. 269, Binet, Journ. de l'École polyt., Cah. 16, 1813, p. 59.

2) Dieser Satz ist von Chasles, Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie, 1837, p. 387, aufgestellt worden.

3) Vgl. z. B. Kirchhoff, Mechanik, p. 201f.

Wir wollen nun die Tangentialkegel zu bestimmen suchen, die von einem beliebigen Punkte P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 an die konfokalen Flächen gehen. Dann hat man der Gleichung (21) oder (21a) die Gleichung:

$$\xi x_0 + \eta y_0 + \zeta z_0 = \theta$$

hinzuzufügen, welche ausdrückt, daß die Tangentialebene der Fläche durch den angenommenen Punkt P_0 hindurchgeht. Eliminiert man mit Hilfe dieser Gleichung aus (21a) das θ, so erhält man:

$$(22)\quad \{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - (x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta)^2\} + \lambda\{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\} = 0.$$

Hierbei sind ξ, η, ζ den Richtungskosinus der Normalen auf der zugehörigen Ebene proportional und lassen sich auffassen als Koordinaten der Ebene innerhalb des Bündels mit dem Scheitel P_0. Wenn wir uns nun das Koordinatenkreuz irgendwie gedreht denken, so gehen ξ, η, ζ in neue Werte ξ', η', ζ' über, die homogene lineare Funktionen von den alten Werten sind und die identische Beziehung:

$$(23)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

befriedigen. Ferner können wir uns das neue Koordinatenkreuz und bestimmte Größen A', B', C' so gewählt denken, daß:

$$(24)\quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - (x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta)^2 = A'\xi'^2 + B'\eta'^2 + C'\zeta'^2$$

wird. Dann wird die Schar der Tangentialkegel aus dem Punkte P_0 durch die neue Gleichung dargestellt:

$$(25)\qquad (A' + \lambda)\xi'^2 + (B' + \lambda)\eta'^2 + (C' + \lambda)\zeta'^2 = 0.$$

Die Ebenen, welche senkrecht zu den neuen Koordinatenachsen durch den Punkt P_0 gelegt werden, sind, wie man aus der Form dieser Gleichung sofort sieht, die gemeinsamen Symmetrieebenen der Tangentialkegel. Die nähere Bedeutung dieser Ebenen erhellt folgendermaßen.

Durch geeignete Wahl von λ kann man einen der Koeffizienten in der vorstehenden Gleichung gleich Null machen, z. B. reduziert sich für $\lambda = -B'$ die Gleichung auf:

$$(26)\qquad (A' - B')\xi'^2 - (B' - C')\zeta'^2 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich aber in zwei Linearfaktoren zerfällen und stellt somit einen ausgearteten Kegel, nämlich ein Paar von Ebenenbüscheln, dar, deren Achsen sich in P_0 schneiden. Diese Achsen brauchen aber nicht reell zu sein, denn die Gleichung ist nur dann in reelle Linearfaktoren zerfällbar, wenn $A' - C'$ und $B' - C'$ gleiche Vorzeichen haben. Immer reell aber ist die Verbindungsebene der beiden Büschelachsen. Dieselbe wird durch $\xi' = 0$, $\zeta' = 0$ gegeben, denn für diese Werte von ξ', ζ' verschwinden die beiden

Linearfaktoren der Gleichung. Diese Verbindungsebene ist sonach eine von den Symmetrieebenen der Tangentialkegel. Die beiden Büschelachsen, durch die unendlich viele Tangentialebenen einer der konfokalen Flächen gehen, müssen aber zwei Regelstrahlen dieser Fläche sein, und ihre Verbindungsebene muß eine Tangentialebene derselben Fläche sein und diese in dem Schnittpunkte der beiden Regelstrahlen, also in P_0, berühren. Die drei Symmetrieebenen der Tangentialkegel bilden also die Tangentialebenen der drei durch den Punkt P_0 gehenden Flächen der konfokalen Schar, und da diese Tangentialebenen aufeinander senkrecht stehen, schneiden sich die drei konfokalen Flächen orthogonal. Die drei Linien, in denen sich die drei Ebenen paarweise durchschneiden, sind die Normalen der drei Flächen in dem Punkte P_0 und gehören somit zu dem Achsenkomplex. Gleichzeitig sind sie die gemeinsamen Hauptachsen der Tangentialkegel. Greifen wir nun aus der Schar der Tangentialkegel den Tangentialkegel der ursprünglichen Deformationsfläche heraus und beachten, daß, was für den einen Punkt P_0 gesagt wurde, für jeden Punkt des Raumes gilt, so ergibt sich:

Der Achsenkomplex wird gebildet von den Hauptachsen der Tangentialkegel, die man aus den verschiedenen Punkten des Raumes an die Deformationsfläche legt.

Nehmen wir an, die Gleichung (26) liefere das reelle Strahlenpaar, das auf dem durch den Punkt P_0 gehenden einschaligen Hyperboloid der konfokalen Flächenschar liegt, so haben diese beiden Strahlen eine besondere Bedeutung für die durch die Gleichung (25) dargestellten Kegel. Sie sind nämlich die gemeinsamen Brennstrahlen dieser Kegel[1]) und den Brennpunkten eines ebenen Kegelschnittes durchaus analog. Die Kegel heißen, weil sie die Brennstrahlen gemein haben, selbst konfokal und wir finden somit: Die Tangentialkegel, die von einem beliebigen Punkte an die konfokalen Flächen gehen, bilden eine Schar konfokaler Kegel.

Denken wir uns von irgendeinem Punkte P_0 die Normalen auf die konfokalen Flächen gefällt, so bilden diese alle durch P_0 gehenden Komplexstrahlen und erfüllen den Komplexkegel dieses Punktes. Dieser Kegel ist ein gleichseitiger Kegel[2]), d. h. es liegen auf ihm drei zueinander senkrechte Strahlen und damit unendlich viele solche Strahlentripel. Unter diesen wird eines von den Normalen der drei durch den Punkt P_0 selbst hindurchgehenden Flächen gebildet, ein zweites erhält man, indem man durch P_0 die Parallelen zu den gemeinsamen Hauptachsen der konfokalen Flächen zieht.

---

1) Man vgl. noch Jacobi, Journ. f. Math. 12 (1834) p. 137, Werke VII, p. 7.
2) Vgl. Vogt, Journal f. Math., Bd. 86 (1879), p. 297.

Der gleichseitige Kegel wird überdeckt von unendlich vielen Raumhyperbeln, die den Ort der Pole aller durch den Punkt P_0 gehenden Komplexstrahlen für je eine der konfokalen Flächen bilden. Diese Kurven gehen alle durch den gemeinsamen Mittelpunkt der konfokalen Flächen hindurch und nähern sich mit ihren ins Unendliche verlaufenden Ästen asymptotisch den Richtungen der Hauptachsen. Außerdem gehen sie alle durch die Spitze P_0 des Komplexkegels hindurch und berühren hier jedesmal den Strahl des Kegels, der auf der Polarebene von P_0 für die betreffende Fläche der konfokalen Schar senkrecht steht. So aber ist die Raumkurve eindeutig festgelegt. Sie hat, vom algebraischen Standpunkte aus gesprochen, sechs Punkte mit der zugehörigen Fläche der konfokalen Schar gemein, und jeder dieser Punkte, der reell ist, ergibt mit P_0 verbunden eine Normale der Fläche, die durch den Punkt P_0 hindurchgeht. Auf diese Weise findet das Problem, die Normalen einer Fläche zweiter Ordnung zu finden, die durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen, seine systematische Erledigung.

Achtzehntes Kapitel.

Astatik.

Wir hatten früher gesehen, daß ein System paralleler Kräfte im allgemeinen einer Einzelkraft statisch äquivalent ist. Diese Einzelkraft ist mit den parallelen Kräften gleichgerichtet und an Größe gleich der algebraischen Summe aller dieser Kräfte. Für ihren Angriffspunkt fanden wir einen bestimmten Punkt, den Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Dann aber zeigte sich, daß die statische Äquivalenz nicht abhängig ist von der gemeinsamen Richtung aller Kräfte, daß sie somit erhalten bleibt, wenn alle Kräfte einer und derselben Drehung um ihre Angriffspunkte unterworfen werden. Für eine solche verstärkte Art der Äquivalenz wollen wir nun ein besonderes Wort gebrauchen und sie als astatische Äquivalenz bezeichnen. Statt alle Kräfte um ihre Angriffspunkte zu drehen, kann man auch das System dieser Angriffspunkte als starres Massensystem irgendeiner Ortsänderung unterwerfen, während die Kräfte ihre Richtung und Größe beibehalten. Bezieht man bei dieser Auffassung die Angriffspunkte und Kräfte auf ein mit dem Massensystem bewegliches Koordinatensystem, so bleiben in diesem die Koordinaten der Angriffspunkte erhalten, die Komponenten der Kräfte aber ändern sich genau so, als ob diese einer gemeinschaftlichen Drehung um ihre Angriffspunkte unterzogen worden wären. Beide Auffassungen sind also in Wirklichkeit gleichwertig.

Wenn R_ϱ die Größe der ϱ^{ten} Kraft in dem System paralleler Kräfte ist, x_ϱ, y_ϱ, z_ϱ die Koordinaten ihres Angriffspunktes sind, so setzen wir:

$$(1)\quad R = \sum R_\varrho,\ R \cdot x = \sum R_\varrho x_\varrho,\ R \cdot y = \sum R_\varrho y_\varrho,\ R \cdot z = \sum R_\varrho z_\varrho,$$

dann sind x, y, z die Koordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte, an dem die den Kräften wieder parallele Resultante von der algebraischen Größe R angreifen muß, damit die Äquivalenz auch nach einer gemeinsamen Drehung aller Kräfte erhalten bleibt.

Wenn $\Sigma R_\varrho = 0$ wird, ist das Kräftesystem jedem Kräftepaar astatisch äquivalent, dessen Kräfte den Kräften des Systems parallel, aber von beliebiger Größe R_0 sind, und von dem der Arm durch die Gleichungen:

$$(2)\qquad R_0 a = \sum R_\varrho x_\varrho,\quad R_0 b = \sum R_\varrho y_\varrho,\quad R_0 c = \sum R_\varrho z_\varrho$$

bestimmt wird, in denen

$$(3)\qquad a = x - x',\quad b = y - y',\quad c = z - z'$$

die Komponenten des Armes bedeuten. Die Richtung des Armes ist so durch das vorgelegte Kräftesystem eindeutig bestimmt, der Angriffspunkt der einen Kraft des Kräftepaares bleibt aber völlig willkürlich. Was die Länge des Armes

$$(4)\qquad r_0 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

betrifft, so ergibt sich aus den vorstehenden Gleichungen sofort:

$$(5)\qquad R_0 r_0 = \sqrt{[\Sigma R_\varrho x_\varrho]^2 + [\Sigma R_\varrho y_\varrho]^2 + [\Sigma R_\varrho z_\varrho]^2}.$$

Das Produkt $R_0 \cdot r_0$ aus Kraft und Arm ist somit durch das vorgelegte Kräftesystem vollkommen bestimmt oder, wie wir sagen wollen, eine Invariante des Kräftesystems. Wir wollen es als das astatische Moment des resultierenden Kräftepaares bezeichnen.

Wir wollen nun auch zwei Kräftesysteme, die aus nicht parallelen Kräften bestehen, astatisch äquivalent nennen, wenn sie statisch äquivalent sind und diese statische Äquivalenz sich nicht ändert bei einer beliebigen gemeinschaftlichen Drehung aller Kräfte um ihre Angriffspunkte (d. h. einer Drehung um gleiche Winkel und um parallele Achsen, die jedesmal durch den Angriffspunkt der betreffenden Kraft gehen).[1] Wir bezeichnen in der Gaußischen Weise eine Summa-

[1] Für die folgenden Seiten sind zu vergleichen die betreffenden Abschnitte aus nachstehenden Lehrbüchern: Minding, Handbuch der theoretischen Mechanik, 1837, Moebius, Lehrbuch der Statik, 1837, Broch, Lehrbuch der Mechanik, 1854, Moigno, Leçons de mécanique analytique, Statique 1868, Somoff, Theoretische Mechanik, 2. Band, 1879, Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., 1879—80, Routh, A treatise on analytical Statics, 2. ed., Vol. 2, 1902.

tion, die sich über alle Kräfte eines Systems erstreckt, indem wir die zu summierenden Größen ohne Hinzufügung eines Index in eckige Klammern schließen. Es sollen dann die 12 Ausdrücke:

$$\begin{aligned}&[Xx],\ [Xy],\ [Xz];\ [X],\\ &[Yx],\ [Yy],\ [Yz];\ [Y],\\ &[Zx],\ [Zy],\ [Zz];\ [Z],\end{aligned}$$

in denen die X, Y, Z die Komponenten, die x, y, z die Koordinaten für die Angriffspunkte der Kräfte bedeuten, die astatischen Koordinaten des Kräftesystems heißen, und wir stellen zunächst den Satz auf: Zwei Kräftesysteme sind astatisch äquivalent, wenn sie in den astatischen Koordinaten übereinstimmen.

Um den Satz zu beweisen, sehen wir zunächst zu, wie die astatischen Koordinaten sich bei einer gemeinsamen Drehung aller Kräfte ändern. Bei einer solchen sind die neuen Kräftekomponenten X_ϱ', Y_ϱ', Z_ϱ' durch die Gleichungen festzulegen:

$$\begin{aligned}X_\varrho' &= \alpha_1 X_\varrho + \alpha_2 Y_\varrho + \alpha_3 Z_\varrho,\\ Y_\varrho' &= \beta_1 X_\varrho + \beta_2 Y_\varrho + \beta_3 Z_\varrho,\\ Z_\varrho' &= \gamma_1 X_\varrho + \gamma_2 Y_\varrho + \gamma_3 Z_\varrho.\end{aligned} \tag{6}$$

Damit wird auch:

$$[X'] = \alpha_1 [X] + \alpha_2 [Y] + \alpha_3 [Z] \text{ usw.} \tag{7a}$$

und ferner:

$$\begin{aligned}[X'x] &= \alpha_1 [Xx] + \alpha_2 [Yx] + \alpha_3 [Zx],\\ [Y'x] &= \beta_1 [Xx] + \beta_2 [Yx] + \beta_3 [Zx],\\ [Z'x] &= \gamma_1 [Xx] + \gamma_2 [Yx] + \gamma_3 [Zx],\\ &\text{usw.}\end{aligned} \tag{7b}$$

Daraus ist zu sehen, daß, wenn die astatischen Koordinaten zweier Kräftesysteme übereinstimmen, sie auch übereinstimmen, nachdem man alle Kräfte beider Systeme einer gemeinschaftlichen Drehung unterzogen hat. Wenn aber zwei Kräftesysteme in den astatischen Koordinaten übereinstimmen, so stimmen sie sicher auch in den statischen Koordinaten:

$$[X],\quad [Y],\quad [Z],\quad [Zy]-[Yz],\quad [Xz]-[Zx],\quad [Yx]-[Xy]$$

überein, sie sind also statisch äquivalent, und damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen nun auch den umgekehrten Satz beweisen, daß zwei Kräftesysteme in den astatischen Koordinaten übereinstimmen, wenn sie astatisch äquivalent sind. Zu dem Zwecke bemerken wir zunächst, daß, wenn wir die Richtungen sämtlicher Kräfte des einen Systems umkehren, ohne sie im übrigen zu ändern, wir aus beiden Systemen zusammen ein System erhalten, das im statischen Gleichgewichte ist und im Gleichgewichte bleibt, wenn wir alle Kräfte einer gemeinsamen Drehung unterwerfen. Von einem solchen System sagen wir, es sei im astatischen Gleichgewicht. Da bei der Umkehrung der Kraftrichtungen alle astatischen Koordinaten ihr Vorzeichen wechseln, so verlangt der zu beweisende Satz nichts anderes, als daß, wenn ein Kräftesystem im astatischen Gleichgewichte ist, seine sämtlichen astatischen Koordinaten verschwinden. Denn wenn die astatischen Koordinaten zweier Kräftesysteme gleich sind und man die Kräfte des einen mit den entgegengesetzten Kräften des anderen vereinigt, so hat man die entgegengesetzten astatischen Koordinaten des einen zu den entsprechenden astatischen Koordinaten des anderen hinzuzufügen, und es ergeben sich überall die resultierenden Koordinaten gleich Null.

Wenn nun ein Kräftesystem im statischen Gleichgewichte ist, so muß:

$$\text{(a)} \qquad [\mathrm{X}] = 0, \quad [\mathrm{Y}] = 0, \quad [\mathrm{Z}] = 0,$$
$$[\mathrm{Zy}] = [\mathrm{Yz}], \quad [\mathrm{Xz}] = [\mathrm{Zx}], \quad [\mathrm{Yx}] = [\mathrm{Xy}]$$

sein. Bleibt das Gleichgewicht bei einer Drehung der sämtlichen Kräfte um die Richtung der z-Achse erhalten, so muß gemäß den obigen Formeln, in denen man jetzt γ_1, γ_2, α_3, $\beta_3 = 0$ und $\gamma_3 = 1$, ferner $\alpha_2 = -\beta_1$, $\beta_2 = \alpha_1$ zu machen hat, auch:

$$[\mathrm{Y'x}] = [\mathrm{X'y}] \quad \text{oder} \quad \beta_1[\mathrm{Xx}] + \alpha_1[\mathrm{Yx}] = \alpha_1[\mathrm{Xy}] - \beta_1[\mathrm{Yy}]$$

für jedes α_1 und entsprechende β_1 werden, mithin:

$$[\mathrm{Yy}] = -[\mathrm{Xx}].$$

Ebenso ergibt sich aber bei einer Drehung um die x- und y-Achse:

$$[\mathrm{Zz}] = -[\mathrm{Yy}], \quad [\mathrm{Xx}] = -[\mathrm{Zz}].$$

Diese Gleichungen sind nur dann vereinbar, wenn:

$$\text{(b)} \qquad [\mathrm{Xx}],\ [\mathrm{Xy}],\ [\mathrm{Zz}] = 0$$

werden. Wir wollen ferner für die Drehung eine unendlich kleine Drehung um eine beliebige Achse wählen. Dann haben wir, wenn τ eine sehr kleine Größe bedeutet, die Transformationsgleichungen:

$$\mathrm{X}_\varrho' = \mathrm{X}_\varrho - \mathrm{r}\tau \mathrm{Y}_\varrho + \mathrm{q}\tau \mathrm{Z}_\varrho,$$
$$\mathrm{Y}_\varrho' = \mathrm{r}\tau \mathrm{X}_\varrho + \mathrm{Y}_\varrho - \mathrm{p}\tau \mathrm{Z}_\varrho,$$
$$\mathrm{Z}_\varrho' = -\mathrm{q}\tau \mathrm{X}_\varrho + \mathrm{p}\tau \mathrm{Y}_\varrho + \mathrm{Z}_\varrho,$$

und die Gleichung $[\mathrm{Y'x}] = [\mathrm{X'y}]$ ergibt demnach mit Rücksicht auf (a):

$$\mathrm{r}[\mathrm{Xx}] - \mathrm{p}[\mathrm{Zx}] = \mathrm{q}[\mathrm{Zy}] - \mathrm{r}[\mathrm{Yy}],$$

d. h. mit Rücksicht auf (b):

$$-\mathrm{p}[\mathrm{Zx}] = \mathrm{q}[\mathrm{Zy}],$$

also weil p und q willkürlich bleiben:

$$\text{(c)} \qquad [\mathrm{Zx}] = 0, \quad [\mathrm{Zy}] = 0.$$

Ebenso findet man:

$$\text{(d)} \qquad [\mathrm{Xy}] = 0, \quad [\mathrm{Xz}] = 0, \quad [\mathrm{Yz}] = 0, \quad [\mathrm{Yx}] = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Unsere nächste Aufgabe wird nun sein, ein Kräftesystem zu finden, das aus möglichst wenig, nämlich drei, Kräften besteht und einem vorgelegten Kräftesystem astatisch äquivalent ist. Von den drei Kräften dürfen die Richtungen beliebig angenommen werden, dadurch aber sind die Kräfte vollständig und eindeutig bestimmt. Um dies nachzuweisen, verfahren wir wie folgt: Wir bezeichnen die Richtungskosinus der drei Kräfte mit α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$. Ihre Größen nennen wir R, R', R'' und die Koordinaten ihrer Angriffspunkte x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''. Dann verlangt die astatische Äquivalenz zunächst, daß:

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} R\alpha + R'\alpha' + R''\alpha'' = [\mathrm{X}], \\ R\beta + R'\beta' + R''\beta'' = [\mathrm{Y}], \\ R\gamma + R'\gamma' + R''\gamma'' = [\mathrm{Z}] \end{cases}$$

wird. Aus diesen drei Gleichungen lassen sich, wenn, was wir annehmen wollen, die drei Kräfte nicht einer Ebene parallel sind, die Werte R, R', R'' in eindeutiger Weise berechnen. Sind sie gefunden, so berechnet man die Koordinaten der Angriffspunkte aus drei weiteren Gleichungssystemen, von denen das erste lautet:

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} R\alpha x + R'\alpha' x' + R''\alpha'' x'' = [\mathrm{Xx}], \\ R\beta x + R'\beta' x' + R''\beta'' x'' = [\mathrm{Yx}], \\ R\gamma x + R'\gamma' x' + R''\gamma'' x'' = [\mathrm{Zx}]. \end{cases}$$

Aus diesem Gleichungssysteme gehen x, x', x'' und aus den beiden anderen analogen Systemen in gleicher Weise y, y', y'' und z, z', z'' in eindeutiger Weise hervor.

Nehmen wir insbesondere die Richtungen der drei Kräfte aufeinander senkrecht an, so finden wir aus den vorstehenden Gleichungen (9) den Wert von x, indem wir sie mit α, β, γ multiplizieren und addieren. Da:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0$$

ist, ergibt sich dann:

$$R \cdot x = [\mathrm{Xx}]\alpha + [\mathrm{Yx}]\beta + [\mathrm{Zx}]\gamma.$$

Aus den Gleichungen (8) folgt aber auf dieselbe Weise:

$$R = [\mathrm{X}]\alpha + [\mathrm{Y}]\beta + [\mathrm{Z}]\gamma. \tag{10}$$

Dividieren wir die beiden gefundenen Gleichungen, so erhalten wir den Wert von x. Der entstehenden Gleichung fügen wir sofort die entsprechenden Gleichungen für y, z hinzu und haben dann:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{[\mathrm{X}\,\mathrm{x}]\alpha + [\mathrm{Y}\,\mathrm{x}]\beta + [\mathrm{Z}\,\mathrm{x}]\gamma}{[\mathrm{X}]\alpha + [\mathrm{Y}]\beta + [\mathrm{Z}]\gamma}, \\ y &= \frac{[\mathrm{X}\,\mathrm{y}]\alpha + [\mathrm{Y}\,\mathrm{y}]\beta + [\mathrm{Z}\,\mathrm{y}]\gamma}{[\mathrm{X}]\alpha + [\mathrm{Y}]\beta + [\mathrm{Z}]\gamma}, \\ z &= \frac{[\mathrm{X}\,\mathrm{z}]\alpha + [\mathrm{Y}\,\mathrm{z}]\beta + [\mathrm{Z}\,\mathrm{z}]\gamma}{[\mathrm{X}]\alpha + [\mathrm{Y}]\beta + [\mathrm{Z}]\gamma}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Die Kraft, deren Richtungskosinus α, β, γ sind, deren Größe R durch die Gleichung (10) gegeben wird, und deren Angriffspunkt die aus (11) hervorgehenden Koordinaten x, y, z hat, nennen wir die Komponente des Kräftesystems nach der durch die Richtungskosinus α, β, γ festgelegten Richtung. Die Bedeutung dieser Komponente erhellt noch weiter aus folgender Bemerkung. Setzen wir:

$$R_\varrho = \mathrm{X}_\varrho\, \alpha + \mathrm{Y}_\varrho\, \beta + \mathrm{Z}_\varrho\, \gamma,$$

so wird:

$$R = \sum R_\varrho \tag{10a}$$

und die Gleichungen (11) können wir schreiben:

$$x = \frac{\Sigma R_\varrho x_\varrho}{\Sigma R_\varrho}, \quad y = \frac{\Sigma R_\varrho y_\varrho}{\Sigma R_\varrho}, \quad z = \frac{\Sigma R_\varrho z_\varrho}{\Sigma R_\varrho}. \tag{11a}$$

Dies bedeutet aber: Nehmen wir von den einzelnen Kräften des Systems die Komponenten R_ϱ nach der durch die Kosinus α, β, γ fixierten Richtung und vereinigen diese Komponenten als parallele Kräfte, deren Angriffspunkte mit denen der Kräfte des gegebenen Systems übereinstimmen, zu einer resultierenden Kraft, so ist diese die Komponente des gegebenen Kräftesystems nach der betreffenden Richtung. Daraus erkennt man auch, daß Angriffspunkt und Größe der Komponente nicht von der Wahl des zugrunde gelegten Koordinatensystems abhängen.

Aus der Formel (11) folgt, daß insbesondere die Komponenten des gegebenen Kräftesystems nach den Koordinatenachsen in den Punkten angreifen, deren Koordinaten folgende Werte haben:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{[\mathrm{X}\,\mathrm{x}]}{[\mathrm{X}]}, & y_1 &= \frac{[\mathrm{X}\,\mathrm{y}]}{[\mathrm{X}]}, & z_1 &= \frac{[\mathrm{X}\,\mathrm{z}]}{[\mathrm{X}]}, \\ x_2 &= \frac{[\mathrm{Y}\,\mathrm{x}]}{[\mathrm{Y}]}, & y_2 &= \frac{[\mathrm{Y}\,\mathrm{y}]}{[\mathrm{Y}]}, & z_2 &= \frac{[\mathrm{Y}\,\mathrm{z}]}{[\mathrm{Y}]}, \\ x_3 &= \frac{[\mathrm{Z}\,\mathrm{x}]}{[\mathrm{Z}]}, & y_3 &= \frac{[\mathrm{Z}\,\mathrm{y}]}{[\mathrm{Z}]}, & z_3 &= \frac{[\mathrm{Z}\,\mathrm{z}]}{[\mathrm{Z}]}, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

während die Größen dieser Komponenten

$$[X], \quad [Y], \quad [Z]$$

werden.

Die Gleichungen (11) zeigen ferner, daß der Angriffspunkt der Komponente immer in einer bestimmten Ebene liegt, die wir die Zentralebene des Kräftesystems nennen.[1]) Denn wir können α, β, γ aus diesen Gleichungen eliminieren und erhalten dann die Gleichung:

$$\text{(13)} \qquad \begin{vmatrix} x & [Xx] & [Yx] & [Zx] \\ y & [Xy] & [Yy] & [Zy] \\ z & [Xz] & [Yz] & [Zz] \\ 1 & [X] & [Y] & [Z] \end{vmatrix} = 0$$

als Gleichung der Zentralebene, welcher Gleichung wir mit Rücksicht auf die Formeln (12) auch die Gestalt geben können:

$$\text{(13a)} \qquad \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

In der Tat ist es klar, daß auch die Angriffspunkte der Komponenten nach den Koordinatenachsen in der Zentralebene liegen müssen und diese Ebene sonach durch die Punkte mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 hindurchgehen muß.

In der Gleichung (10) sind $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ die Komponenten der statischen Resultanten des Kräftesystems und die Formel zeigt, daß die Größe der Komponente gefunden wird, indem man jene Resultante auf die Richtung, nach der die Komponente zu nehmen ist, projiziert. Die Komponente wird also am größten, wenn man die Richtung der Komponente mit der Richtung der Resultante zusammenfallen läßt, wenn man also annimmt:

$$\alpha = \frac{[X]}{\sqrt{[X]^2+[Y]^2+[Z]^2}}, \quad \beta = \frac{[Y]}{\sqrt{[X]^2+[Y]^2+[Z]^2}}, \quad \gamma = \frac{[Z]}{\sqrt{[X]^2+[Y]^2+[Z]^2}}.$$

Dann wird:

$$\text{(14)} \qquad R = \sqrt{[X]^2+[Y]^2+[Z]^2}$$

und nach (11) werden die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Angriffspunktes:

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{[Xx][X]+[Yx][Y]+[Zx][Z]}{[X]^2+[Y]^2+[Z]^2}, \\[2ex] y_0 = \dfrac{[Xy][X]+[Yy][Y]+[Zy][Z]}{[X]^2+[Y]^2+[Z]^2}, \\[2ex] z_0 = \dfrac{[Xz][X]+[Yz][Y]+[Zz][Z]}{[X]^2+[Y]^2+[Z]^2}. \end{cases}$$

1) Minding, Journ. f. Math., Bd. 15, 1836, p. 27.

Dieser Punkt ist der **Mindingsche Zentralpunkt** des Kräftesystems.[1]) Mit Rücksicht auf die Formeln (12) wird:

$$(15a)\qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{X^2 x_1 + Y^2 x_2 + Z^2 x_3}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ y_0 = \dfrac{X^2 y_1 + Y^2 y_2 + Z^2 y_3}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ z_0 = \dfrac{X^2 z_1 + Y^2 z_2 + Z^2 z_3}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \end{cases}$$

wenn wir die frühere einfachere Bezeichnung $[X] = X$, $[Y] = Y$, $[Z] = Z$ wieder einführen. Da das Koordinatensystem beliebig gewählt ist, die Richtungen der Koordinatenachsen also irgend drei zueinander normale Richtungen vertreten, so zeigen die letzten Formeln: **Nimmt man die Komponenten des Kräftesystems nach irgend drei zueinander normalen Richtungen und denkt sich in den Angriffspunkten dieser Komponenten Massen angebracht, die jedesmal der ins Quadrat erhobenen Größe der betreffenden Komponente proportional sind, so ist der Schwerpunkt dieser Massen allemal der Mindingsche Zentralpunkt.**[2])

Zu dem **statischen** Vektormomente des Kräftesystems für einen Punkt, das wir früher betrachtet haben, führen wir jetzt noch das **astatische** Vektormoment des Kräftesystems für eine Ebene ein. Um dieses Moment zu bilden, leiten wir aus jeder Kraft des Systems einen Vektor ab, dessen Richtung mit der Richtung der Kraft übereinstimmt, während wir seine Länge gleich dem Produkte aus der Größe der Kraft und dem Abstande ihres Angriffspunktes von der Bezugsebene machen. Vereinigen wir die so gefundenen Vektoren nach der Regel für die Addition der Vektoren zu einem einzigen Vektor, so stellt dieser das Vektormoment des Kräftesystems für die betreffende Ebene dar. Während das statische Moment für einen Punkt ein Flächenvektor war, ist das astatische Moment für eine Ebene ein Linienvektor. Wir wollen sofort den analytischen Ausdruck für dieses Moment geben.

Die Gleichung der Bezugsebene denken wir uns in der Form geschrieben:

$$(16)\qquad \xi x + \eta y + \zeta z - \theta = 0$$

und setzen noch:

$$(17)\qquad \sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

dann wird der Abstand des Punktes mit den Koordinaten x_ϱ, y_ϱ, z_ϱ von der Ebene:

$$p_\varrho = \frac{\xi x_\varrho + \eta y_\varrho + \zeta z_\varrho - \theta}{\sigma},$$

1) **Minding**, Journ. f. Math., Bd. 14, 1835, p. 289.

2) **Padeletti**, Rendic. dell' Accad. di Napoli, Vol. 22, 1884, p. 29.

und es sind die Komponenten des zu bildenden Vektors:

$$\mathrm{X}_\varrho p_\varrho, \quad \mathrm{Y}_\varrho p_\varrho, \quad \mathrm{Z}_\varrho p_\varrho,$$

wenn X_ϱ, Y_ϱ, Z_ϱ die Komponenten der in dem Punkte angreifenden Kraft darstellen. Wir haben nun für p_ϱ den davorstehenden Wert einzusetzen und die Summe über alle Kräfte des Systems zu bilden. Nennen wir demnach Ξ, H, Z die Komponenten des resultierenden Vektormomentes, so erhalten wir für dieselben die Gleichungen:

$$(18) \qquad \begin{cases} \sigma\Xi = [\mathrm{Xx}]\,\xi + [\mathrm{Xy}]\,\eta + [\mathrm{Xz}]\,\zeta - [\mathrm{X}]\,\theta, \\ \sigma H = [\mathrm{Yx}]\,\xi + [\mathrm{Yy}]\,\eta + [\mathrm{Yz}]\,\zeta - [\mathrm{Y}]\,\theta, \\ \sigma Z = [\mathrm{Zx}]\,\xi + [\mathrm{Zy}]\,\eta + [\mathrm{Zz}]\,\zeta - [\mathrm{Z}]\,\theta. \end{cases}$$

Die Länge des Vektors, welcher das Vektormoment des Kräftesystems repräsentiert, nennen wir das skalare Moment des Kräftesystems für die betreffende Ebene und bezeichnen es mit Σ, so daß:

$$(19) \qquad \Sigma = \sqrt{\Xi^2 + H^2 + Z^2}$$

zu setzen ist.

Wir wollen nun über das Koordinatensystem in besonderer Weise verfügen. Wir wählen die Zentralebene zur xy-Ebene und den Zentralpunkt zum Koordinatenursprung. Die Gleichung (13) der Zentralebene reduziert sich aber auf $z = 0$, wenn:

$$(\alpha) \qquad [\mathrm{Xz}], \quad [\mathrm{Yz}], \quad [\mathrm{Zz}] = 0$$

wird. Sollen ferner nach den Formeln (15) die Koordinaten des Zentralpunktes x_0, y_0, $z_0 = 0$ werden, so müssen noch die zwei Gleichungen:

$$(\beta) \qquad \begin{cases} [\mathrm{Xx}][\mathrm{X}] + [\mathrm{Yx}][\mathrm{Y}] + [\mathrm{Zx}][\mathrm{Z}] = 0, \\ [\mathrm{Xy}][\mathrm{X}] + [\mathrm{Yy}][\mathrm{Y}] + [\mathrm{Zy}][\mathrm{Z}] = 0 \end{cases}$$

hinzukommen. Setzen wir unter diesen Voraussetzungen in die Gleichung für das skalare Moment Σ die Werte für Ξ, H, Z aus (18) ein, so ergibt sich die Gleichung:

$$(20) \qquad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,\Sigma^2 = \{[\mathrm{Xx}]\,\xi + [\mathrm{Xy}]\,\eta\}^2 + \{[\mathrm{Yx}]\,\xi + [\mathrm{Yy}]\,\eta\}^2 + \{[\mathrm{Zx}]\,\xi + [\mathrm{Zy}]\,\eta\}^2 + \{[\mathrm{X}]^2 + [\mathrm{Y}]^2 + [\mathrm{Z}]^2\}\,\theta^2,$$

oder:

$$(20\mathrm{a}) \qquad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,\Sigma^2 = \Phi + R^2\theta^2,$$

wenn wir:

$$(\gamma) \qquad R^2 = [\mathrm{X}]^2 + [\mathrm{Y}]^2 + [\mathrm{Z}]^2,$$

$$\Phi = \{[\mathrm{Xx}]\,\xi + [\mathrm{Xy}]\,\eta\}^2 + \{[\mathrm{Yx}]\,\xi + [\mathrm{Yy}]\,\eta\}^2 + \{[\mathrm{Zx}]\,\xi + [\mathrm{Zy}]\,\eta\}^2$$

setzen. Sehen wir ξ, η, θ als Koordinaten einer geraden Linie in der xy-Ebene an, nämlich der durch die Gleichung:

$$\xi x + \eta y = \theta$$

gegebenen Linie, so wird:

$$\Phi = \theta^2$$

die Gleichung einer Ellipse in Linienkoordinaten. Denn dieser Gleichung zweiten Grades läßt sich, da Φ als Summe von drei Quadraten erscheint, nur unter der Voraussetzung $\theta \neq 0$ genügen, und der Koordinatenursprung, der durch die Gleichung $\theta = 0$ gegeben wird, ist der Mittelpunkt der Kurve, da mit $\xi : \theta$, $\eta : \theta$ auch $-\xi : \theta$, $-\eta : \theta$ die Gleichung befriedigen. Da also durch den Mittelpunkt ($\theta = 0$) keine reellen Tangenten (d. h. keine reellen Asymptoten) des Kegelschnittes gehen, ist er in der Tat eine Ellipse. Legen wir die x- und y-Achse in die Hauptachsen dieser Ellipse, so wird ihre Gleichung von der Form:

$$P^2\xi^2 + Q^2\eta^2 = \theta^2,$$

und damit erhalten wir bei dieser Wahl des Koordinatensystems:

$$\Phi = P^2\xi^2 + Q^2\eta^2,$$

was bedeutet, daß:

$$(\delta) \begin{cases} [\mathrm{Xx}][\mathrm{Xy}] + [\mathrm{Yx}][\mathrm{Yy}] + [\mathrm{Zx}][\mathrm{Zy}] = 0 \\ [\mathrm{Xx}]^2 + [\mathrm{Yx}]^2 + [\mathrm{Zx}]^2 = P^2,\ [\mathrm{Xy}]^2 + [\mathrm{Yy}]^2 + [\mathrm{Zy}]^2 = Q^2 \end{cases}$$

wird, wobei wir $P^2 > Q^2$ voraussetzen wollen.

Die Gleichung (20a) wird jetzt:

$$(20\text{b}) \qquad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,\Sigma^2 = P^2\xi^2 + Q^2\eta^2 + R^2\theta^2$$

oder:

$$(20\text{c}) \qquad (\Sigma^2 - P^2)\,\xi^2 + (\Sigma^2 - Q^2)\,\eta^2 + \Sigma^2\zeta^2 = R^2\theta^2.$$

Durch diese Gleichung wird, wenn wir in ihr Σ als konstant ansehen, eine Fläche zweiten Grades in Ebenenkoordinaten dargestellt. Die Gleichung derselben Fläche in Punktkoordinaten lautet:

$$(21) \qquad \frac{x^2}{\Sigma^2 - P^2} + \frac{y^2}{\Sigma^2 - Q^2} + \frac{z^2}{\Sigma^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Lassen wir hierin Σ nach und nach alle möglichen Werte annehmen, so erhalten wir die sämtlichen reellen Flächen einer konfokalen Flächenschar. Die Ebenen konstanten skalaren Momentes umhüllen also die Flächen einer konfokalen Flächenschar. Das Moment wird Null nur für eine reelle Ebene, nämlich nur dann, wenn in (20c) ξ, η, $\theta = 0$ werden. Die Gleichung dieser Ebene lautet $z = 0$, es ist also die Zentralebene.

Gemäß den Gleichungen (α) können wir bei Zugrundelegung dieses besonderen Koordinatensystems setzen:

$$(22)\quad \begin{cases} [\mathrm{Xx}] = P\alpha_1, & [\mathrm{Xy}] = Q\alpha_2, \quad [\mathrm{Xz}] = 0; \quad [\mathrm{X}] = R\alpha_3, \\ [\mathrm{Yx}] = P\beta_1, & [\mathrm{Yy}] = Q\beta_2, \quad [\mathrm{Yz}] = 0; \quad [\mathrm{Y}] = R\beta_3, \\ [\mathrm{Zx}] = P\gamma_1, & [\mathrm{Zy}] = Q\gamma_2, \quad [\mathrm{Zz}] = 0; \quad [\mathrm{Z}] = R\gamma_3. \end{cases}$$

Die Gleichungen (β), (γ), (δ) gehen dann über in:

$$(23)\quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, & \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1, & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Diese Formeln zeigen aber, daß $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_3; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Richtungskosinus dreier zueinander normalen Richtungen sind. Wir können also die Kräfte so um ihre Angriffspunkte drehen, daß die astatischen Koordinaten, nach dem Schema der Formeln (22) geordnet, die folgenden werden:

$$\begin{matrix} P, & 0, & 0; & 0, \\ 0, & Q, & 0; & 0, \\ 0, & 0, & 0; & R. \end{matrix}$$

Gehen wir nämlich von diesen Koordinatenwerten aus und unterwerfen die Kräfte einer gemeinsamen Drehung, so erhalten wir nach den Formeln (7a) und (7b) die neuen astatischen Koordinaten:

$$\begin{matrix} P\alpha_1, & Q\alpha_2, & 0; & R\alpha_3, \\ P\beta_1, & Q\beta_2, & 0; & R\beta_3, \\ P\gamma_1, & Q\gamma_2, & 0; & R\gamma_3, \end{matrix}$$

also genau die Werte (22).

Es ist an dieser Stelle noch zu bemerken, daß das skalare Moment seiner Definition nach durch eine gemeinsame Drehung aller Kräfte des Systems nicht geändert wird. Denn unterwirft man eine Anzahl Vektoren einer gemeinsamen Drehung, so dreht sich der resultierende Vektor mit und seine Länge ändert sich nicht. Mit dem skalaren Moment bleibt auch die konfokale Flächenschar bei einer Drehung aller Kräfte ungeändert. Damit steht in Übereinstimmung, daß ihre Gleichung von den Richtungskosinus, die in den Formeln (22) vorkommen, unabhängig ist.

Setzt man jetzt in die Formeln (11), die für die Koordinaten des Angriffspunktes einer Komponente des Kräftesystems gelten, für die astatischen Koordinaten die Werte (22) ein, so wird:

$$x = \frac{P}{R} \cdot \frac{\alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma}{\alpha_3\alpha + \beta_3\beta + \gamma_3\gamma},$$

$$y = \frac{Q}{R} \cdot \frac{\alpha_2\alpha + \beta_2\beta + \gamma_2\gamma}{\alpha_3\alpha + \beta_3\beta + \gamma_3\gamma}, \quad z = 0.$$

Bilden wir diese Formeln noch einmal für die Koordinaten x', y', z' des Angriffspunktes der Komponente nach einer anderen Richtung, die durch die Richtungskosinus α' β' γ' charakterisiert ist, so ergibt sich:

$$xx' = \frac{P^2}{R^2} \cdot \frac{(\alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma)(\alpha_1\alpha' + \beta_1\beta' + \gamma_1\gamma')}{(\alpha_3\alpha + \beta_3\beta + \gamma_3\gamma)(\alpha_3\alpha' + \beta_3\beta' + \gamma_3\gamma')},$$

$$yy' = \frac{Q^2}{R^2} \cdot \frac{(\alpha_2\alpha + \beta_2\beta + \gamma_2\gamma)(\alpha_2\alpha' + \beta_2\beta' + \gamma_2\gamma')}{(\alpha_3\alpha + \beta_3\beta + \gamma_3\gamma)(\alpha_3\alpha' + \beta_3\beta' + \gamma_3\gamma')},$$

und hieraus folgt, da auch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Richtungskosinus dreier zueinander normalen Richtungen darstellen:

$$\frac{xx'}{P^2} + \frac{yy'}{Q^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'}{(\alpha_3\alpha + \beta_3\beta + \gamma_3\gamma)(\alpha_3\alpha' + \beta_3\beta' + \gamma_3\gamma')}.$$

Sind die beiden Richtungen, nach denen die Komponenten genommen werden, zueinander normal, so wird:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

und damit:

$$(24) \qquad \frac{xx'}{P^2} + \frac{yy'}{Q^2} = -\frac{1}{R^2}.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die beiden Angriffspunkte in der xy-Ebene, d. h. der Zentralebene, einander konjugiert sind in dem Antipolarsystem der Ellipse, die durch die Gleichung:

$$(25) \qquad \frac{x^2}{P^2} + \frac{y^2}{Q^2} = \frac{1}{R^2}$$

gegeben wird. (Man bezeichnet als Antipolare eines Punktes die gerade Linie, welche der Polare des Punktes parallel ist und zu ihr symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes der Ellipse liegt. Zwei Punkte sind einander konjugiert in dem Antipolarsystem, wenn der eine auf der Antipolare des anderen liegt.) Die Angriffspunkte der Komponenten nach drei zueinander normalen Richtungen bilden somit in der Zentralebene die Ecken eines Dreiecks, dessen Ecken einander paarweise in dem Antipolarsystem konjugiert sind, das also ein Poldreieck dieses Antipolarsystems ist.[1])

Aus den Formeln (22) leiten wir die folgenden Werte für die statischen Koordinaten des Kräftesystems ab:

$$(26) \qquad \mathrm{X} = R\alpha_3,\ \mathrm{Y} = R\beta_3,\ \mathrm{Z} = R\gamma_3,\ \mathrm{L} = Q\gamma_2,\ \mathrm{M} = -P\gamma_1,\ \mathrm{N} = P\beta_1 - Q\alpha_2.$$

Der Parameter der durch das Kräftesystem repräsentierten Dyname ist durch die Formel definiert:

1) Darboux, Mémoire sur l'équilibre astatique, Paris 1877, vorher in den Mémoires der Akademie von Bordeaux (2) 2.

$$k = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

somit ergibt sich hier:

$$k = \frac{Q\gamma_2\alpha_3 - P\gamma_1\beta_3 + (P\beta_1 - Q\alpha_2)\gamma_3}{R} = \frac{(\beta_1\gamma_3 - \gamma_1\beta_3)P + (\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3)Q}{R}.$$

Es ist aber $\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3$ der zweite Richtungskosinus der Richtung, die auf den durch α_2, β_2, γ_2 und α_3, β_3, γ_3 gegebenen Richtungen senkrecht ist, d. h. nichts anderes als β_1. Ebenso wird $\beta_1\gamma_3 - \gamma_1\beta_3 = -\alpha_2$ und wir erhalten:

$$k = \frac{-\alpha_2 P + \beta_1 Q}{R}. \tag{27}$$

Ist das Kräftesystem einer Einzelkraft statisch äquivalent, so wird $k = 0$ und somit:

$$\alpha_2 P = \beta_1 Q. \tag{28}$$

Wir können dann aber setzen:

$$L = Zy - Yz, \quad M = Xz - Zx, \quad N = Yx - Xy,$$

wenn x, y, z die Koordinaten irgendeines Punktes auf der Wirkungslinie der Kraft sind. Nehmen wir für diesen Punkt den Schnittpunkt der Wirkungslinie mit der yz-Ebene, setzen also $x = 0$, so erhalten wir:

$$N = -Xy, \quad M = Xz$$

oder gemäß (26):

$$P\beta_1 - Q\alpha_2 = -R\alpha_3 y, \quad -P\gamma_1 = R\alpha_3 z. \tag{28a}$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit P, so können wir sie mit Rücksicht auf (28) schreiben:

$$(P^2 - Q^2)\beta_1 = -PR\alpha_3 y.$$

Quadrieren wir diese Gleichung und dividieren wir sie durch $P^2 - Q^2$, so bekommen wir, da wegen (28) $(P^2 - Q^2)\beta_1^2 = P^2(\beta_1^2 - \alpha_2^2)$ wird:

$$\beta_1^2 - \alpha_2^2 = R^2\alpha_3^2 \frac{y^2}{P^2 - Q^2}.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (28a) folgt unmittelbar:

$$\gamma_1^2 = R^2\alpha_3^2 \frac{z^2}{P^2}.$$

Addieren wir die so gefundenen beiden Gleichungen, so erhalten wir, da $\beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 - \alpha_1^2$ wird:

$$1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = R^2\alpha_3^2 \left\{\frac{y^2}{P^2 - Q^2} + \frac{z^2}{P^2}\right\}.$$

Es ist aber auch:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \text{ also } 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \alpha_3^2,$$

und damit reduziert sich die letzte Gleichung auf:

$$(29) \qquad \frac{y^2}{P^2 - Q^2} + \frac{z^2}{P^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Ebenso findet man für den Schnittpunkt der Wirkungslinie mit der xz-Ebene:

$$(29\text{a}) \qquad -\frac{x^2}{P^2 - Q^2} + \frac{z^2}{Q^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Wir sehen also, daß die Wirkungslinie der resultierenden Einzelkraft immer zwei bestimmte Kegelschnitte trifft, von denen der eine, in der yz-Ebene gelegene, eine Ellipse, der andere, in der xz-Ebene gelegene, eine Hyperbel ist, und zwar erkennt man leicht, daß von diesen in zwei zueinander senkrechten Ebenen liegenden Kegelschnitten jeder durch die Brennpunkte des anderen geht. Die Tangentialgleichungen der beiden Kegelschnitte lauten:

$$(P^2 - Q^2)\,\eta^2 + P^2\zeta^2 = R^2\theta^2,$$
$$(Q^2 - P^2)\,\xi^2 + Q^2\zeta^2 = R^2\theta^2,$$

und diese beiden Gleichungen gehen aus (20c) hervor, wenn man darin einmal $\Sigma^2 = P^2$ und das andere Mal $\Sigma^2 = Q^2$ macht. Die beiden Kegelschnitte sind also als zwei ausgeartete Flächen in der Schar konfokaler Flächen enthalten und heißen die Fokalkurven dieser Flächen.[1]) So können wir den von Minding herrührenden Satz[2]) aussprechen: Bringt man durch eine gemeinsame Drehung aller Kräfte um ihre Angriffspunkte das Kräftesystem in eine solche Lage, in welcher es einer Einzelkraft statisch äquivalent wird, so trifft die Wirkungslinie dieser Kraft die beiden Fokalkurven der konfokalen Flächenschar.

In einer beliebigen Lage ist das Kräftesystem nicht einer Einzelkraft äquivalent, sondern liefert eine allgemeine Dyname. Wir wollen die Verteilung der Zentralachsen dieser Dynamen im Raume untersuchen. Da es dreifach unendlich viele sind, entsprechend den dreifach unendlich vielen möglichen Drehungen des Kräftesystems, bilden die Zentralachsen einen Linienkomplex, und wir stellen uns die Aufgabe, die Gleichung dieses Linienkomplexes herzuleiten. Wir bezeichnen zu dem Zwecke mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ die Koordinaten der Zentralachse für irgendeine Lage des Kräftesystems. Es wird dann:

---

1) Sie sind zuerst behandelt worden von Dupin, Développements de Géométrie, 1813, p. 277, aber in ihrer vollen Bedeutung zuerst erkannt von Chasles, Aperçu historique etc. (1837), Note XXXI.

2) Minding, Journ. f. Math. 15, p. 27. Vgl. dazu u. a. Chrystal, Trans. of the R. Soc. of Edinburgh, XXIX, 1880, p. 519, Tait, ibid., p. 675, Plarr, Proceedings of the R. Soc. of Edinburgh XI, 1882, p. 528 und Astor, Nouv. Annales de Math. (3) VII, 1888, p. 38.

$$\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:\mathfrak{z}:\mathfrak{l}:\mathfrak{m}:\mathfrak{n} = \mathrm{X}:\mathrm{Y}:\mathrm{Z}:\mathrm{L}-k\mathrm{X}:\mathrm{M}-k\mathrm{Y}:\mathrm{N}-k\mathrm{Z},$$

wobei auf der rechten Seite die Werte von X, Y ... aus (26) und der Wert von k aus (27) einzusetzen sind. So ergibt sich z. B.:

$$\mathrm{L}-k\mathrm{X} = \gamma_2 Q + \frac{\alpha_2 P - \beta_1 Q}{R}\alpha_3 R = \alpha_2\alpha_3 P + (\gamma_2 - \alpha_3\beta_1) Q.$$

Es ist aber $\gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1$, mithin wird:

$$\mathrm{L}-k\mathrm{X} = \alpha_2\alpha_3 P - \alpha_1\beta_3 Q$$

oder:

$$R\mathfrak{l} = \alpha_2 P\mathfrak{x} - \alpha_1 Q\mathfrak{y},$$

und ebenso:

$$R\mathfrak{m} = \beta_2 P\mathfrak{x} - \beta_1 Q\mathfrak{y}, \quad R\mathfrak{n} = \gamma_2 P\mathfrak{x} - \gamma_1 Q\mathfrak{y}.$$

Quadriert und addiert man diese drei Gleichungen, so ergibt sich mit Rücksicht auf (23):

$$(30) \qquad R^2(\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2) = P^2\mathfrak{x}^2 + Q^2\mathfrak{y}^2$$

als Gleichung des gesuchten Komplexes, der sonach vom zweiten Grade ist und den wir als Darbouxschen Komplex bezeichnen.[1])

Wir wollen nachweisen, daß in jedem Strahle dieses Komplexes sich zwei zueinander senkrechte Berührungsebenen der beiden Fokalkurven schneiden. Wir gehen am besten von der Bemerkung aus, daß, wenn zwei Ebenen die Gleichungen haben:

$$ux + vy + wz = 1, \quad u'x + v'y + w'z = 1,$$

die Koordinaten ihrer Schnittlinie mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors ϱ in folgender Form angesetzt werden können (S. 93):

$$\text{(a)} \qquad \varrho\mathfrak{l} = u - u', \quad \varrho\mathfrak{m} = v - v', \quad \varrho\mathfrak{n} = w - w',$$
$$\varrho\mathfrak{x} = vw' - wv', \quad \varrho\mathfrak{y} = wu' - uw', \quad \varrho\mathfrak{z} = uv' - vu'.$$

Berühren die beiden Ebenen je eine der beiden Fokalkurven, so wird:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned}(P^2 - Q^2)u^2 - Q^2 w^2 + R^2 &= 0,\\ (P^2 - Q^2)v'^2 + P^2 w'^2 - R^2 &= 0,\end{aligned}$$

und sollen außerdem die beiden Ebenen aufeinander senkrecht sein, so wird noch:

$$\text{(B)} \qquad uu' + vv' + ww' = 0.$$

Zufolge der letzten Gleichung wird gemäß (a):

$$\varrho^2(\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2) = u^2 + v^2 + w^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2,$$

1) Er ist von Darboux l. c. gefunden worden.

ferner wird wegen derselben Gleichung:

$$\varrho^2 \mathfrak{x}^2 = (vw' - wv')^2 = (v^2 + w^2)(v'^2 + w'^2) - u^2 u'^2,$$
$$\varrho^2 \mathfrak{y}^2 = (wu' - uw')^2 = (u^2 + w^2)(u'^2 + w'^2) - v^2 v'^2.$$

Diese beiden Gleichungen multiplizieren wir mit P^2, Q^2 und addieren sie, dabei setzen wir gemäß den Gleichungen (A):

$$P^2(v'^2 + w'^2) = Q^2 v'^2 + R^2, \quad Q^2(u^2 + w^2) = P^2 u^2 + R^2,$$

dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varrho^2(P^2\mathfrak{x}^2 + Q^2\mathfrak{y}^2) &= (v^2 + w^2)(Q^2 v'^2 + R^2) - P^2 u^2 u'^2 \\ &\quad + (P^2 u^2 + R^2)(u'^2 + w'^2) - Q^2 v^2 v'^2 \\ &= P^2 u^2 w'^2 + Q^2 w^2 v'^2 + R^2(v^2 + w^2 + u'^2 + w'^2). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir aber von den Gleichungen (A) die erste mit $-v'^2$, die zweite mit u^2 und addieren sie, so ergibt sich:

$$P^2 u^2 w'^2 + Q^2 w^2 v'^2 = R^2(u^2 + v'^2),$$

damit wird die vorige Gleichung:

$$\varrho^2(P^2\mathfrak{x}^2 + Q^2\mathfrak{y}^2) = R^2(u^2 + v^2 + w^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2),$$

also wegen der zuerst aus (B) abgeleiteten Gleichung:

$$P^2\mathfrak{x}^2 + Q^2\mathfrak{y}^2 = R^2(\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2),$$

und dies ist wieder die Gleichung des Darbouxschen Komplexes.

Die weitere Diskussion des Darbouxschen Komplexes wollen wir auf die Ermittelung des Komplexkegels K eines beliebigen Punktes P_0 beschränken. Seien x_0, y_0, z_0 die Koordinaten dieses Punktes, so werden die letzten drei Koordinaten $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ eines durch ihn gehenden Komplexstrahles durch die ersten drei $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in folgender Weise ausgedrückt:

$$\mathfrak{l} = y_0\mathfrak{z} - z_0\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{m} = z_0\mathfrak{x} - x_0\mathfrak{z}, \quad \mathfrak{n} = x_0\mathfrak{y} - y_0\mathfrak{x}.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) - (x_0\mathfrak{x} + y_0\mathfrak{y} + z_0\mathfrak{z})^2.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung (30) des Komplexes ein, so ergibt sich:

$$\Sigma^2(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) - R^2(x_0\mathfrak{x} + y_0\mathfrak{y} + z_0\mathfrak{z})^2 = P^2\mathfrak{x}^2 + Q^2\mathfrak{y}^2,$$

wenn wir:

$$\Sigma^2 = R^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)$$

annehmen. Die gefundene Gleichung können wir direkt deuten als Gleichung des Komplexkegels, bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprung in die Spitze des Kegels fällt. Wir können dieser Gleichung die Form geben:

$$(\Sigma^2 - P^2)\mathfrak{x}^2 + (\Sigma^2 - Q^2)\mathfrak{y}^2 + \Sigma^2\mathfrak{z}^2 = R^2(x_0\mathfrak{x} + y_0\mathfrak{y} + z_0\mathfrak{z})^2.$$

Legen wir nun zu allen Strahlen des Kegels die Normalebene durch die Kegelspitze, so umhüllen diese Normalebenen den „polaren Kegel“ Γ des Komplexkegels K. In der Gleichung der Normalebene:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = \theta$$

ist aber:

$$\xi : \eta : \zeta : \theta = \mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} : (x_0\mathfrak{x} + y_0\mathfrak{y} + z_0\mathfrak{z})$$

zu nehmen, und setzen wir diese Werte in die Gleichung des Komplexkegels ein, so wird sie:

$$(\Sigma^2 - P^2)\xi^2 + (\Sigma^2 - Q^2)\eta^2 + \Sigma^2\zeta^2 = R^2\theta^2.$$

Da diese Gleichung mit der Tangentialgleichung (20c) einer Fläche der konfokalen Schar übereinstimmt, zeigt sich, daß **der polare Kegel Γ des Komplexkegels K Tangentialkegel einer Fläche der konfokalen Schar ist.**

Nun wird der Komplexkegel erfüllt von den Schnittlinien der zueinander rechtwinkligen Ebenen, die durch P_0 gehen und je einen der Fokalkegelschnitte berühren, mithin Tangentialebenen der Kegel Γ', Γ'' sind, welche jene Kegelschnitte aus P_0 projizieren. Diese Kegel sind aber zueinander und zu dem Kegel Γ konfokal, weil die Tangentialkegel einer konfokalen Flächenschar, die dieselbe Spitze haben, eine konfokale Kegelschar bilden (S. 265).

Beachten wir nun die Bedeutung des Kegels Γ, so erkennen wir sofort, daß die Tangentialebenen der drei Kegel Γ, Γ', Γ'' sich zu Tripeln orthogonaler Ebenen zusammenfassen lassen. Es ist irgendeiner der drei Kegel durch die beiden anderen derart eindeutig bestimmt, daß, wenn man irgend zwei zueinander senkrechte Tangentialebenen dieser beiden Kegel hat, die Ebene durch P_0, die zu diesen zwei Ebenen senkrecht ist, eine Tangentialebene des dritten Kegels bildet.

Derartige Tripel von Kegeln lassen sich aus irgendeiner Schar konfokaler Kegel herausgreifen. Durch zwei (in der Schar beliebig wählbare) Kegel ist jedesmal der dritte eindeutig bestimmt. Stellt man die konfokale Kegelschar in dem auf ihre Hauptachsen bezogenen Koordinatensystem durch die Gleichung dar:

$$\frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} = 0,$$

so sind die Parameterwerte λ, λ', λ'', die zu den Kegeln eines solchen Tripels gehören, durch die Relation verknüpft:

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = \alpha + \beta + \gamma.$$

Den Beweis wollen wir übergehen.

Wenn zwei konfokale Kegel außer der Spitze überhaupt reelle Punkte gemein haben, so schneiden sie sich in vier Strahlen rechtwinklig. Man kann dann aus ihnen den dritten Kegel des Tripels, dem sie angehören, durch die Bestimmung finden, daß sein polarer Kegel durch die Schnittstrahlen der beiden ersten Kegel hindurchgehen muß. So geht auch der zu Γ polare Kegel, nämlich der Komplexkegel K, durch die Schnittstrahlen der Kegel Γ', Γ'' hindurch, das sind die Strahlen, die durch P_0 gehen und die beiden Fokalkegelschnitte treffen.

Zu dem Darbouxschen Komplex gehören alle Strahlen, welche die beiden Fokalkegelschnitte treffen. In der Tat müssen diese Strahlen als die Wirkungslinien der Einzelkräfte, denen das Kräftesystem in bestimmten Lagen statisch äquivalent wird, mit zu den Zentralachsen der Dynamen, welche den Darbouxschen Komplex bilden, gehören.

Für ein allgemeines Kräftesystem ist in keiner Lage statisches Gleichgewicht vorhanden. Damit dieses möglich ist, müssen vielmehr:

$$[\mathrm{X}], \quad [\mathrm{Y}], \quad [\mathrm{Z}] = 0 \tag{31}$$

werden, und diese Beziehungen bleiben erhalten, wie auch die Kräfte um ihre Angriffspunkte gedreht werden mögen. Bestehen für ein Kräftesystem diese Gleichungen nicht, so kann man doch zu ihnen gelangen, indem man einen Punkt des Körpers, auf den das Kräftesystem wirkt, festhält. Dies bedeutet nämlich die Einführung einer Reaktionskraft mit den Komponenten $-[\mathrm{X}]$, $-[\mathrm{Y}]$, $-[\mathrm{Z}]$, die in dem festgehaltenen Punkte angreift. Den letzteren wollen wir zum Koordinatenursprung wählen.

Denken wir uns durch Drehung um den festen Punkt den Körper in eine solche Lage gebracht, daß:

$$[\mathrm{Zy}] = [\mathrm{Yz}], \quad [\mathrm{Xz}] = [\mathrm{Zx}], \quad [\mathrm{Yx}] = [\mathrm{Xy}] \tag{32}$$

wird, dann besteht in dieser Lage Gleichgewicht. Wir führen nun die Fläche zweiter Ordnung ein[1]), deren Gleichung lautet:

$$[\mathrm{Xx}]x^2 + 2[\mathrm{Xy}]xy + [\mathrm{Yy}]y^2 + 2[\mathrm{Xz}]xz + 2[\mathrm{Yz}]yz + [\mathrm{Zz}]z^2 = 1 \tag{33}$$

und außerdem das Ellipsoid, das durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}\{[\mathrm{Xx}]x + [\mathrm{Yx}]y + [\mathrm{Zx}]z\}^2 + \{[\mathrm{Xy}]x + [\mathrm{Yy}]y + [\mathrm{Zy}]z\}^2 \\ + \{[\mathrm{Xz}]x + [\mathrm{Yz}]y + [\mathrm{Zz}]z\}^2 = 1\end{aligned} \tag{34}$$

gegeben wird. Die Hauptachsen dieser beiden Flächen fallen der Lage nach zusammen.

1) Vgl. Rankine, Philos. Magaz. (3) Vol. 10, 1855, p. 400.

Wir können nun annehmen, das Koordinatensystem sei so gewählt, daß die Koordinatenachsen in die Hauptachsen dieser Flächen fallen, dann müssen in den Gleichungen derselben die rechteckigen Glieder verschwinden und es wird demnach in diesem Koordinatensystem, wenn wir an die Summenausdrücke zur Unterscheidung Akzente setzen:

$$(35)\quad [\mathrm{Zy}]' = [\mathrm{Yz}]' = 0, \quad [\mathrm{Xz}]' = [\mathrm{Zx}]' = 0, \quad [\mathrm{Yx}]' = [\mathrm{Xy}]' = 0,$$

so daß wir uns diese Beziehungen immer durch passende Wahl des Koordinatensystems erfüllt denken können. Die vorstehenden Relationen bleiben aber erhalten, wenn wir gleichzeitig

$$\mathrm{X}_\varrho,\ \mathrm{Y}_\varrho,\ \mathrm{Z}_\varrho \text{ durch } \quad \mathrm{X}_\varrho,\ -\mathrm{Y}_\varrho,\ -\mathrm{Z}_\varrho,$$

oder

$$\mathrm{X}_\varrho,\ \mathrm{Y}_\varrho,\ \mathrm{Z}_\varrho \text{ durch } -\mathrm{X}_\varrho,\ \mathrm{Y}_\varrho,\ -\mathrm{Z}_\varrho,$$

oder

$$\mathrm{X}_\varrho,\ \mathrm{Y}_\varrho,\ \mathrm{Z}_\varrho \text{ durch } -\mathrm{X}_\varrho,\ -\mathrm{Y}_\varrho,\ \mathrm{Z}_\varrho$$

ersetzen. Eine solche Veränderung der Kraftkomponenten bedeutet, daß jede der Kräfte um eine zu derselben Koordinatenachse parallele Achse eine halbe Umdrehung ausführt. Wenn man also eine Lage des Gleichgewichtes gefunden hat, so findet man noch drei dazu gehörige Lagen des Gleichgewichtes, indem man die Kräfte um drei zueinander normale Richtungen eine halbe Umdrehung ausführen läßt. Statt der Kräfte kann man auch den Körper eine halbe Umdrehung ausführen lassen.[1])

Die Richtungen der Drehungsachsen bestimmen sich auf dieselbe Weise wie die Hauptachsen der durch die Gleichung (33) gegebenen Fläche. Wir haben also für ihre Richtungskosinus α, β, γ die Gleichungen:

$$(36)\quad \begin{cases} [\mathrm{Xx}]\alpha + [\mathrm{Yx}]\beta + [\mathrm{Zx}]\gamma = \varDelta\cdot\alpha, \\ [\mathrm{Xy}]\alpha + [\mathrm{Yy}]\beta + [\mathrm{Zy}]\gamma = \varDelta\cdot\beta, \\ [\mathrm{Xz}]\alpha + [\mathrm{Yz}]\beta + [\mathrm{Zz}]\gamma = \varDelta\cdot\gamma, \end{cases}$$

aus denen zur Bestimmung von $\varDelta$ die Gleichung dritten Grades folgt:

1) Setzt man diese halben Umdrehungen jedesmal zusammen mit der Drehung um den festgehaltenen Punkt, durch die man den Körper in die erste Gleichgewichtslage gebracht hat, so stehen die vier Achsen der vier Drehungen, die man so erhält, in der besonderen Beziehung zueinander, daß die Ebene, die zwei von ihnen verbindet, jedesmal normal ist zu der Ebene, welche die übrigen beiden verbindet. Solche vier Achsen, von denen durch jeden Punkt vier hindurchgehen, heißen nach Siacci (Atti della R. Accad. di Torino 17, 1882, p. 241) die statischen Achsen des betreffenden Punktes. Man vgl. dazu Padova, Atti dell' Istituto Veneto (6) Vol. 1, 1884, p. 1243 und eine interessante Arbeit von Segre, Memorie della R. Accad. di Napoli (3) Vol. 6, 1884, welche die Betrachtungen der Astatik mit dem „Virial", nämlich dem Ausdruck $U = [\mathrm{Xx}] + [\mathrm{Yy}] + [\mathrm{Zz}]$, in Zusammenhang bringt.

$$(37) \qquad \begin{vmatrix} [\mathrm{Xx}]-\Delta & [\mathrm{Yx}] & [\mathrm{Zx}] \\ [\mathrm{Xy}] & [\mathrm{Yy}]-\Delta & [\mathrm{Zy}] \\ [\mathrm{Xz}] & [\mathrm{Yz}] & [\mathrm{Zz}]-\Delta \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß bei dieser Bestimmung ein Ausnahmefall auftritt. Es kann nämlich sein, daß das Gleichgewicht erhalten bleibt, wenn man die Kräfte des Systems Drehungen mit gleichen, aber sonst beliebigen Drehungswinkeln um die durch ihre Angriffspunkte gehenden Parallelen zu einer der Hauptachsen unterwirft oder, kürzer gesagt, irgendeiner gemeinsamen Drehung um die Richtung einer Hauptachse unterzieht. Wir denken uns wieder die Koordinatenachsen mit den Hauptachsen zusammenfallend, die ausgezeichnete Hauptachse soll die z-Achse sein. Vor der Drehung der Kräfte gelten dann die Beziehungen (35), nach der Drehung sollen wenigstens Beziehungen von der Form (32), welche die Bedingungen des Gleichgewichtes geben, weiter bestehen. Bezeichnen wir die Kräftekomponenten nach der Drehung mit X_ϱ', Y_ϱ', Z_ϱ' und mit φ den Drehungswinkel, so wird:

$$\mathrm{X}_\varrho' = \cos\varphi\, \mathrm{X}_\varrho + \sin\varphi\, \mathrm{Y}_\varrho, \quad \mathrm{Y}_\varrho' = -\sin\varphi\, \mathrm{X}_\varrho + \cos\varphi\, \mathrm{Y}_\varrho, \quad \mathrm{Z}_\varrho' = \mathrm{Z}_\varrho.$$

Daraus folgt:

$$[\mathrm{Z'y}]' = [\mathrm{Zy}]', \quad [\mathrm{Y'z}]' = -\sin\varphi\,[\mathrm{Xz}]' + \cos\varphi\,[\mathrm{Yz}]',$$
$$[\mathrm{Z'x}]' = [\mathrm{Zx}]', \quad [\mathrm{X'z}]' = \cos\varphi\,[\mathrm{Xz}]' + \sin\varphi\,[\mathrm{Yz}]',$$
$$[\mathrm{Y'x}]' = -\sin\varphi\,[\mathrm{Xx}]' + \cos\varphi\,[\mathrm{Yx}]', \quad [\mathrm{X'y}]' = \cos\varphi\,[\mathrm{Xy}]' + \sin\varphi\,[\mathrm{Yy}]'.$$

Aus den Gleichungen (35) ergibt sich demnach:

$$[\mathrm{Z'y}]' = 0, \quad [\mathrm{Y'z}]' = 0, \quad [\mathrm{Z'x}]' = 0, \quad [\mathrm{X'z}]' = 0,$$
$$[\mathrm{Y'x}]' = -\sin\varphi\,[\mathrm{Xx}]', \quad [\mathrm{X'y}]' = \sin\varphi\,[\mathrm{Yy}]'.$$

Damit auch nach der Drehung Gleichgewicht besteht, muß nun $[\mathrm{Y'x}]' = [\mathrm{X'y}]'$ werden, also:

$$(38) \qquad -[\mathrm{Xx}]' = [\mathrm{Yy}]'.$$

Da die Gleichung der Fläche (33) in diesem Koordinatensystem lautet:

$$(39^0) \qquad [\mathrm{Xx}]' x^2 + [\mathrm{Yy}]' y^2 + [\mathrm{Zz}]' z^2 = 1,$$

finden wir jetzt für diese Gleichung:

$$(39) \qquad [\mathrm{Xx}]' (x^2 - y^2) + [\mathrm{Zz}]' z^2 = 1,$$

während die Gleichung des Ellipsoides (34) wird:

$$(40) \qquad [\mathrm{Xx}]'^2 (x^2 + y^2) + [\mathrm{Zz}]' z^2 = 1,$$

dieses Ellipsoid wird also eine Rotationsfläche.

Es sind aber die Koeffizienten $[Xx]'$, $[Yy]'$, $[Zz']$ die Wurzeln der Hauptachsengleichung (37), und da diese Gleichung entwickelt lautet:

$$\Delta^3 - ([Xx] + [Yy] + [Zz])\Delta^2 + \cdots = 0,$$

muß:

$$[Xx] + [Yy] + [Zz] = [Xx]' + [Yy]' + [Zz]'$$

sein. Wird also $-[Xx]' = [Yy]'$, so erhalten wir:

$$[Xx] + [Yy] + [Zz] = [Zz]',$$

wobei $[Zz]'$ eine Wurzel Δ der Gleichung (37) ist. Setzen wir nun diesen Wert für Δ in die Gleichungen (36) und (37) ein, so gehen dieselben über in:

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} -\{[Yy] + [Zz]\}\alpha + [Yx]\beta + [Zx]\gamma &= 0,\\ [Xy]\alpha - \{[Xx] + [Zz]\}\beta + [Zy]\gamma &= 0,\\ [Xz]\alpha + [Yz]\beta - \{[Xx] + [Yy]\}\gamma &= 0 \end{aligned}\right.$$

und:

$$(42)\qquad \begin{vmatrix} -\{[Yy] + [Zz]\} & [Yx] & [Zx] \\ [Xy] & -\{[Xx] + [Zz]\} & [Zy] \\ [Xz] & [Yz] & -\{[Xx] + [Yy]\} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn ein im Gleichgewichte befindliches Kräftesystem bei einer beliebigen gemeinsamen Drehung der Kräfte um eine bestimmte Richtung im Gleichgewicht bleibt, so heißt diese Richtung nach Moebius eine Achse des Gleichgewichtes.[1]) Es gibt dann (42) die Bedingung, daß eine solche Achse des Gleichgewichtes existiert, und die Gleichungen (41) dienen dazu, ihre Richtungskosinus zu finden.

Neunzehntes Kapitel.

Kinetik des starren Körpers.

Den geometrischen Charakter, welchen die bisherigen Betrachtungen getragen haben, geben wir nun, wenigstens anscheinend, auf[2]), indem wir einen neuen Begriff, nämlich den Begriff der Masse, einführen. Dieser Begriff ist bereits bei der Einführung des Kraftbegriffes erwähnt worden, ohne daß wir bis jetzt Gebrauch von ihm gemacht hätten. Wir hoben damals hervor, daß der Begriff der

---

1) Lehrbuch der Statik I, Kap. 8.

2) Man vgl. für das Folgende am besten Webster, The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies, Leipzig 1904, und als Übersicht über das ganze Gebiet den Bericht von Stäckel in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. IV 1, p. 435—684, 1908.

Kraft, wie wir ihn verstehen, den Begriff der Masse notwendig voraussetzt, sich im übrigen aber rein mathematisch definieren läßt als ein Vektor, der an eine bestimmte Masse geknüpft ist. Bei dieser an sich sehr einfachen Definition scheint indes das Wort Masse mit einem Doppelsinne behaftet. Einerseits drückt es nämlich aus, daß der Vektor sich nicht auf einen mathematischen Punkt, sondern auf einen physikalischen Körper, dem der Charakter einer Substanz zugesprochen wird, beziehen soll. Anderseits aber bedeutet es, daß der geometrisch als Strecke repräsentierte Vektor noch mit einer Zahlgröße verbunden sein soll, die man in die Repräsentation durch eine Strecke nicht mit hineinzieht. Der Grund, warum man dies nicht tut, liegt eben darin, daß die Zahlgröße eine von dem Vektor unabhängige und abzusondernde Bedeutung hat, die sich auf den vorausgesetzten substantiellen Träger des Vektors bezieht und ein gewisses Maß desselben gibt.

Das Wort Masse hat demnach einerseits eine qualitative, anderseits eine quantitative Bedeutung, und diese beiden Bedeutungen werden eigentlich überall zusammen gedacht, wo das Wort gebraucht wird. Das beste Bild, unter dem wir die Vereinigung der zwei Bedeutungen klar machen können, ist ein Gewichtsstück, z. B. ein Pfund. Das Wort Pfund gebrauchen wir nicht für ein von dem Pfundstück unabhängiges Etwas, wie die auf eine Marke gedruckte Nummer, sondern das Pfundstück selbst ist in seiner qualitativen Wesenheit das Gewicht, das es darstellt. Es wirkt als Maß, auf die Wagschale gelegt, durch seine physikalische Besonderheit, und der zahlmäßige Charakter, den das Gewicht trägt, rührt nur daher, daß infolge der Natur des Wägeprozesses mit Hilfe einer Gewichtseinheit, d. h. eines willkürlich, aber fest ausgewählten Körpers, das Gewicht jedes anderen Körpers sich durch eine Zahl ausdrücken läßt, die dann als dem Körper inhärierend erscheint und nur in Verbindung mit dem Körper gedacht einen Sinn hat.

Was für unsere Zwecke resultiert, ist folgendes. Die Beschreibung einer Bewegung beruht darauf, daß es möglich ist, zwei verschiedene Raumteile zu verschiedenen Zeiten als substantiell identisch anzusehen. Wir sprechen von einer substantiellen Identität, weil dieselbe auf den Begriffen von Raum und Zeit allein nicht beruhen kann. Masse ist dann ein zahlmäßiger Ausdruck, der mit der substantiellen Identität erhalten bleibt. Den Raumteil, der bei der Bewegung in den verschiedenen Lagen als identisch festgestellt wird, nennen wir den bewegten Körper und die Masse erscheint als eine quantitative Bestimmung des bewegten Körpers.

Wir denken uns nun wieder eine Anzahl Körper von verschwindend geringen Dimensionen, die wir als Massenpunkte bezeichnen. Diese Massenpunkte sind für uns vollständig charakterisiert durch ihre Masse m und die drei Koordinaten x, y, z, die ihren augenblicklichen Ort festlegen. Die gegenseitigen Abstände der Massenpunkte sollen unverändert erhalten bleiben. Wir sprechen dann von einem starren Massensystem. Es können aber die Massenpunkte sich innerhalb eines bestimmt begrenzten Raumteils ins Unbegrenzte vermehren, ja sogar, da sie nicht im geometrischen Sinne Punkte, sondern nur sehr kleine Raumteile sind, sich kontinuierlich zu einem einzigen Körper aneinander schließen, ohne daß an den folgenden Betrachtungen irgend etwas geändert wird. Nur wird im letzteren Falle die Masse jedes Massenpunktes zweckmäßiger mit $\mu d\tau$ bezeichnet, wenn $d\tau$ das sehr kleine von dem Massenpunkte eingenommene Volumen bezeichnet, und an die Stelle einer Summation über alle Massenpunkte tritt dann eine Integration über den von ihnen insgesamt eingenommenen Raum. Dies sei hiermit ein für allemal bemerkt, während wir im nachstehenden die allen früheren Betrachtungen besser angepaßte Summenbezeichnung nicht verlassen werden.

Während in der Statik, wo die Kräfte als Vektoren von vornherein gegeben werden, die Masse keine Rolle spielt und ebensowenig in der Kinematik, wo die geometrische Beschreibung der Bewegung der alleinige Zweck ist, gewinnt sie ihre Bedeutung in der Kinetik, welche eben die Verbindung der Beschreibung einer Bewegung mit den in der Statik eingeführten Kraftgrößen zum Gegenstande hat. Diese Verbindung wird gefunden, indem man eine Wertung oder quantitative Bestimmung der zur Beschreibung der Bewegung dienenden Vektoren nach den Massen, auf die sie sich beziehen, einführt. Dies geschieht, indem man sie einfach mit diesen Massen multipliziert.

Wir bezeichnen mit m_ϱ die Masse, mit $x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho$ die Koordinaten des ϱ^{ten} Massenpunktes in dem vorliegenden System und führen die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors:

$$(1) \qquad \dot{x}_\varrho = \frac{dx_\varrho}{dt}, \quad \dot{y}_\varrho = \frac{dy_\varrho}{dt}, \quad \dot{z}_\varrho = \frac{dz_\varrho}{dt}$$

ein. Diesen Geschwindigkeitsvektor machen wir zu einem Kraftvektor, indem wir seine vorstehenden Komponenten mit der Masse m_ϱ multiplizieren. Alle die Kräfte mit den Komponenten

$$m_\varrho \dot{x}_\varrho, \quad m_\varrho \dot{y}_\varrho, \quad m_\varrho \dot{y}_\varrho$$

begründen nun eine Dyname, die wir als die Impulsdyname oder kurz den Impuls des starren Massensystems bezeichnen. Die Koordinaten derselben können wir sofort hinschreiben, sie lauten:

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi = \Sigma m_\varrho \dot{x}_\varrho, & \lambda = \Sigma m_\varrho (\dot{z}_\varrho y_\varrho - \dot{y}_\varrho z_\varrho), \\ \eta = \Sigma m_\varrho \dot{y}_\varrho, & \mu = \Sigma m_\varrho (\dot{x}_\varrho z_\varrho - \dot{z}_\varrho x_\varrho), \\ \zeta = \Sigma m_\varrho \dot{z}_\varrho, & \nu = \Sigma m_\varrho (\dot{y}_\varrho x_\varrho - \dot{x}_\varrho y_\varrho). \end{cases}$$

Führen wir aber die Koordinaten u, v, w, p, q, r der momentanen Bewegung des starren Massensystems ein, so wird in den Gleichungen (1):

$$(3)\qquad \begin{cases} \dot{x}_\varrho = \mathrm{u} - \mathrm{r}\, y_\varrho + \mathrm{q}\, z_\varrho, \\ \dot{y}_\varrho = \mathrm{v} - \mathrm{p}\, z_\varrho + \mathrm{r}\, x_\varrho, \\ \dot{z}_\varrho = \mathrm{w} - \mathrm{q}\, x_\varrho + \mathrm{p}\, y_\varrho. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen (2) ein, so zeigt sich, daß die sechs Koordinaten des Impulses die partiellen Derivierten einer Funktion der kinematischen Koordinaten u, v, w, p, q, r werden. Diese Funktion ist die folgende:

$$(4)\quad T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_\varrho \{(\mathrm{u} - \mathrm{r} y_\varrho + \mathrm{q} z_\varrho)^2 + (\mathrm{v} - \mathrm{p} z_\varrho + \mathrm{r} x_\varrho)^2 + (\mathrm{w} - \mathrm{q} x_\varrho + \mathrm{p} y_\varrho)^2\}.$$

In der Tat ergibt sich zunächst:

$$(5\mathrm{a})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{u}} = \Sigma m_\varrho (\mathrm{u} - \mathrm{r}\, y_\varrho + \mathrm{q}\, z_\varrho) = \Sigma m_\varrho \dot{x}_\varrho = \boldsymbol{\xi}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{v}} = \Sigma m_\varrho (\mathrm{v} - \mathrm{p}\, z_\varrho + \mathrm{r}\, x_\varrho) = \Sigma m_\varrho \dot{y}_\varrho = \boldsymbol{\eta}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{w}} = \Sigma m_\varrho (\mathrm{w} - \mathrm{q}\, x_\varrho + \mathrm{p}\, y_\varrho) = \Sigma m_\varrho \dot{z}_\varrho = \boldsymbol{\zeta}, \end{cases}$$

und ferner:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{p}} = \Sigma m_\varrho \{(\mathrm{w} - \mathrm{q}\, x_\varrho + \mathrm{p}\, y_\varrho) y_\varrho - (\mathrm{v} - \mathrm{p}\, z_\varrho + \mathrm{r}\, x_\varrho) z_\varrho\} \text{ etc.}$$

oder:

$$(5\mathrm{b})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{p}} = \Sigma m_\varrho \{\dot{z}_\varrho y_\varrho - \dot{y}_\varrho z_\varrho\} = \boldsymbol{\lambda}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{q}} = \Sigma m_\varrho \{\dot{x}_\varrho z_\varrho - \dot{z}_\varrho x_\varrho\} = \boldsymbol{\mu}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{r}} = \Sigma m_\varrho \{\dot{y}_\varrho x_\varrho - \dot{x}_\varrho y_\varrho\} = \boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

Die durch die Gleichung (4) definierte Funktion T läßt sich mit Rücksicht auf (3) schreiben:

$$(6)\qquad T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_\varrho (\dot{x}_\varrho^2 + \dot{y}_\varrho^2 + \dot{z}_\varrho^2)$$

oder:

$$(6\mathrm{a})\qquad T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_\varrho v_\varrho^2,$$

wenn v_ϱ die Größe der Geschwindigkeit des ϱ^{ten} Systempunktes bezeichnet. Die so definierte Funktion T heißt die lebendige Kraft oder kinetische Energie des Massensystems in dem betreffenden Zeitpunkte. Wenn wir in der Gleichung (4) die Klammern auf der rechten Seite auflösen, so ergibt sich für die kinetische Energie eine homogene quadratische Funktion der sechs kinematischen Koordinaten, deren Koeffizienten von der Lage und Struktur des Massensystems abhängen. Nach dem Eulerschen Satze über homogene Funktionen wird demnach:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{u}}\mathrm{u} + \frac{\partial T}{\partial \mathrm{v}}\mathrm{v} + \frac{\partial T}{\partial \mathrm{w}}\mathrm{w} + \frac{\partial T}{\partial \mathrm{p}}\mathrm{p} + \frac{\partial T}{\partial \mathrm{q}}\mathrm{q} + \frac{\partial T}{\partial \mathrm{r}}\mathrm{r} = 2T,$$

oder wenn wir die Werte (5a) und (5b) für die partiellen Derivierten einsetzen:

$$(7) \qquad \xi \mathrm{u} + \eta \mathrm{v} + \zeta \mathrm{w} + \lambda \mathrm{p} + \mu \mathrm{q} + \nu \mathrm{v} = 2T,$$

was sich auch durch direkte Ausrechnung bestätigen läßt.

Wenn der Impuls des starren Massensystems während des ganzen Verlaufes der Bewegung konstant bleibt, so sprechen wir von einer natürlichen Bewegung, ändert er sich, so nennen wir die Bewegung erzwungen. Bei einer natürlichen Bewegung müssen also die sechs Größen $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ konstant bleiben, mithin die sechs Gleichungen bestehen:

$$(8^0) \quad \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0, \quad \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad \frac{d\mu}{dt} = 0, \quad \frac{d\nu}{dt} = 0.$$

Ist die Bewegung erzwungen, so können wir als eine Art Maß für die Abweichung der Bewegung von der natürlichen die sechs Größen einführen:

$$(8) \quad \frac{d\xi}{dt} = \mathrm{X}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \mathrm{Y}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mathrm{Z}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \mathrm{L}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \mathrm{M}, \quad \frac{d\nu}{dt} = \mathrm{N}.$$

Setzen wir auf der linken Seite dieser Gleichungen die Werte (2) für $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ ein, so ergibt sich sofort:

$$(9) \quad \begin{cases} \mathrm{X} = \Sigma m_\varrho \ddot{x}_\varrho, & \mathrm{L} = \Sigma m_\varrho (\ddot{z}_\varrho y_\varrho - \ddot{y}_\varrho z_\varrho), \\ \mathrm{Y} = \Sigma m_\varrho \ddot{y}_\varrho, & \mathrm{M} = \Sigma m_\varrho (\ddot{x}_\varrho z_\varrho - \ddot{z}_\varrho x_\varrho), \\ \mathrm{Z} = \Sigma m_\varrho \ddot{z}_\varrho, & \mathrm{N} = \Sigma m_\varrho (\ddot{y}_\varrho x_\varrho - \ddot{x}_\varrho y_\varrho). \end{cases}$$

Hierbei ist der doppelte übergesetzte Punkt zur Bezeichnung der doppelten Differentiation nach t gebraucht. Die so definierten Größen X, Y, Z, L, M, N lassen sich ebenfalls als die Koordinaten einer Dyname auffassen. Von den Kräften des dieselbe repräsentierenden Kräftesystems sind die Angriffspunkte wieder durch die Massenpunkte des Massensystems gegeben. Die Komponenten der einzelnen Kräfte sind:

$$(10) \qquad \mathrm{X}_\varrho = m_\varrho \ddot{x}_\varrho, \quad \mathrm{Y}_\varrho = m_\varrho \ddot{y}_\varrho, \quad \mathrm{Z}_\varrho = m_\varrho \ddot{z}_\varrho,$$

wobei:

$$(11) \quad \ddot{x}_\varrho = \frac{d\dot{x}_\varrho}{dt} = \frac{d^2 x_\varrho}{dt^2}, \quad \ddot{y}_\varrho = \frac{d\dot{y}_\varrho}{dt} = \frac{d^2 y_\varrho}{dt^2}, \quad \ddot{z}_\varrho = \frac{d\dot{z}_\varrho}{dt} = \frac{d^2 z_\varrho}{dt^2}$$

die Komponenten der Beschleunigung des betreffenden Massenpunktes sind. Die Kräfte entstehen also ebenso aus den Beschleunigungsvektoren der Massenpunkte wie die Impulskräfte aus den Geschwindigkeitsvektoren, nämlich durch Multiplikation mit der zugehörigen Masse. Wir wollen diese neuen Kräfte als die Beschleunigungs-

kräfte und die aus ihnen sich ergebende Dyname als die *Beschleunigungsdyname* bezeichnen.

Die Koordinaten der Beschleunigungsdyname sind zunächst gegeben für ein Koordinatensystem, das im Raume ruht, wir wollen sie nun auch beziehen auf ein Koordinatensystem, das mit dem starren Massensystem beweglich ist. Zu dem Zwecke haben wir zunächst die Frage zu erledigen, wie sich die statischen Koordinaten eines Kräftesystems beim Übergange von einem Koordinatensysteme zu einem anderen transformieren. Wir wollen die Richtungskosinus der neuen Koordinatenachsen gegen die alten in der folgenden Weise bezeichnen. Sie seien

$$
\begin{array}{lll}
\text{für die neue } x\text{-Achse} & : & \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1, \\
\text{„ \quad „ \quad „ } \ y\text{- \quad „} & : & \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2, \\
\text{„ \quad „ \quad „ } \ z\text{- \quad „} & : & \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3.
\end{array}
$$

Hat dann eine Kraft im alten Koordinatensystem die Komponenten X, Y, Z, so werden ihre Projektionen X′, Y′, Z′ auf die neuen Koordinatenachsen:

$$
\text{(12a)} \qquad \begin{cases} X' = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z, \\ Y' = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z, \\ Z' = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_2 Z. \end{cases}
$$

Um die Lage der neuen Koordinatenachsen völlig festzulegen, sind noch die Koordinaten α_0, β_0, γ_0 hinzuzufügen, welche dem neuen Koordinatenursprunge im alten Koordinatensystem zukommen. Dann sind die Koordinaten x, y, z eines Punktes im alten Koordinatensystem mit den Koordinaten x', y', z' desselben Punktes im neuen Koordinatensystem durch die Gleichungen verknüpft:

$$
\text{(12)} \qquad \begin{cases} x = \alpha_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y = \beta_0 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z = \gamma_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{cases}
$$

Die Linienkoordinaten der neuen Koordinatenachsen (d. h. einer in ihnen liegenden Liniengröße von der Länge 1) im alten Koordinatensystem sind der Reihe nach:

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1, & \beta_0\gamma_1 - \gamma_0\beta_1, & \gamma_0\alpha_1 - \alpha_0\gamma_1, & \alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1, \\
\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2, & \beta_0\gamma_2 - \gamma_0\beta_2, & \gamma_0\alpha_2 - \alpha_0\gamma_2, & \alpha_0\beta_2 - \beta_0\alpha_2, \\
\alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3, & \beta_0\gamma_3 - \gamma_0\beta_3, & \gamma_0\alpha_3 - \alpha_0\gamma_3, & \alpha_0\beta_3 - \beta_0\alpha_3.
\end{array}
$$

Bezeichnen wir nun mit X, Y, Z, L, M, N die sämtlichen sechs Koordinaten einer Kraft im alten System, mit X′, Y′, Z′, L′, M′, N′ die entsprechenden Koordinaten im neuen System, so sind L′, M′, N′ die Momente der Kraft bezüglich der neuen Koordinatenachsen und mithin nach dem allgemeinen Ausdruck für das gegenseitige Moment zweier Liniengrößen:

$$(12\,\mathrm{b})\quad \begin{cases} \mathrm{L}' = \alpha_1 \mathrm{L} + \beta_1 \mathrm{M} + \gamma_1 \mathrm{N} \\ \quad + (\beta_0\gamma_1 - \gamma_0\beta_1)\,\mathrm{X} + (\gamma_0\alpha_1 - \alpha_0\gamma_1)\,\mathrm{Y} + (\alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1)\,\mathrm{Z}, \\ \mathrm{M}' = \alpha_2 \mathrm{L} + \beta_2 \mathrm{M} + \gamma_2 \mathrm{N} \\ \quad + (\beta_0\gamma_2 - \gamma_0\beta_2)\,\mathrm{X} + (\gamma_0\alpha_2 - \alpha_0\gamma_2)\,\mathrm{Y} + (\alpha_0\beta_2 - \beta_0\alpha_2)\,\mathrm{Z}, \\ \mathrm{N}' = \alpha_3 \mathrm{L} + \beta_3 \mathrm{M} + \gamma_3 \mathrm{N} \\ \quad + (\beta_0\gamma_3 - \gamma_0\beta_3)\,\mathrm{X} + (\gamma_0\alpha_3 - \alpha_0\gamma_3)\,\mathrm{Y} + (\alpha_0\beta_3 - \beta_0\alpha_3)\,\mathrm{Z}. \end{cases}$$

Wir nehmen insbesondere an, die Abweichung des neuen Koordinatensystems vom alten sei unendlich gering, dann können wir setzen:

$$\begin{array}{llll} \alpha_0 = \mathrm{u}\,\delta t, & \alpha_1 = 1, & \beta_1 = \mathrm{r}\,\delta t, & \gamma_1 = -\,\mathrm{q}\,\delta t, \\ \beta_0 = \mathrm{v}\,\delta t, & \alpha_2 = -\,\mathrm{r}\,\delta t, & \beta_2 = 1, & \gamma_2 = \mathrm{p}\,\delta t, \\ \gamma_0 = \mathrm{w}\,\delta t, & \alpha_3 = \mathrm{q}\,\delta t, & \beta_3 = -\,\mathrm{p}\,\delta t, & \gamma_3 = 1. \end{array}$$

Es sind nun $\delta x = x - x'$, $\delta y = y - y'$, $\delta z = z - z'$ die Komponenten der Verschiebung, welche ein Punkt erfahren hätte, wenn er an der Bewegung des Koordinatensystems teilgenommen und so seine wirkliche Lage erreicht hätte. Nach (12) und den vorstehenden Werten der Koeffizienten wird aber:

$$\delta x = (\mathrm{u} - \mathrm{r}y + \mathrm{q}z)\,\delta t,\ \delta y = (\mathrm{v} - \mathrm{p}z + \mathrm{r}x)\,\delta t,\ \delta z = (\mathrm{w} - \mathrm{q}x + \mathrm{r}y)\,\delta t.$$

Es sind also $\mathrm{p}\,\delta t$, $\mathrm{q}\,\delta t$, $\mathrm{r}\,\delta t$ die Winkel dreier Drehungen um die x-, y- und z-Achse, welche mit den Verschiebungen $\mathrm{u}\,\delta t$, $\mathrm{v}\,\delta t$, $\mathrm{w}\,\delta t$ längs der Koordinatenachsen zusammengenommen das Koordinatensystem in die unendlich benachbarte neue Lage überführen. Gebrauchen wir noch für die Änderungen der Kraftkoordinaten die Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{X}' - \mathrm{X} = \delta \mathrm{X}, & \mathrm{Y}' - \mathrm{Y} = \delta \mathrm{Y}, & \mathrm{Z}' - \mathrm{Z} = \delta \mathrm{Z}, \\ \mathrm{L}' - \mathrm{L} = \delta \mathrm{L}, & \mathrm{M}' - \mathrm{M} = \delta \mathrm{M}, & \mathrm{N}' - \mathrm{N} = \delta \mathrm{N}, \end{array}$$

so ergeben sich für diese Änderungen die Ausdrücke:

$$(13)\quad \begin{cases} \delta \mathrm{X} = (\mathrm{r}\mathrm{Y} - \mathrm{q}\mathrm{Z})\,\delta t,\ \delta \mathrm{Y} = (\mathrm{p}\mathrm{Z} - \mathrm{r}\mathrm{X})\,\delta t,\ \delta \mathrm{Z} = (\mathrm{q}\mathrm{X} - \mathrm{p}\mathrm{Y})\,\delta t, \\ \delta \mathrm{L} = (\mathrm{r}\mathrm{M} - \mathrm{q}\mathrm{N} + \mathrm{w}\mathrm{Y} - \mathrm{v}\mathrm{Z})\,\delta t, \\ \delta \mathrm{M} = (\mathrm{p}\mathrm{N} - \mathrm{r}\mathrm{L} + \mathrm{u}\mathrm{Z} - \mathrm{w}\mathrm{X})\,\delta t, \\ \delta \mathrm{N} = (\mathrm{q}\mathrm{L} - \mathrm{p}\mathrm{M} + \mathrm{v}\mathrm{X} - \mathrm{u}\mathrm{Y})\,\delta t, \end{cases}$$

indem die zweiten Potenzen von δt gegen die ersten vernachlässigt werden.

Die gefundenen Formeln wenden wir an auf die Impulsdyname des starren Massensystems. Wir bezeichnen die Derivierten der

Koordinaten dieser Dyname nach der Zeit, wenn dieselben sich auf ein gegen das Massensystem festes Koordinatensystem beziehen, mit

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}.$$

Dann wird beispielsweise die Änderung der ersten Koordinate gegen ein im Raume festes Koordinatensystem in einer sehr kurzen Zeit δt:

$$\frac{d\xi}{dt}\delta t = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\delta t - \delta\xi,$$

wo $\delta\xi$ gemäß der obigen Formel für δX gebildet ist. Denn wenn zur Zeit t die erste Koordinate des Impulses in beiden Koordinatensystemen übereinstimmend ξ ist, so ist sie nach Verlauf der sehr kurzen Zeit δt in dem Koordinatensystem, das im Raume fest ist:

$$\xi + \frac{d\xi}{dt}\delta t$$

geworden, in dem gegen den Körper festen System aber:

$$\xi + \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\delta t,$$

und die Differenz dieser beiden Werte, also

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\delta t - \frac{d\xi}{dt}\delta t \text{ muß} = \delta\xi \text{ sein.}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) und die für die neue Bezeichnung umgeänderten Gleichungen (13) ergibt sich so aber, wenn wir gleich die entsprechenden Gleichungen hinzufügen:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} - r\eta + q\zeta,\\
Y &= \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} - p\zeta + r\xi,\\
Z &= \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} - q\xi + p\eta,\\
L &= \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - r\mu + q\nu - w\eta + v\zeta,\\
M &= \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} - p\nu + r\lambda - u\zeta + w\xi,\\
N &= \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} - q\lambda + p\mu - v\xi + u\eta.
\end{aligned}\tag{14}$$

Dieses ist der Ausdruck für die Beschleunigungsdyname, wenn ein im Körper festes Koordinatensystem zugrunde gelegt wird.

Wir bezeichnen nun mit

$$\mathfrak{u},\ \mathfrak{v},\ \mathfrak{w},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{r}$$

die Koordinaten irgendeiner neuen Schraubung $\mathfrak{s}$ und bilden den Ausdruck:

$$(15)\qquad \delta W = \{\mathrm{X}\mathfrak{u} + \mathrm{Y}\mathfrak{v} + \mathrm{Z}\mathfrak{w} + \mathrm{L}\mathfrak{p} + \mathrm{M}\mathfrak{q} + \mathrm{N}\mathfrak{r}\}\,\delta t,$$

den wir schon früher eingeführt und als die Arbeit, die das durch seine statischen Koordinaten X, Y, Z, L, M, N charakterisierte Kräftesystem bei der Schraubung $\mathfrak{s}$ während der Zeit δt leistet, bezeichnet haben.

Wenn wir, um die Arbeitsleistung $\delta W/\delta t$ zu berechnen, die Gleichungen (14) der Reihe nach mit $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ multiplizieren und addieren, so zerfällt der entstehende Ausdruck in zwei Teile, Φ_1 und Φ_2, von denen der erste:

$$(16)\qquad \Phi_1 = \frac{d\xi}{dt}\mathfrak{u} + \frac{d\eta}{dt}\mathfrak{v} + \frac{d\zeta}{dt}\mathfrak{w} + \frac{d\lambda}{dt}\mathfrak{p} + \frac{d\mu}{dt}\mathfrak{q} + \frac{d\nu}{dt}\mathfrak{r}$$

ist. Der zweite Teil aber läßt sich, wenn man auf die Definitionsgleichungen (2) der Impulskoordinaten zurückgeht und durch die Gleichungen (3) u, v, w eliminiert, schreiben wie folgt:

$$\begin{aligned}\Phi_2 = &-\Sigma m_\varrho \dot{x}_\varrho \{\mathfrak{q}(\mathfrak{w} - \mathfrak{q}x_\varrho + \mathfrak{p}y_\varrho) - \mathfrak{r}(\mathfrak{v} - \mathfrak{p}z_\varrho + \mathfrak{r}x_\varrho)\}\\ &-\Sigma m_\varrho \dot{y}_\varrho \{\mathfrak{r}(\mathfrak{u} - \mathfrak{r}y_\varrho + \mathfrak{q}z_\varrho) - \mathfrak{p}(\mathfrak{w} - \mathfrak{q}x_\varrho + \mathfrak{p}y_\varrho)\}\\ &-\Sigma m_\varrho \dot{z}_\varrho \{\mathfrak{p}(\mathfrak{v} - \mathfrak{p}z_\varrho + \mathfrak{r}x_\varrho) - \mathfrak{q}(\mathfrak{u} - \mathfrak{r}y_\varrho + \mathfrak{q}z_\varrho)\}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird auf eine einfachere Form gebracht, wenn wir die Komponenten der Verschiebung des ϱ^{ten} Massenpunktes bei der neu hinzugenommenen Schraubung durch die Gleichungen einführen:

$$(17)\qquad \begin{cases}\delta x_\varrho = (\mathfrak{u} - \mathfrak{r}y_\varrho + \mathfrak{q}z_\varrho)\,\delta t,\\ \delta y_\varrho = (\mathfrak{v} - \mathfrak{p}z_\varrho + \mathfrak{r}x_\varrho)\,\delta t,\\ \delta z_\varrho = (\mathfrak{w} - \mathfrak{q}x_\varrho + \mathfrak{p}y_\varrho)\,\delta t.\end{cases}$$

Dann wird:

$$(18)\quad \Phi_2 = -\Sigma m_\varrho\{\dot{x}_\varrho(\mathfrak{q}\,\delta z_\varrho - \mathfrak{r}\,\delta y_\varrho) + \dot{y}_\varrho(\mathfrak{r}\,\delta x_\varrho - \mathfrak{p}\,\delta z_\varrho) + \dot{z}_\varrho(\mathfrak{p}\,\delta y_\varrho - \mathfrak{q}\,\delta x_\varrho)\}.$$

Anderseits aber wollen wir:

$$(18\text{a})\quad \Phi_2 = -\{T_u'\mathfrak{u} + T_v'\mathfrak{v} + T_w'\mathfrak{w} + T_p'\mathfrak{p} + T_q'\mathfrak{q} + T_r'\mathfrak{r}\}$$

setzen, indem wir uns die Gleichungen (14) mit Rücksicht auf die Formeln (5a) und (5b) in der folgenden Gestalt geschrieben denken:

$$(19)\quad \begin{cases}\mathrm{X} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{u}}\right) - T_u', \quad \mathrm{Y} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{v}}\right) - T_v', \quad \mathrm{Z} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{w}}\right) - T_w',\\ \mathrm{L} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{p}}\right) - T_p', \quad \mathrm{M} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{q}}\right) - T_q', \quad \mathrm{N} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{r}}\right) - T_r'.\end{cases}$$

Der Ausdruck (18) für Φ_2 geht aus der kinetischen Energie auf einfache Weise hervor. Bildet man nämlich deren Variation gemäß der Gleichung (6), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta T &= \Sigma m_\varrho(\dot{x}_\varrho\delta\dot{x}_\varrho + \dot{y}_\varrho\delta\dot{y}_\varrho + \dot{z}_\varrho\delta\dot{z}_\varrho)\\ &= \Sigma m_\varrho\{\dot{x}_\varrho\delta(\mathrm{u} - \mathrm{r}y_\varrho + \mathrm{q}z_\varrho) + \ldots\}.\end{aligned}$$

Wenn man nun die Variation von $u - r y_\varrho + q z_\varrho$ und der entsprechenden Ausdrücke so ausführt, daß man nur die Koordinaten x_ϱ, y_ϱ, z_ϱ der einzelnen Massenpunkte variiert, nicht aber die kinematischen Koordinaten u, v . . ., welche die augenblickliche Bewegung des Massensystems bestimmen, dann erhält man genau den obenstehenden Ausdruck (18) für $-\Phi_2$. Führt man weiter für die Variationen der Punktkoordinaten die Ausdrücke (17) ein, die sie durch eine „virtuelle Schraubung" festlegen, und ordnet den entstehenden Ausdruck nach den Koordinaten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ . . . dieser virtuellen Schraubung, so entsteht eine lineare Funktion jener Koordinaten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ . . . Die Koeffizienten in dieser sind es, die wir mit den Symbolen T_u', T_v' . . . bezeichnen.

Weit einfacher gestaltet sich die Berechnung des Arbeitsausdruckes, wenn wir das im Raume feste Koordinatensystem zugrunde legen. Wenn wir in die Formel (15) die Werte (9) für X, Y, Z, L, M, N einsetzen, so läßt sich der entstehende Ausdruck schreiben:

$$\delta W = \sum m_\varrho \{\ddot{x}_\varrho(\mathfrak{u} - \mathfrak{r} y_\varrho + \mathfrak{q} z_\varrho) + \ddot{y}_\varrho(\mathfrak{v} - \mathfrak{p} z_\varrho + \mathfrak{r} x_\varrho) + \ddot{z}_\varrho(\mathfrak{w} - \mathfrak{q} x_\varrho + \mathfrak{p} y_\varrho)\}\delta t,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (17):

$$\delta W = \Sigma m_\varrho \{\ddot{x}_\varrho \delta x_\varrho + \ddot{y}_\varrho \delta y_\varrho + \ddot{z}_\varrho \delta z_\varrho\}. \tag{20}$$

Diese Gleichung gibt das d'Alembertsche Prinzip für ein starres Massensystem.

Lassen wir insbesondere die virtuelle Schraubung mit der wirklichen Schraubung zusammenfallen, so werden die Komponenten δx_ϱ, δy_ϱ, δz_ϱ zu den Komponenten dx_ϱ, dy_ϱ, dz_ϱ der wirklichen Verschiebung während der sehr kurzen Zeit dt. Da wir aber:

$$dx_\varrho = \dot{x}_\varrho dt,\ dy_\varrho = \dot{y}_\varrho dt,\ dz_\varrho = \dot{z}_\varrho dt$$

und anderseits:

$$\ddot{x}_\varrho dt = d\dot{x}_\varrho,\ \ddot{y}_\varrho dt = d\dot{y}_\varrho,\ \ddot{z}_\varrho dt = d\dot{z}_\varrho$$

setzen können, wird, wenn wir die zugehörige Arbeit mit dW statt mit δW bezeichnen:

$$dW = \Sigma m_\varrho \{\dot{x}_\varrho d\dot{x}_\varrho + \dot{y}_\varrho d\dot{y}_\varrho + \dot{z}_\varrho d\dot{z}_\varrho\}$$

oder mit Rücksicht auf (6) einfach:

$$dW = dT. \tag{21}$$

Dies ist der Ausdruck für das Prinzip der lebendigen Kraft in dem besonderen Falle eines starren Massensystems. Es lautet in Worten: Die Arbeit der auf das Massensystem wirkenden Beschleunigungskräfte ist gleich der entsprechenden Zunahme der kinetischen Energie dieses Massensystems.

Ist nun die Bewegungsfreiheit des Massensystems beschränkt und sei n die Anzahl seiner Freiheitsgrade, so bestehen zwischen den Koordinaten aller Schraubungen, welche der Körper ausführen kann, d. h. zwischen den Koordinaten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ . . . der virtuellen Schraubung, $6-n$ lineare Gleichungen, die wir schreiben wollen:

$$\mathfrak{x}_i\mathfrak{u} + \mathfrak{y}_i\mathfrak{v} + \mathfrak{z}_i\mathfrak{w} + \mathfrak{l}_i\mathfrak{p} + \mathfrak{m}_i\mathfrak{q} + \mathfrak{n}_i\mathfrak{r} = 0 \quad (i=1\ldots 6-n). \tag{22}$$

Dann wollen wir für die Koordinaten der Beschleunigungsdyname die folgenden Ausdrücke einführen:

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_0 + R_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + R_{6-n}\mathfrak{x}_{6-n}, & L &= L_0 + R_1\mathfrak{l}_1 + \cdots + R_{6-n}\mathfrak{l}_{6-n}, \\ Y &= Y_0 + R_1\mathfrak{y}_1 + \cdots + R_{6-n}\mathfrak{y}_{6-n}, & M &= M_0 + R_1\mathfrak{m}_1 + \cdots + R_{6-n}\mathfrak{m}_{6-n}, \\ Z &= Z_0 + R_1\mathfrak{z}_1 + \cdots + R_{6-n}\mathfrak{z}_{6-n}, & N &= N_0 + R_1\mathfrak{n}_1 + \cdots + R_{6-n}\mathfrak{n}_{6-n}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

und damit werden die Bewegungsgleichungen (8):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= X_0 + \sum R_i\mathfrak{x}_i, & \frac{d\eta}{dt} &= Y_0 + \sum R_i\mathfrak{y}_i, & \frac{d\zeta}{dt} &= Z_0 + \sum R_i\mathfrak{z}_i, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= L_0 + \sum R_i\mathfrak{l}_i, & \frac{d\mu}{dt} &= M_0 + \sum R_i\mathfrak{m}, & \frac{d\nu}{dt} &= N_0 + \sum R_i\mathfrak{n}_i. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Wenn wir nun den Arbeitsausdruck nach der Formel (15) berechnen und dabei die Koordinaten der virtuellen Schraubung den Bedingungsgleichungen (22) unterwerfen, so zeigen die Gleichungen (23) sofort, daß:

$$\delta W = X_0\mathfrak{u} + Y_0\mathfrak{v} + Z_0\mathfrak{w} + L_0\mathfrak{p} + M_0\mathfrak{q} + N_0\mathfrak{r} \tag{25}$$

wird. Wenn man also die Variationen δx_ϱ, δy_ϱ, δz_ϱ der Punktkoordinaten der Beschränkung unterwirft, daß sie sich auf eine mögliche, d. h. mit den Bedingungen (22) verträgliche Schraubung beziehen, so gilt die Gleichung (20) des d'Alembertschen Prinzipes, die eine einfache Folgerung aus den Bewegungsgleichungen ist, indem man für δW den Ausdruck (25) nimmt, unabhängig von den Werten der R_i.

Nun kann man auch, statt die Beschränkung der Bewegungsfreiheit durch eine Anzahl linearer Gleichungen zwischen den Schraubungskoordinaten einzuführen, diese letzteren als lineare Funktionen von n Parametern geben, wobei n die Zahl der Freiheitsgrade des Massensystems ist. Wir haben demgemäß zu setzen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \mathfrak{u}_1\tilde{\omega}_1 + \cdots + \mathfrak{u}_n\tilde{\omega}_n, & \mathfrak{p} &= \mathfrak{p}_1\tilde{\omega}_1 + \cdots + \mathfrak{p}_n\tilde{\omega}_n, \\ \mathfrak{v} &= \mathfrak{v}_1\tilde{\omega}_1 + \cdots + \mathfrak{v}_n\tilde{\omega}_n, & \mathfrak{q} &= \mathfrak{q}_1\tilde{\omega}_1 + \cdots + \mathfrak{q}_n\tilde{\omega}_n, \\ \mathfrak{w} &= \mathfrak{w}_1\tilde{\omega}_1 + \cdots + \mathfrak{w}_n\tilde{\omega}_n, & \mathfrak{r} &= \mathfrak{r}_1\tilde{\omega}_1 + \cdots + \mathfrak{r}_n\tilde{\omega}_n. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

In diesen Formeln sind $\mathfrak{u}_i$, $\mathfrak{v}_i$ . . . als Konstante zu behandeln, $\tilde{\omega}_1 \cdots \tilde{\omega}_n$ sind die Parameter, welche die virtuelle Schraubung festlegen. Die Koordinaten der tatsächlichen momentanen Schraubung mögen entsprechend bezeichnet werden:

(26a) $\quad u = \mathfrak{u}_1 \omega_1 + \cdots + \mathfrak{u}_n \omega_n, \quad p = \mathfrak{p}_1 \omega_1 + \cdots + \mathfrak{p}_n \omega_n$ usw.,

indem $\omega_1 \ldots \omega_n$ die Parameter dieser wirklichen Bewegung bedeuten. Die kinetische Energie wird dann, wenn wir in ihren Ausdruck (4) die vorstehenden Werte von $u, v \ldots$ einsetzen, eine homogene quadratische Funktion dieser n Veränderlichen $\omega_1 \ldots \omega_n$, sagen wir:

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma A_{\sigma\tau} \omega_\sigma \omega_\tau. \tag{27}$$

Hierbei sind wieder die Koeffizienten Funktionen der $x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho$, also der Lage und Struktur des Massensystems, außerdem aber Funktionen der die augenblickliche Beschränkung der Bewegungsfreiheit bestimmenden Größen $\mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \ldots$ Wenn ferner die Koordinaten der Massenpunkte auf ein gegen die letzteren festes Koordinatensystem bezogen werden, so sind die Koeffizienten $A_{\sigma\tau}$ überhaupt wie Konstante zu behandeln, vorausgesetzt daß wir die Größen $\mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \ldots$ als Konstante ansehen.

Bilden wir jetzt den Arbeitsausdruck δW, so können wir zunächst, da die durch den Ansatz (26) festgelegten Schraubungskoordinaten den Gleichungen (22) genügen, δW in der Form (25) voraussetzen, und wir finden dann weiter, indem wir:

$$\Omega_i = X_0 \mathfrak{u}_i + Y_0 \mathfrak{v}_i + Z_0 \mathfrak{w}_i + L_0 \mathfrak{p}_i + M_0 \mathfrak{q}_i + N_0 \mathfrak{r}_i \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{28}$$

machen:

$$\delta W = \Sigma \Omega_i \tilde{\omega}_i. \tag{29}$$

Geht man nun von den Bewegungsgleichungen (19) aus, multipliziert sie der Reihe nach mit $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ und addiert sie, so erhält man auf der linken Seite δW. Auf der rechten Seite kann man sofort den zweiten Teil

$$-(T_u' \mathfrak{u} + T_v' \mathfrak{v} + \cdots + T_r' \mathfrak{r}) = -\Sigma T'_{\omega_i} \tilde{\omega}_i \tag{30a}$$

setzen, da $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \ldots$ homogene lineare Funktionen der $\tilde{\omega}_i$ sind. Den ersten Teil ersetzen wir durch die Differenz:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T}{\partial u}\mathfrak{u} + \cdots + \frac{\partial T}{\partial r}\mathfrak{r}\right\} - \left\{\frac{\partial T}{\partial u}\frac{d\mathfrak{u}}{dt} + \cdots + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right\}.$$

Nun können wir folgenden allgemeineren Satz zu Hilfe ziehen: Sind in einer homogenen quadratischen Funktion

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$$

die m Veränderlichen u_μ homogene lineare Funktionen von n Parametern $\omega_1 \ldots \omega_n$, so wird nicht bloß:

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau} A_{\sigma\tau} \omega_\sigma \omega_\tau,$$

sondern, wenn $u_1' \dots u_m'$ und $\omega_1' \dots \omega_n'$ irgend zwei andere korrespondierende Wertesysteme sind, so daß:

$$T' = \tfrac{1}{2}\sum a_{\mu\nu}\, u_\mu'\, u_\nu' = \tfrac{1}{2}\sum A_{\sigma\tau}\, \omega_\sigma'\, \omega_\tau'$$

ist, wird auch:

$$\sum_\nu \frac{\partial T}{\partial u_\nu} u_\nu' = \sum_\sigma \frac{\partial T}{\partial \omega_\sigma} \omega_\sigma'.$$

Denn es bilden auch $u_1 + u_1' \dots u_m + u_m'$ und $\omega_1 + \omega_1' \dots \omega_n + \omega_n'$ zwei korrespondierende Wertesysteme, so daß auch:

$$\tfrac{1}{2}\sum a_{\mu\nu}(u_\mu + u_\mu')(u_\nu + u_\nu') = \tfrac{1}{2}\sum A_{\sigma\tau}(\omega_\sigma + \omega_\sigma')(\omega_\tau + \omega_\tau')$$

ist. Rechnet man die linke und die rechte Seite dieser Gleichung aus, so treten auf beiden Seiten der Gleichung drei Glieder auf. Von diesen drei Gliedern sind die ersten auf beiden Seiten übereinstimmend gleich T, die letzten gleich T', sie heben sich also weg, und was von der vorstehenden Gleichung dann noch übrig bleibt, bildet die Gleichung, die bewiesen werden sollte.

Nach dieser allgemeinen Gleichung aber wird:

$$\text{(30b)} \qquad \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{u}}\, \mathfrak{u} + \dots + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}}\, \mathfrak{r} = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \tilde{\omega}_i,$$

und, da auch $\frac{\mathrm{d}\mathfrak{u}}{\mathrm{d}t} \dots \frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_1}{\mathrm{d}t} \dots \frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_n}{\mathrm{d}t}$ zwei korrespondierende Wertsysteme bilden:

$$\text{(30c)} \qquad \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{u}} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{u}}{\mathrm{d}t} + \dots + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_i}{\mathrm{d}t}.$$

Differenziert man die erste dieser Gleichungen nach t und subtrahiert von ihr die zweite Gleichung, so steht links die auszurechnende Differenz, rechts aber:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \tilde{\omega}_i - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_i}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right) \tilde{\omega}_i.$$

Vereinigt man die gefundenen Werte zu dem zu ermittelnden Ausdrucke für δW, so ergibt sich:

$$\delta W = \sum \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right) - T'_{\omega_i} \right\} \tilde{\omega}_i,$$

und somit finden wir, wenn wieder für δW der Ausdruck (29) substituiert wird:

$$\text{(30)} \qquad \Omega_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right) - T'_{\omega_i} \qquad (i = 1, 2 \dots n).$$

Dies sind die allgemeinen Gleichungen, welche den für ein gegen das Massensystem festes Koordinatensystem geltenden Gleichungen (19) bei beschränkter Bewegungsfreiheit des Körpers analog sind. Die Bedeutung des Ausdruckes $\Sigma T'_{\omega_i} \bar{\omega}_i$ ist nach seiner Definition die, daß er die Veränderung angibt, welche die kinetische Energie erleidet, wenn man in den Koeffizienten $A_{\sigma\tau}$ den Koordinaten $x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho$ der Massenpunkte die durch die Gleichungen (17) und (26) definierten Änderungen erteilt.

Bildet man den Ausdruck $\Sigma T'_{\omega_i} \omega_i$, so wird dieser gemäß der diese Größen T'_{ω_i} definierenden Formel (30a) gleich:

$$T_u' \mathrm{u} + T_v' \mathrm{v} + \cdots + T_r' \mathrm{r},$$

geht also nach (18a) aus der dort eingeführten Größe $-\Phi_2$ hervor, wenn man $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \ldots$ durch $\mathrm{u}, \mathrm{v} \ldots$ ersetzt. Damit geht aber gleichzeitig

$$\delta x_\varrho, \delta y_\varrho, \delta z_\varrho \quad \text{in} \quad \dot{x}_\varrho dt, \dot{y}_\varrho dt, \dot{z}_\varrho dt$$

über, und dann zeigt die Gleichung (18), daß in diesem Falle Φ_2 verschwindet, indem die Koeffizienten von p, q, r in dieser Gleichung einzeln gleich Null sind. Demnach wird:

$$\Sigma T'_{\omega_i} \omega_i = 0. \tag{31}$$

In dem speziellen Falle, wo die T'_{ω_i} alle gleich Null werden, gehen die Gleichungen (30), wenn man auch die $\Omega_i = 0$ nimmt, über in die ganz einfache Form:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right) = 0,$$

die sich sofort integrieren läßt und

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\omega_i} = c_i \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{32}$$

ergibt, wobei die c_i Konstanten bedeuten. Die in dieser Formel steckenden Gleichungen lauten ausgeschrieben, wenn man T in der Form (27) annimmt:

$$\left\{\begin{array}{l} A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2 + \cdots + A_{1n}\omega_n = c_1, \\ A_{21}\omega_1 + A_{22}\omega_2 + \cdots + A_{2n}\omega_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}\omega_1 + A_{n2}\omega_2 + \cdots + A_{nn}\omega_n = c_n. \end{array}\right. \tag{32a}$$

Nun ist aber die Determinante der Koeffizienten $A_{\sigma\tau}$ notwendig von Null verschieden, weil die quadratische Form mit diesen Koeffizienten, welche die kinetische Energie darstellt, als solche stets positiv ist und nur verschwindet, wenn alle $\omega_i = 0$ sind. Deshalb ergeben die vorstehenden Gleichungen ein Lösungssystem:

$$\omega_1 = C_1, \quad \omega_2 = C_2 \ldots \omega_n = C_n. \tag{33}$$

Die Größen $C_1 \dots C_n$ sind mit den $A_{\sigma\tau}$, von denen sie abhängen, in der Zeit konstant, da das zugrunde gelegte Koordinatensystem im Körper fest angenommen wurde. Die Schraubung des Körpers bleibt also unverändert dieselbe, und deshalb bezeichnet Ball die Schrauben, die durch die Gleichungen:

$$T'_{\omega_1} = 0, \dots T'_{\omega_n} = 0$$

festgelegt werden, als permanente Schrauben.[1])

Die Gleichungen:

$$\Omega_1 = 0, \dots \Omega_n = 0$$

legen bei der beschränkten Bewegungsfreiheit die natürliche Bewegung fest. Wenn die Größen $\Omega_1 \dots \Omega_n$ nicht verschwinden, ist die Bewegung auch innerhalb der beschränkten Bewegungsfreiheit erzwungen, und wieder geben die Werte von $\Omega_1 \dots \Omega_n$ ein Maß des Zwanges. Es frägt sich, inwiefern sich dieses Maß mit dem früher durch die Beschleunigungsdyname gegebenen vereinigen läßt.

Wir greifen zunächst auf die Gleichungen (23) zurück, durch welche die Größen $\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0, \mathrm{Z}_0, \mathrm{L}_0, \mathrm{M}_0, \mathrm{N}_0$ eingeführt wurden, und ergänzen die dort noch unvollständige Bestimmung. Die Werte $\mathrm{R}_1 \dots \mathrm{R}_{6-n}$ sind nämlich in diesen Gleichungen zunächst vollkommen willkürlich. Wir legen sie aber fest, wenn wir die Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$(34)\quad \begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{P}_1 \mathfrak{u}_1 + \cdots + \mathrm{P}_n \mathfrak{u}_n + \mathrm{R}_1 \mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathrm{R}_{6-n} \mathfrak{x}_{6-n}, \\ \mathrm{Y} = \mathrm{P}_1 \mathfrak{v}_1 + \cdots + \mathrm{P}_n \mathfrak{v}_n + \mathrm{R}_1 \mathfrak{y}_1 + \cdots + \mathrm{R}_{6-n} \mathfrak{y}_{6-u}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{N} = \mathrm{P}_1 \mathfrak{r}_1 + \cdots + \mathrm{P}_n \mathfrak{r}_n + \mathrm{R}_1 \mathfrak{n}_1 + \cdots + \mathrm{R}_{6-n} \mathfrak{n}_{6-n}. \end{cases}$$

Denn dann können wir $\mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \dots \mathfrak{r}_i$ $(i = 1 \dots n)$ und $\mathfrak{x}_j, \mathfrak{y}_j \dots \mathfrak{n}_j$ $(j = 1 \dots 6-n)$ als die Koordinaten von zusammen sechs Schrauben auffassen, die nicht einem linearen Schraubensystem angehören. Durch diese Koordinaten lassen sich die Koordinaten einer beliebigen Dyname linear ausdrücken, und zwar sind die Koeffizienten

$$\mathrm{P}_1 \dots \mathrm{P}_n, \quad \mathrm{R}_1 \dots \mathrm{R}_{6-n}$$

dieser linearen Ausdrücke eindeutig festgelegt.

Setzen wir nun in (34):

$$(35)\quad \begin{cases} \mathrm{X}_0 = \mathrm{P}_1 \mathfrak{u}_1 + \cdots + \mathrm{P}_n \mathfrak{u}_n, & \mathrm{L}_0 = \mathrm{P}_1 \mathfrak{p}_1 + \cdots + \mathrm{P}_n \mathfrak{p}_n, \\ \mathrm{Y}_0 = \mathrm{P}_1 \mathfrak{v}_1 + \cdots + \mathrm{P}_n \mathfrak{v}_n, & \mathrm{M}_0 = \mathrm{P}_1 \mathfrak{q}_1 + \cdots + \mathrm{P}_n \mathfrak{q}_n, \\ \mathrm{Z}_0 = \mathrm{P}_1 \mathfrak{w}_1 + \cdots + \mathrm{P}_n \mathfrak{w}_n, & \mathrm{N}_0 = \mathrm{P}_1 \mathfrak{r}_1 + \cdots + \mathrm{P}_n \mathfrak{r}_n, \end{cases}$$

1) Transactions of the R. Irish Academy, Vol. XXIX, 1890, p. 613. Theory of Screws, Chap. XXV.

so gelangen wir zu den Gleichungen (23) zurück. Wenn wir aber die vorstehenden Gleichungen zusammenhalten mit den Gleichungen (26), aus denen sie für $\tilde{\omega}_1 = \mathrm{P}_1 \ldots \tilde{\omega}_n = \mathrm{P}_n$ hervorgehen, so erkennen wir, daß X_0, $\mathrm{Y}_0 \ldots$ charakterisiert sind als die Koordinaten einer Dyname, deren Schraube zu dem die Beschränkung der Bewegungsfreiheit darstellenden Schraubensystem gehört, also gleichzeitig die Schraube einer möglichen Schraubung des starren Massensystems ist. Eine solche Dyname, deren Schraube zu dem durch die beschränkte Bewegungsfreiheit gegebenen Schraubensystem gehört, wollen wir hier als Beschleunigungsdyname bezeichnen. Hingegen wollen wir die Dyname, die nach Abzug der Beschleunigungsdyname von der ursprünglich vorliegenden Dyname noch übrig bleibt, deren Koordinaten also lauten:

$$\mathrm{X}_r = \mathrm{X} - \mathrm{X}_0, \quad \mathrm{Y}_r = \mathrm{Y} - \mathrm{Y}_0, \quad \mathrm{Z}_r = \mathrm{Z} - Z_0,$$
$$\mathrm{L}_r = \mathrm{L} - \mathrm{L}_0, \quad \mathrm{M}_r = \mathrm{M} - \mathrm{M}_0, \quad \mathrm{N}_r = \mathrm{N} - \mathrm{N}_0,$$

als Reaktionsdyname bezeichnen. Die Koordinaten dieser Reaktionsdyname sind von der Form:

$$(36) \quad \begin{cases} \mathrm{X}_r = \mathrm{R}_1 \mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathrm{R}_{6-n} \mathfrak{x}_{6-n}, \quad \mathrm{L}_r = \mathrm{R}_1 \mathfrak{l}_1 + \cdots + \mathrm{R}_{6-n} \mathfrak{l}_{6-n} \\ \text{usw.} \end{cases}$$

und charakteristisch für sie ist, daß für sie infolge der Gleichungen (22):

$$(37) \quad \frac{\delta W}{\delta t} = \mathrm{X}_r \mathfrak{u} + \mathrm{Y}_r \mathfrak{v} + \mathrm{Z}_r \mathfrak{w} + \mathrm{L}_r \mathfrak{p} + \mathrm{M}_r \mathfrak{q} + \mathrm{N}_r \mathfrak{r} = 0$$

wird, also die Arbeitsleistung dieser Reaktionskräfte bei jeder dem starren Massensystem möglichen Schraubung verschwindet.

Nehmen wir nun die Gleichung (28), die Ω_i definiert, und setzen in ihr die Werte (35) ein, so ergibt sich:

$$(38) \quad \begin{cases} \Omega_1 = \Gamma_{11} \mathrm{P}_1 + \Gamma_{12} \mathrm{P}_2 + \cdots + \Gamma_{1n} \mathrm{P}_n, \\ \Omega_2 = \Gamma_{21} \mathrm{P}_1 + \Gamma_{22} \mathrm{P}_2 + \cdots + \Gamma_{2n} \mathrm{P}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega_n = \Gamma_{n1} \mathrm{P}_1 + \Gamma_{n2} \mathrm{P}_2 + \cdots + \Gamma_{nn} \mathrm{P}_n, \end{cases}$$

wenn wir:

$$(39) \quad \Gamma_{ij} = \mathfrak{u}_i \mathfrak{p}_j + \mathfrak{v}_i \mathfrak{q}_j + \mathfrak{w}_i \mathfrak{r}_j + \mathfrak{p}_i \mathfrak{u}_j + \mathfrak{q}_i \mathfrak{v}_j + \mathfrak{r}_i \mathfrak{w}_j \quad (i, j = 1 \ldots n)$$

setzen. Es ist nun leicht zu sehen, daß die Determinante dieser Koeffizienten Γ_{ij} nicht verschwindet. Denn multiplizieren wir die Gleichungen (26) der Reihe nach mit $\mathfrak{p}_j$, $\mathfrak{q}_j$, $\mathfrak{r}_j$, $\mathfrak{u}_j$, $\mathfrak{v}_j$, $\mathfrak{w}_j$ und addieren sie, so finden wir:

$$\mathfrak{u} \mathfrak{p}_j + \mathfrak{v} \mathfrak{q}_j + \mathfrak{w} \mathfrak{r}_j + \mathfrak{p} \mathfrak{u}_j + \mathfrak{q} \mathfrak{v}_j + \mathfrak{r} \mathfrak{w}_j = \Gamma_{1j} \tilde{\omega}_1 + \cdots + \Gamma_{nj} \tilde{\omega}_n \quad (j = 1 \ldots n).$$

Wenn nun die Determinante der $\Gamma_{ij} = 0$ wäre, so könnte man diese Gleichungen mit solchen Koeffizienten λ_j multiplizieren, daß ihre Summe unabhängig von $\tilde{\omega}_1 \ldots \tilde{\omega}_n$ verschwindet. Es würde dann:

$$\mathfrak{u}\mathfrak{p}_\lambda + \mathfrak{v}\mathfrak{q}_\lambda + \cdots + \mathfrak{r}\mathfrak{w}_\lambda = 0,$$

wenn man setzt:

$$\Sigma \lambda_j \mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_\lambda, \quad \Sigma \lambda_j \mathfrak{q}_j = \mathfrak{q}_\lambda \ldots \Sigma \lambda_j \mathfrak{w}_j = \mathfrak{w}_\lambda.$$

Dies sind die Koordinaten einer Schraube des linearen Schraubensystems, das durch die Gleichungen (26) festgelegt wird, sie ergeben sich aus diesen für $\tilde{\omega}_i = \lambda_i$. Zu dieser Schraube müßten aber, da die Gleichung $\mathfrak{u}\mathfrak{p}_\lambda + \cdots + \mathfrak{r}\mathfrak{w}_\lambda = 0$ für die Koordinaten $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \ldots$ einer beliebigen Schraube des Systems erfüllt sein soll, alle Schrauben des linearen Systems, zu dem sie selbst gehört, korreziprok sein, was unmöglich ist.

Es lassen sich also, weil die Determinante der Koeffizienten nicht verschwindet, die Gleichungen (38) nach $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \ldots \mathrm{P}_n$ auflösen und ergeben ein Lösungssystem. Die Größen $\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_n$ gehen somit einfach durch eine lineare Transformation aus den ursprünglichen Koordinaten der Dyname innerhalb des linearen Schraubensystems hervor und lassen sich ihrerseits als solche Koordinaten deuten. Die Gleichungen (30) haben demnach in der Tat bei der beschränkten Bewegungsfreiheit dieselbe Bedeutung wie die früheren Gleichungen (19) für das freie Massensystem, indem auf ihrer linken Seite die Koordinaten der Beschleunigungsdyname stehen.

In dem besonderen Falle, wo das System nur einen Freiheitsgrad besitzt, also zwangläufig ist, wird der Ausdruck für die kinetische Energie einfach:

$$T = \tfrac{1}{2} A \omega^2.$$

Es wird hier $T_\omega' = 0$, $\dfrac{\partial T}{\partial \omega} = A\omega$, also wird die einzige Bewegungsgleichung:

$$\Omega = A \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}. \tag{40}$$

Es liegt der Gedanke nahe, die speziellen Betrachtungen, die wir oben über lineare Schraubensysteme der verschiedenen Stufen angestellt haben, hier nach der kinetischen Seite hin fortzusetzen. Die früheren Untersuchungen hatten wir jedesmal auf ein besonders gewähltes Koordinatensystem gegründet, und das gleiche müssen wir auch hier tun, wenn wir Formeln von gleicher Einfachheit erlangen wollen. Dabei ist aber von vornherein zu bemerken, daß, damit die so gewonnenen Formeln wirklich Sinn haben, wir annehmen müssen, die momentane Beschränkung der Bewegungsfreiheit sei dauernd dieselbe, d. h. die Koeffizienten in den sie darstellenden linearen Gleichungen seien als Konstanten aufzufassen. Denn sonst würde auch das zugrunde gelegte spezielle Koordinatensystem sich während des Verlaufes der Bewegung verändern, und Gleichungen, die sich auf dieses Koordinatensystem beziehen, können keine Lösung des Bewegungsproblems bedeuten, weil die Aufgabe, in jedem Augenblicke die Lage des speziellen Koordinatensystems zu bestimmen, unerledigt bleibt und sich somit aus den aufgestellten Bewegungsgleichungen eine Beschreibung der vor sich gehenden Bewegung nicht abnehmen läßt. Wenn wir nun voraussetzen, daß die vorliegende Beschränkung der Bewegungsfreiheit dauernd durch dieselben linearen Gleichungen zwischen den kinematischen Koordinaten gegeben wird, also von der Zeit und der Lage des Körpers unabhängig ist, so müssen wir uns klar machen, daß wir damit das Feld des praktisch Bedeutsamen und vielleicht auch des praktisch Realisierbaren verlassen und nur einer theoretischen Klärung zustreben. Vom Standpunkte der letzteren aus aber scheint es natürlich und angebracht, so vorzugehen, da wir auf diese Weise die einfachsten Typen der Bewegungsmöglichkeiten gewinnen und damit auch eine Illustration der Bewegungsvorgänge überhaupt an den theoretisch nächstliegenden Fällen erhalten.

Zwanzigstes Kapitel.

Der freie Körper.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Bewegung eines freien Körpers näher zu untersuchen, wobei wir das Wort Körper einfach im Sinne eines starren Massensystems gebrauchen. Zu dem Zwecke knüpfen wir wieder an den in der Gleichung (4) des vorigen Kapitels gegebenen Ausdruck für die kinetische Energie an. Denken wir uns denselben auf ein in dem Körper festes Koordinatensystem bezogen, so wird er eine quadratische Form der kinematischen Koordinaten u, v ... mit konstanten Koeffizienten, denn die Koordinaten $x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho$, von denen diese Koeffizienten abhängen, erfahren in einem solchen Koordinatensystem keine Änderung. Wir fragen nun, ob durch geeignete Wahl des Koordinatensystems sich der Ausdruck für die kinetische Energie auf eine besonders einfache Form bringen läßt.

Wir denken uns den Ausdruck für T, wie er sich durch Ausrechnung der Klammern in der Formel:

$$(1)\quad T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_\varrho\{(\mathrm{u} - \mathrm{r}y_\varrho + \mathrm{q}z_\varrho)^2 + (\mathrm{v} - \mathrm{p}z_\varrho + \mathrm{r}x_\varrho)^2 + (\mathrm{w} - \mathrm{q}x_\varrho + \mathrm{p}y_\varrho)^2\}$$

ergibt, in drei Teile zerlegt, von denen der erste nur u, v, w, der letzte nur p, q, r und der mittlere beide Tripel von Veränderlichen in jedem Glied vereint enthält. Der erste Teil ist dann einfach:

(1a) $$T_0 = \tfrac{1}{2} M(\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2),$$

wenn $M = \Sigma m_\varrho$ die Gesamtmasse des Massensystems bedeutet. Der letzte Teil wird:

(1b) $$T_1 = \tfrac{1}{2} \Sigma m_\varrho \{(\mathrm{r} y_\varrho - \mathrm{q} z_\varrho)^2 + (\mathrm{p} z_\varrho - \mathrm{r} x_\varrho)^2 + (\mathrm{q} x_\varrho - \mathrm{p} y_\varrho)^2\},$$

und der mittlere Teil:

(1c) $$T' = M\{x_0(\mathrm{v}\,\mathrm{r} - \mathrm{w}\,\mathrm{q}) + y_0(\mathrm{w}\,\mathrm{p} - \mathrm{u}\,\mathrm{r}) + z_0(\mathrm{u}\,\mathrm{q} - \mathrm{v}\,\mathrm{p})\},$$

wenn:

(2) $$x_0 = \frac{\Sigma m_\varrho x_\varrho}{\Sigma m_\varrho}, \quad y_0 = \frac{\Sigma m_\varrho y_\varrho}{\Sigma m_\varrho}, \quad z_0 = \frac{\Sigma m_\varrho z_\varrho}{\Sigma m_\varrho}$$

gesetzt wird. Es sind dann x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes. Wählt man nun diesen Schwerpunkt des Massensystems zum Koordinatenursprung, so verschwinden x_0, y_0, z_0 und damit T'. Wir wollen das T_0, das sich dann ergibt, zur Unterscheidung schreiben:

$$T_0 = \tfrac{1}{2} M(u^2 + v^2 + w^2)$$

und haben jetzt:

$$T = T_0 + T_1.$$

Die gesamte kinetische Energie zerfällt so in zwei Teile, der erste Teil rührt von der Bewegung des Schwerpunktes her und ist gleich der kinetischen Energie der in diesem Schwerpunkte konzentrierten Gesamtmasse, der zweite Teil bezieht sich auf die Drehung um den Schwerpunkt.

Es bleibt noch dieser zweite Teil des Ausdruckes für die kinetische Energie zu untersuchen. Derselbe ist durch den Ausdruck (1b) gegeben, wofür wir auch schreiben können:

(1d) $$T_1 = \tfrac{1}{2} \Sigma m_\varrho \{(x_\varrho{}^2 + y_\varrho{}^2 + z_\varrho{}^2)(\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2) - (x_\varrho \mathrm{p} + y_\varrho \mathrm{q} + z_\varrho \mathrm{r})^2\}.$$

Hierin wollen wir setzen:

(3) $$\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2 = \omega^2,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der momentanen Schraubung bezeichnet, ferner:

(4) $$\Sigma m_\varrho (x_\varrho \mathrm{p} + y_\varrho \mathrm{q} + z_\varrho \mathrm{r})^2 = \sigma^2,$$

und endlich:

(5) $$\Sigma m_\varrho (x_\varrho{}^2 + y_\varrho{}^2 + z_\varrho{}^2) = D.$$

Dieser letzte Ausdruck ist das Trägheitsmoment des Massensystems für den Koordinatenursprung. Bei Einführung der vorstehenden Bezeichnungen wird die Gleichung (1d):

(1e) $$T_1 = \tfrac{1}{2}\{D\omega^2 - \sigma^2\}.$$

Wir wollen nun die Formel (4) weiter erörtern. Machen wir in ihr:

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{p} = \sigma x, \quad \mathrm{q} = \sigma y, \quad \mathrm{r} = \sigma z,$$

so wird sie:

$$\text{(7)} \qquad \Sigma m_\varrho (x_\varrho x + y_\varrho y + z_\varrho z)^2 = 1.$$

Deuten wir in dieser Gleichung x, y, z als Punktkoordinaten, so stellt sie ein Ellipsoid dar, das wir als das Binetsche Trägheitsellipsoid bezeichnen wollen.[1]) Der Mittelpunkt desselben ist der Koordinatenursprung, den wir mit dem Schwerpunkte S des Massensystems zusammenfallen lassen wollten. Ist P ein Punkt des Ellipsoids und vergrößern wir den Radiusvektor SP im Verhältnis $\sigma : 1$, so wird die Länge des Radiusvektors SP', in den SP übergeht, gleich ω. Wenn nun p, q, r gegeben sind, so ist auch der Punkt P', dessen Koordinaten diese Größen sind, gegeben, und man kann das Trägheitsellipsoid dann benutzen, um σ zu bestimmen. Denn wenn der Strahl SP' das Ellipsoid in P trifft, so wird:

$$\sigma = \frac{SP'}{SP} = \frac{\omega}{SP}.$$

Nach dem Ausdrucke (1e) für die kinetische Energie T_1 der Drehung sieht man sofort, daß bei gegebenem ω diese Energie einen Extremwert erreicht, wenn der Radiusvektor SP des Binetschen Trägheitsellipsoids einen Extremwert erreicht, also in eine Halbachse des Ellipsoids fällt.

Wir wollen das Koordinatensystem nun so annehmen, daß seine Achsen mit den Hauptachsen des Trägheitsellipsoids zusammenfallen und das letztere infolgedessen eine Gleichung von folgender Gestalt erhält:

$$\text{(8)} \qquad A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1.$$

Dann wird die Formel (4), wenn wir zur Unterscheidung hier für p, q, r Kursive verwenden:

$$\text{(4a)} \qquad \sigma^2 = A'p^2 + B'q^2 + C'r^2,$$

während die Formel (3) ungeändert bleibt. Die linke Seite in der Gleichung (5) ist aber, wie man sofort sieht, die Summe der Koeffizienten von x^2, y^2 und z^2 in der Gleichung (7) des Trägheitsellipsoids und bei der Koordinatentransformation invariant. Es wird demnach jetzt:

$$\text{(5a)} \qquad D = A' + B' + C'.$$

Somit erhalten wir:

$$\text{(1f)} \qquad 2\,T_1 = (B' + C')p^2 + (C' + A')q^2 + (A' + B')r^2,$$

1) Vgl. Binet, Journ. de l'École polytechn., Cah. 16, 1813, p. 41.

oder wenn wir:

$$(9) \qquad B' + C' = A, \quad C' + A' = B, \quad A' + B' = C$$

machen:

$$(1\text{g}) \qquad T_1 = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

und demnach wird bei dieser besonderen Wahl des Koordinatensystems die gesamte kinetische Energie:

$$(1\text{h}) \qquad T = \tfrac{1}{2}M(u^2 + v^2 + w^2) + \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Die Koordinatenachsen heißen dann die Hauptträgheitsachsen des Körpers.[1]) Da T immer positiv sein muß, ist sofort zu schließen, daß auch A, B, C stets positiv sind. Wir nehmen im folgenden außerdem $A > B > C$ an, indem wir die Gleichheit zweier dieser Größen, trotzdem sie bei der Theorie des Kreisels[2]) eine große Rolle spielt, ausschließen.

Aus dem vorstehenden Ausdrucke für T ergeben sich sofort die Koordinaten der Beschleunigungsdyname als seine partiellen Derivierten:

$$(10) \quad \boldsymbol{\xi} = Mu, \quad \boldsymbol{\eta} = Mv, \quad \boldsymbol{\zeta} = Mw, \quad \boldsymbol{\lambda} = Ap, \quad \boldsymbol{\mu} = Bq, \quad \boldsymbol{\nu} = Cr,$$

und damit werden die Bewegungsgleichungen (14) des vorigen Kapitels, wenn wir zur Unterscheidung die Koordinaten der Beschleunigungsdyname für dieses besondere Koordinatensystem mit Kursiven bezeichnen:

$$(11) \quad \begin{cases} X = M\left\{\frac{du}{dt} + qw - rv\right\}, & L = A\frac{dp}{dt} - (B - C)qr, \\ Y = M\left\{\frac{dv}{dt} + ru - pw\right\}, & M = B\frac{dq}{dt} - (C - A)rp, \\ Z = M\left\{\frac{dw}{dt} + pv - qu\right\}, & N = C\frac{dr}{dt} - (A - B)pq. \end{cases}$$

Wenn wir durch die Gleichungen (2) die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Schwerpunktes einführen, so lassen sich auch die ersten der drei auf ein im Raume festes Koordinatensystem bezogenen Bewegungsgleichungen auf eine bemerkenswerte Form bringen. Es wird nämlich:

$$\boldsymbol{\xi} = \Sigma m_\varrho \dot{x}_\varrho = \frac{d}{dt}\Sigma m_\varrho x_\varrho = \frac{d}{dt}(Mx_0) = M\dot{x}_0,$$

also:

$$(12\text{a}) \qquad \boldsymbol{\xi} = M\dot{x}_0, \quad \boldsymbol{\eta} = M\dot{y}_0, \quad \boldsymbol{\zeta} = M\dot{z}_0,$$

mithin gehen die ersten drei Gleichungen (9) des vorigen Kapitels über in:

$$(12\text{b}) \qquad \mathrm{X} = M\ddot{x}_0, \quad \mathrm{Y} = M\ddot{y}_0, \quad \mathrm{Z} = M\ddot{z}_0.$$

---

1) Sie sind von Segner entdeckt worden, Specimen theoriae turbinum 1755.

2) Es ist hier der Ort, auf das Werk von Klein und Sommerfeld, Die Theorie des Kreisels, 3 Hefte, 1897—1903, zu verweisen, in dem diese Theorie mitsamt ihren allgemeinen Grundlagen erschöpfend entwickelt ist.

Diese Gleichungen zeigen, daß die Resultante der Beschleunigungsdyname an Größe und Richtung gleich wird dem mit der Gesamtmasse multiplizierten Beschleunigungsvektor des Schwerpunktes. Es ist somit möglich, die Bewegung des Schwerpunktes völlig gesondert zu beschreiben, indem man sich denselben mit der Gesamtmasse M behaftet denkt und den mit dieser Gesamtmasse multiplizierten Beschleunigungsvektor als Kraftvektor einführt.

Es zeigen aber die drei letzten Gleichungen (11), daß auch die Drehung um den Schwerpunkt sich gesondert beschreiben läßt.[1]) Denn in diesen Gleichungen kommen auf der einen Seite nur die Komponenten des Momentes der Beschleunigungsdyname für den Schwerpunkt, genommen nach den Hauptträgheitsachsen, vor, auf der anderen Seite die Komponenten der Drehung um den Schwerpunkt, ebenfalls nach den Hauptträgheitsachsen genommen.

Es zerfällt so die Darstellung der freien Bewegung eines starren Körpers in zwei völlig getrennte Teile. Der eine betrifft die Bewegung des Schwerpunktes, der andere die Drehung um den Schwerpunkt. Wir haben die Gleichungen für die letztere auf die Hauptträgheitsachsen bezogen, wir wollen sie auch geben für ein Koordinatensystem mit beliebigen, im Raume festen Achsenrichtungen. Wir fragen deshalb, wie sich die drei letzten Koordinaten λ, μ, ν des Impulses ändern, wenn man das zugrunde gelegte Koordinatensystem um seinen Ursprung dreht. Wir bezeichnen wieder mit

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3$$

die Richtungskosinus der neuen Koordinatenachsen im alten System, so daß die Koordinaten eines Punktes, die im alten System x, y, z waren, im neuen werden:

$$(13^0)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{cases}$$

Dabei ist zu beachten, daß, da jede der neuen Koordinatenrichtungen auf den anderen beiden senkrecht steht, z. B.:

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, \quad \beta_1 = \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2, \quad \gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2$$

ist. Dann wird z. B., wenn wir auch die Koordinaten des Impulses im neuen Systeme durch Akzente auszeichnen:

$$\lambda' = \Sigma m_\varrho (y'_\varrho \dot{z}'_\varrho - z'_\varrho \dot{y}'_\varrho)$$

und hierin:

1) Euler, Scientia navalis, 1749 (I, § 128). Die Gleichungen selbst gab Euler in den Mémoires de l'Acad. de Berlin, Année 1758, p. 154.

$$
\begin{aligned}
y'_\varrho \dot z'_\varrho - z'_\varrho \dot y'_\varrho &= (\alpha_2 x_\varrho + \beta_2 y_\varrho + \gamma_2 z_\varrho)(\alpha_3 \dot x_\varrho + \beta_3 \dot y_\varrho + \gamma_3 \dot z_\varrho) \\
&\quad - (\alpha_3 x_\varrho + \beta_3 y_\varrho + \gamma_3 z_\varrho)(\alpha_2 \dot x_\varrho + \beta_2 \dot y_\varrho + \gamma_2 \dot z_\varrho) \\
&= (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)(y_\varrho \dot z_\varrho - z_\varrho \dot y_\varrho) + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)(z_\varrho \dot x_\varrho - x_\varrho \dot z_\varrho) \\
&\quad + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(x_\varrho \dot y_\varrho - y_\varrho \dot x_\varrho) \\
&= \alpha_1(y_\varrho \dot z_\varrho - z_\varrho \dot y_\varrho) + \beta_1(z_\varrho \dot x_\varrho - x_\varrho \dot z_\varrho) + \gamma_1(x_\varrho \dot y_\varrho - y_\varrho \dot x_\varrho).
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich:

$$\boldsymbol{\lambda}' = \alpha_1 \boldsymbol{\lambda} + \beta_1 \boldsymbol{\mu} + \gamma_1 \boldsymbol{\nu}.$$

Ebenso wird:

$$\boldsymbol{\mu}' = \alpha_2 \boldsymbol{\lambda} + \beta_2 \boldsymbol{\mu} + \gamma_2 \boldsymbol{\nu},$$
$$\boldsymbol{\nu}' = \alpha_3 \boldsymbol{\lambda} + \beta_3 \boldsymbol{\mu} + \gamma_3 \boldsymbol{\nu}.$$

Wir lassen nun die ursprüngliche Lage der Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, dann ergibt sich wie oben:

$$\boldsymbol{\lambda} = Ap, \quad \boldsymbol{\mu} = Bq, \quad \boldsymbol{\nu} = Cr.$$

In dem neuen Koordinatensystem, dessen Ursprung immer noch der Schwerpunkt, also im Raume beweglich ist, dessen Koordinatenrichtungen aber beliebig und im Raume fest sein sollen, wollen wir die drei letzten Koordinaten der Beschleunigungsdyname mit L_0, M_0, N_0 bezeichnen, dann wird:

$$L_0 = \frac{d\boldsymbol{\lambda}'}{dt}, \quad M_0 = \frac{d\boldsymbol{\mu}'}{dt}, \quad N_0 = \frac{d\boldsymbol{\nu}'}{dt}$$

oder:

$$
(13) \qquad \left\{
\begin{aligned}
L_0 &= \frac{d}{dt}(\alpha_1 Ap + \beta_1 Bq + \gamma_1 Cr), \\
M_0 &= \frac{d}{dt}(\alpha_2 Ap + \beta_2 Bq + \gamma_2 Cr), \\
N_0 &= \frac{d}{dt}(\alpha_3 Ap + \beta_3 Bq + \gamma_3 Cr).
\end{aligned}
\right.
$$

Nehmen wir nun insbesondere an, die Bewegung des starren Körpers sei eine natürliche, bei welcher die Koordinaten der Beschleunigungsdyname alle verschwinden, so ergeben zunächst die Gleichungen (12b) für die Bewegung des Schwerpunktes:

$$\ddot x_0 = 0, \quad \ddot y_0 = 0, \quad \ddot z_0 = 0,$$

woraus durch Integration folgt:

$$(14) \qquad \dot x_0 = a, \quad \dot y_0 = b, \quad \dot z_0 = c,$$

wenn a, b, c Konstanten bedeuten. Der Schwerpunkt bewegt sich also mit unveränderter Geschwindigkeit und in unveränderter Richtung weiter.

Nicht so einfach aber ist die Drehung um den Schwerpunkt zu beschreiben, die der Körper ausführt. Es werden zunächst die letzten drei Gleichungen (11):

$$(15)\qquad \begin{cases} A\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=(B-C)qr, \\ B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=(C-A)rp, \\ C\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=(A-B)pq, \end{cases}$$

Wenn aber die ursprünglichen Koordinaten der Beschleunigungsdyname alle verschwinden, so werden auch L_0, M_0, $N_0=0$, wie man sofort sieht, wenn man z. B. den Ausdruck $L_0=\frac{d}{dt}\Sigma m_\varrho\{\dot{z}_\varrho(y_\varrho-y_0) - \dot{y}_\varrho(z_\varrho-z_0)\}$ mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) und (8) des vorigen und die Gleichungen (12a) dieses Kapitels ausrechnet. Dann aber gehen die Gleichungen (13) in eine Form über, die sich sofort integrieren läßt und ergibt:

$$(16)\qquad \begin{cases} \alpha_1 Ap+\beta_1 Bq+\gamma_1 Cr=f, \\ \alpha_2 Ap+\beta_2 Bq+\gamma_2 Cr=g, \\ \alpha_3 Ap+\beta_3 Bq+\gamma_3 Cr=h, \end{cases}$$

wenn f, g, h drei Integrationskonstanten bezeichnen, während α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 die Richtungskosinus der Hauptträgheitsachsen in dem festgerichteten Koordinatensystem sind. An die beiden Gleichungssysteme (15) und (16) hat sich die Diskussion der Drehung um den Schwerpunkt anzuschließen.

Aus den Gleichungen (15), die als die Eulerschen Gleichungen bezeichnet werden, folgt, indem man sie der Reihe nach mit p, q, r multipliziert und addiert:

$$Ap\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Bq\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Cr\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0,$$

oder integriert:

$$(17)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=2T,$$

wo $2T$ jetzt eine Konstante bezeichnet. T ist aber gemäß der Gleichung (1g) die kinetische Energie der Drehung und die Gleichung (17) drückt somit aus, daß diese Energie im Verlaufe der Bewegung konstant bleibt.

Multipliziert man die Gleichungen (15) der Reihe nach mit Ap, Bq, Cr und addiert sie, so ergibt sich die weitere Gleichung:

$$A^2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+B^2q\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+C^2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0,$$

deren Integration liefert:

$$(18)\qquad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=G^2,$$

wenn G wieder eine Integrationskonstante bedeutet.

Bei den Gleichungen (16) ist über die Orientierung des Koordinatensystems noch nicht verfügt worden. Wir denken uns diese so getroffen, daß in einem bestimmten Augenblicke:

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = Ap : Bq : Cr$$

ist. Weil allgemein:

$$\alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3 = 0, \quad \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0,$$

muß in diesem Augenblicke:

$$\alpha_1 Ap + \beta_1 Bq + \gamma_1 Cr = 0, \quad \alpha_2 Ap + \beta_2 Bq + \gamma_2 Cr = 0$$

sein. Da diese Ausdrücke aber nach den ersten beiden Gleichungen (16) gleich den Konstanten f und g sein sollen, so folgt:

(19a) $$f = 0 \quad \text{und} \quad g = 0.$$

Nun muß auch:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0 \quad \text{usw.}$$

sein, wie aus den Substitutionsgleichungen (13^0) sofort durch Quadrieren und Addieren mit Rücksicht auf die Identität:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

folgt, es ergibt sich daher, indem wir die Gleichungen (16) quadrieren und addieren:

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = h^2.$$

Vergleichen wir dies mit (18), so sehen wir, daß wir:

(19b) $$h = G$$

annehmen können.

Aus den beiden ersten Gleichungen (16) folgt aber, wenn $f = 0$ und $g = 0$:

$$Ap : Bq : Cr = (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) : (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) : (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1),$$

dies bedeutet:

(19c) $$Ap : Bq : Cr = \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3.$$

Es sind also während des ganzen Verlaufes der Bewegung die Richtungskosinus der im Raume unveränderlichen z-Achse gegen die Hauptträgheitsachsen des Körpers proportional zu Ap, Bq, Cr. Deuten wir demnach diese Größen:

(20) $$\lambda = Ap, \quad \mu = Bq, \quad \nu = Cr$$

als Koordinaten eines Punktes in dem auf die Hauptträgheitsachsen bezogenen Koordinatensystem, so bleibt nach der Formel (18) die Entfernung dieses Punktes, den wir als den T r ä g h e i t s p o l bezeichnen, von dem Schwerpunkte, nämlich

(18a) $$G = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

ungeändert, anderseits aber bleibt auch die gerade Linie, die von dem Schwerpunkte nach dem Trägheitspole hinführt, da sie nach (19c) mit der im Raume festen z-Achse zusammenfällt, ungeändert, und heißt deshalb die invariable Linie. Wenn wir demnach den Schwerpunkt als ruhend voraussetzen, so ist auch der Trägheitspol ein fester Punkt im Raume.

Deuten wir ebenfalls p, q, r als Koordinaten eines Punktes, bezogen auf die Hauptträgheitsachsen, und nennen diesen Punkt den Drehungspol, so liefert der Radiusvektor, der von dem Schwerpunkte nach demselben hinführt, die Lage der momentanen Rotationsachse *im* Körper und die Entfernung des Drehungspols vom Schwerpunkte ist gleich der Rotationsgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Im Verlaufe der Drehung muß sich der Drehungspol, wenn er nicht in eine Hauptträgheitsachse fällt, auf einer Raumkurve vierter Ordnung bewegen, welche die Schnittkurve zweier Ellipsoide bildet. Dies sind die Ellipsoide, welche durch die Gleichungen:

(17) $$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T$$

(18) $$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2$$

festgelegt werden, wenn man p, q, r als Punktkoordinaten deutet. Aus diesen beiden Gleichungen kann man die folgenden herleiten:

(21) $$\begin{cases} B(A-B)\,q^2 + C(A-C)\,r^2 = 2AT - G^2, \\ C(B-C)\,r^2 - A(A-B)\,p^2 = 2BT - G^2, \\ A(A-C)\,p^2 + B(B-C)\,q^2 = -(2CT - G^2), \end{cases}$$

wobei wir $A > B > C$ voraussetzen, und außerdem ergibt sich:

(22) $$A(2AT - G^2)p^2 + B(2BT - G^2)\,q^2 + C(2CT - G^2)\,r^2 = 0.$$

Die Gleichungen (21) kann man auffassen als die Gleichungen dreier Zylinder, welche durch die Raumkurve vierter Ordnung hindurchgehen, oder als die Gleichungen der Projektionen dieser Raumkurve auf die Koordinatenebenen. Mit der Bewegung des Körpers selbst muß auch die Raumkurve, welche die Bahn des Drehungspoles bildet, oder, wie sie nach Poinsot[1]) heißt, die Polhodie, reell sein, und damit auch ihre Projektionskurven auf die Ebenen der Hauptachsen. Unter diesen Projektionskurven müssen nach den Gleichungen (21) zwei Ellipsen und eine Hyperbel sein, und die Bedingung der Realität wird erfüllt, wenn unter der Voraussetzung $A > B > C$:

1) Théorie nouvelle de la rotation des corps. Vgl. S. 76, Anm. 1.

$$2AT - G^2 > 0, \quad 2CT - G^2 < 0, \tag{23}$$

mithin:

$$2CT < G^2 < 2AT \tag{23a}$$

ist. Wenn eine der rechten Seiten in den Gleichungen (21) Null ist, treten Grenzfälle ein, die an sich sehr interessant sind, aber hier übergangen werden sollen. Man findet sie z. B. in Rouths Dynamik der Systeme starrer Körper behandelt, auf die wir bezüglich des ganzen Inhaltes dieses Kapitels verweisen können.[1]) Die Gleichung (22) gibt den Kegel, welcher die Polhodie aus dem Schwerpunkte projiziert. Dieser ist ebenfalls stets reell, wenn die Bedingungen (23) erfüllt sind.

Wir denken uns nun an das erste der Ellipsoide, das wir als das Poinsotsche Ellipsoid bezeichnen wollen, in dem Punkte mit den Koordinaten p, q, r die Tangentialebene gelegt. Dieselbe hat die Gleichung:

$$Apx + Bqy + Crz = 2T$$

oder mit Rücksicht auf (20):

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 2T. \tag{24}$$

Diese Gleichung bringen wir auf die Normalform:

$$\cos\alpha\, x + \cos\beta\, y + \cos\gamma\, z = \mathfrak{h}, \tag{24a}$$

wenn wir sie durch G [vgl. (18a)] dividieren. Es sind also die Richtungskosinus des aus dem Koordinatenursprung, d. h. aus dem Schwerpunkte auf die Ebene gefällten Lotes:

$$\cos\alpha = \frac{\lambda}{G}, \quad \cos\beta = \frac{\mu}{G}, \quad \cos\gamma = \frac{\nu}{G}, \tag{25a}$$

dies Lot fällt demnach der Richtung nach mit der invariablen Linie zusammen und ist im Raume fest. Die Länge des Lotes ist:

$$\mathfrak{h} = \frac{2T}{G}, \tag{25b}$$

also ebenfalls konstant. Die ganze Ebene behält mithin im Raume ihre Lage gegen den Schwerpunkt bei, und das Poinsotsche Ellipsoid, das mit dem Körper beweglich ist, bewegt sich so, daß es diese feste Ebene beständig berührt, und zwar in dem jeweiligen Drehungspol. Da sonach die momentane Drehachse jedesmal durch den Berührungspunkt des Ellipsoides mit der Ebene hindurchgeht, ist die Bewegung des Ellipsoides auf der festen Ebene ein einfaches Rollen und wir können sagen: Die Bewegung des Körpers um seinen Schwer-

1) Deutsche Ausgabe (Leipzig 1898) 2. Bd., p. 98 seq.

punkt kann dargestellt werden, indem man ein Ellipsoid sich so um seinen Mittelpunkt drehen läßt, daß es gleichzeitig auf einer festen Ebene rollt.

Die Komponente der Drehgeschwindigkeit nach einer bestimmten Richtung, die mit den Hauptträgheitsachsen die Winkel α, β, γ bildet, ist gegeben durch den Ausdruck:

$$p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma.$$

Suchen wir insbesondere die Komponente nach der invariablen Linie, so sind für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die obenstehenden Werte zu nehmen, und wir finden für die Komponente den Ausdruck:

$$\frac{p\boldsymbol{\lambda}+q\boldsymbol{\mu}+r\boldsymbol{\nu}}{G}=\frac{Ap^2+Bq^2+Cr^2}{G}=\frac{2T}{G}=\mathfrak{h}. \tag{26}$$

Die Komponente der Drehgeschwindigkeit nach der invariablen Linie, die durch das vom Schwerpunkte auf die feste Ebene gefällte Lot gegeben wird, ist also konstant und gleich der Länge $\mathfrak{h}$ dieses Lotes.

Bei der Drehung des Körpers um den Schwerpunkt vollführt nun auch der Trägheitspol, der im Raume fest ist, im Körper eine bestimmte Bewegung, und zwar muß er sich, da sein Abstand vom Schwerpunkte konstant $= G$ ist, auf einer Kugel bewegen, die, wenn $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ wieder die Koordinaten des Trägheitspoles sind, durch die Gleichung:

$$\boldsymbol{\lambda}^2+\boldsymbol{\mu}^2+\boldsymbol{\nu}^2=G^2 \tag{27}$$

gegeben wird. Substituiert man in die Gleichung (17) die Werte $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ aus (20), so wird sie:

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}^2}{A}+\frac{\boldsymbol{\mu}^2}{B}+\frac{\boldsymbol{\nu}^2}{C}=2T. \tag{28}$$

Durch diese Gleichung wird, wenn $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ als Punktkoordinaten gedeutet werden, ein drittes Ellipsoid dargestellt, das wir als das Mac Cullaghsche Ellipsoid[1]) bezeichnen. Dieses Ellipsoid ist ebenfalls mit dem Körper fest verbunden, sein Mittelpunkt ist der Schwerpunkt des Körpers und es bewegt sich mit dem letzteren so, daß es immer durch den im Raume festen Trägheitspol hindurchgeht. Seine Tangentialebene im Trägheitspol hat in laufenden Koordinaten x, y, z die Gleichung:

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}}{A}x+\frac{\boldsymbol{\mu}}{B}y+\frac{\boldsymbol{\nu}}{C}z=2T$$

oder:

$$px+qy+rz=2T.$$

1) Vgl. von Mc. Cullagh den Auszug aus seinen Vorlesungen Trans. of the R. Irish Acad., Vol. 22, p. 139 (1849), Works, p. 329.

Diese Gleichung bringen wir auf die Normalform, indem wir sie durch

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

dividieren. Wir sehen dann, daß das vom Schwerpunkte auf die Tangentialebene gefällte Lot die Richtungskosinus:

$$\frac{p}{\omega}, \quad \frac{q}{\omega}, \quad \frac{r}{\omega}$$

hat, also der Lage nach mit der momentanen Rotationsachse zusammenfällt, während die Länge des Lotes:

$$(29) \qquad l = \frac{2T}{\omega}$$

wird, also der zugehörigen Rotationsgeschwindigkeit umgekehrt proportional ist.

Der Trägheitspol bewegt sich im Körper auf der durch die beiden Gleichungen (27) und (28) dargestellten Raumkurve. Diese Raumkurve ist als Schnittkurve einer Kugel mit einem konzentrischen Ellipsoid ein sphärischer Kegelschnitt. Durch denselben gehen wieder drei Zylinder und ein Kegel hindurch. Man erhält deren Gleichungen sofort, wenn man in den Gleichungen (21) und (22):

$$p = \frac{\lambda}{A}, \quad q = \frac{\mu}{B}, \quad r = \frac{\nu}{C}$$

setzt. Die Gleichung des Kegels z. B. wird:

$$(30) \qquad \frac{2AT - G^2}{A}\lambda^2 + \frac{2BT - G^2}{B}\mu^2 + \frac{2CT - G^2}{C}\nu^2 = 0,$$

und dies ist der Kegel, der von der invariablen Linie innerhalb des Körpers durchstrichen wird. Wir führen nun noch die Ebene ein, die senkrecht zu der invariablen Linie durch den Schwerpunkt gelegt wird und somit zu der früher in Betracht gezogenen festen Ebene parallel ist. Die neue Ebene ist dann ebenfalls im Raume fest und soll die invariable Ebene heißen. Ihre Gleichung lautet in dem auf die Hauptträgheitsachsen bezogenen Koordinatensystem:

$$(31) \qquad \lambda x + \mu y + \nu z = 0.$$

Die invariable Ebene umhüllt bei der Drehung einen im Körper festen Kegel, welcher polar ist zu dem von der invariablen Linie durchstrichenen Kegel, d. h. jede Seitenlinie des einen Kegels ist zu einer Tangentialebene des anderen Kegels senkrecht. Eine Tangentialebene des durch die Gleichung (30) gegebenen Kegels wird aber dargestellt wie folgt:

$$\frac{2AT - G^2}{A}\lambda \cdot x' + \frac{2BT - G^2}{B}\mu \cdot y' + \frac{2CT - G^2}{C}\nu \cdot z' = 0,$$

wenn x', y', z' laufende Punktkoordinaten bezeichnen. Errichtet man auf dieser Ebene im Schwerpunkte das Lot, so wird für die Koordinaten x, y, z eines Punktes auf demselben:

$$x : y : z = \frac{2AT - G^2}{A}\lambda : \frac{2BT - G^2}{B}\mu : \frac{2CT - G^2}{C}\nu,$$

und setzt man die hieraus folgenden Werte für λ, μ, ν in (30) ein, so ergibt sich:

$$(32) \qquad \frac{A}{2AT - G^2}x^2 + \frac{B}{2BT - G^2}y^2 + \frac{C}{2CT - G^2}z^2 = 0$$

als die Gleichung des von der invariablen Ebene umhüllten Kegels.

Dieser selbe Kegel wird aber auch erfüllt von den durch den Schwerpunkt gehenden Loten, die man in der Verbindungsebene der invariablen Linie und der Rotationsachse auf der ersteren errichtet. Denn die Richtungskosinus ξ, η, ζ einer Linie, die auf der invariablen Linie und der Rotationsachse senkrecht steht, müssen den beiden Gleichungen genügen:

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = 0, \quad p\xi + q\eta + r\zeta = 0,$$

woraus:

$$\xi : \eta : \zeta = (B - C)\,qr : (C - A)\,rp : (A - B)\,pq.$$

Für die Koordinaten x, y, z eines Punktes auf der Linie durch den Schwerpunkt, die auf der zuletzt gefundenen Linie und der invariablen Linie senkrecht steht, ergibt sich demnach:

$$\begin{aligned}(B - C)\,qrx + (C - A)\,rpy + (A - B)\,pqz &= 0,\\ Apx + \qquad Bqy + \qquad Crz &= 0.\end{aligned}$$

Daraus aber finden wir, weil z. B.

$$Bq\cdot(A - B)\,pq - Cr\cdot(C - A)\,rp = \{A(Bq^2 + Cr^2) - (B^2q^2 + C^2r^2)\}\,p$$

und dies mit Rücksicht auf (17) und (18):

$$= (2AT - G^2)\,p$$

wird:

$$x : y : z = (2AT - G^2)\,p : (2BT - G^2)\,q : (2CT - G^2)\,r.$$

Wenn wir die hieraus folgenden Werte von p, q, r in die Gleichung (22) einsetzen, ergibt sich genau die Gleichung (32). Demnach liegt die Linie, längs welcher die invariable Ebene den von ihr umhüllten Kegel berührt und welche mit der invariablen Ebene auf der invariablen Linie notwendig senkrecht steht, immer in der Ebene, welche die letztere Linie mit der momentanen Rotationsachse verbindet.

Zerlegen wir also die wirklich stattfindende Drehung in zwei Komponenten, nämlich eine Drehung um die invariable Linie und eine um eine dazu senkrechte Achse, so bildet die letztere Achse immer die Linie, längs welcher der zuletzt betrachtete Kegel bei der gerade vorliegenden Stellung des Körpers die invariable Ebene berührt. Weil demnach dieser Kegel sich in jedem Augenblicke um die Linie dreht, längs der er auf der invariablen Ebene aufliegt, bedeutet seine Bewegung ein Rollen auf dieser Ebene. Dies betrifft die eine Komponente der Drehung. Die Winkelgeschwindigkeit der anderen Komponente, die nach der invariablen Linie genommen wird, ist aber, wie wir gefunden haben, konstant, und da die invariable Linie senkrecht auf der invariablen Ebene ist, muß man sich diese Ebene nicht in sich unbeweglich, sondern wie eine Scheibe um die invariable Linie drehbar denken und sie dann mit der konstanten Drehgeschwindigkeit $h = 2T/G$ herumführen, während gleichzeitig der Kegel auf ihr rollt.

Nehmen wir noch, um den Mechanismus zu vervollständigen, die frühere feste Ebene hinzu, die zu der invariablen Ebene im Abstande $\mathfrak{h}$ parallel verläuft, und statt des unbegrenzten Kegels den Sektor, den er aus dem Poinsotschen Ellipsoid ausschneidet, so liegt dieser Sektor mit seiner ellipsoidisch gekrümmten Oberfläche auf der festen Ebene auf, während seine Spitze in einem bestimmten Punkte festgehalten wird, etwa in dem Endpunkte einer Stange, die auf der Ebene senkrecht befestigt ist. Um diese Stange soll sich ferner in ihrem Endpunkte eine der festen Ebene parallele, ebene Scheibe drehen, welche den konischen Teil des Sektors berührt und absolut rauh gedacht wird, so daß ein Gleiten des Konus an ihr unmöglich ist. Wird nun die Scheibe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gedreht, so daß sie den konischen Sektor in einer rollenden Bewegung mitführt, dann ist diese Bewegung eine Darstellung der „natürlichen Drehung", die der Körper um seinen Schwerpunkt ausführt, und so hat Poinsot diese Drehung der unmittelbaren Anschauung zugänglich gemacht.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Bewegungsfreiheit zweiter Stufe.

Wir wollen jetzt, in Parallele zu der früheren Diskussion der Schraubenreihen, den Fall näher erörtern, wo der starre Körper zwei Grade der Freiheit oder, wie wir auch sagen wollen, Bewegungsfreiheit zweiter Stufe besitzt. Dann können wir, indem wir uns hier wie früher auf den zunächst sich darbietenden „allgemeinen Fall" beschränken, annehmen, daß in jedem Augenblicke bei besonderer Wahl des zugrunde gelegten Koordinatensystems die Koordinaten $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \ldots$ einer jeden Schraube, in welcher sich der Körper bewegen kann, also auch der Schraube, in der er sich wirklich bewegt, den folgenden einfachen Beziehungen genügen:

$$(1) \qquad \mathfrak{u} = \alpha \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = \beta \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{w} = 0, \quad \mathfrak{r} = 0.$$

Die Koordinaten einer Schraubung in dieser Schraube wollen wir dann in der Form ansetzen:

$$(1\text{a}) \qquad \mathrm{p} = p, \quad \mathrm{q} = q, \quad \mathrm{r} = 0, \quad \mathrm{u} = \alpha p, \quad \mathrm{v} = \beta q, \quad \mathrm{w} = 0.$$

Wenn wir diese Relationen berücksichtigen, bleiben in dem Ausdrucke für die kinetische Energie, wie er in der Formel (4) des 19. Kapitels gegeben ist, von den sechs Schraubungskoordinaten nur zwei, p und q, die wir wieder als die unabhängigen Koordinaten ansehen, übrig. Es wird dann die Gleichung für die kinetische Energie:

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_\varrho\{(\alpha p + z_\varrho q)^2 + (\beta q - z_\varrho p)^2 + (y_\varrho p - x_\varrho q)^2\} \tag{2}$$

oder:

$$2T = \mathfrak{A}p^2 + 2\mathfrak{B}pq + \mathfrak{C}q^2, \tag{2a}$$

wenn wir setzen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \Sigma m_\varrho\{\alpha^2 + y_\varrho{}^2 + z_\varrho{}^2\}, \\ \mathfrak{B} &= \Sigma m_\varrho\{(\alpha - \beta)z_\varrho - x_\varrho y_\varrho\}, \\ \mathfrak{C} &= \Sigma m_\varrho\{\beta^2 + x_\varrho{}^2 + z_\varrho{}^2\}. \end{aligned}\right. \tag{2b}$$

Wir deuten nun p, q als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in einer „Bildebene". Dann wird jedem Punkte dieser Bildebene eine Schraubung zugeordnet, welche der starre Körper trotz der Beschränkung seiner Bewegungsfreiheit ausführen kann. Bei dieser Abbildung entsprechen den Schraubungen in einer und derselben Schraube die Punkte einer geraden Linie durch den Koordinatenursprung der Bildebene. Dieser Koordinatenursprung C ($p = 0$, $q = 0$) ist dabei ein ausgezeichneter Punkt der Abbildung, denn ihm ist nicht eine eigentliche Schraubung, sondern die Ruhelage des Körpers zugeordnet, wir wollen ihn den Mittelpunkt der Bildebene nennen. Die Formel (2a) zeigt nun sofort, daß den Schraubungen, für welche die kinetische Energie einen bestimmten Wert hat, jedesmal die Punkte einer Ellipse entsprechen, und alle Ellipsen, welche wir so bekommen und welche wir als Trägheitsellipsen bezeichnen, sind konzentrisch, ähnlich und ähnlich liegend. Ihr gemeinsamer Mittelpunkt ist der Mittelpunkt C der Bildebene.

Der Abstand eines Bildpunktes vom Mittelpunkt

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2} \tag{3}$$

ist der Winkelgeschwindigkeit der zugehörigen Schraubung gleich. Wir wollen dies ω in den Ausdruck für die kinetische Energie einführen und setzen deshalb, indem wir in der Bildebene zu Polarkoordinaten übergehen:

$$p = \omega\cos\varphi, \quad q = \omega\sin\varphi, \tag{4}$$

dann wird:

$$2T = \omega^2\{\mathfrak{A}\cos\varphi^2 + 2\mathfrak{B}\cos\varphi\sin\varphi + \mathfrak{C}\sin\varphi^2\} \tag{5}$$

oder:

$$2T = \omega^2\{(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\cos\varphi^2 + 2\mathfrak{B}\cos\varphi\sin\varphi + \mathfrak{C}\} \tag{5a}$$

oder endlich:

$$(5\text{b}) \qquad 2T = \omega^2\{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\cos 2\varphi + \mathfrak{B}\sin 2\varphi\}.$$

Um diesen Ausdruck geometrisch zu interpretieren, legen wir durch den Mittelpunkt der Bildebene einen beliebigen Kreis $\varkappa$, dessen Zentrum M wir nur der Bequemlichkeit halber auf der p-Achse annehmen. Der Radius des Kreises sei c, dann lautet seine Gleichung, indem wir die Koordinaten seiner Punkte zur Unterscheidung durch einen angehängten Index 0 charakterisieren:

$$(6) \qquad p_0^2 + q_0^2 = 2cp_0.$$

Bildet aber der Radiusvektor nach dem Kreispunkte mit der p-Achse den Winkel φ, so wird:

$$(7) \qquad p_0 = 2c\cos\varphi^2, \quad q_0 = 2c\cos\varphi\sin\varphi$$

und somit können wir schreiben:

$$(5\text{c}) \qquad 2T = \frac{\omega^2}{c}\{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})p_0 + \mathfrak{B}q_0 + \mathfrak{C}c\}.$$

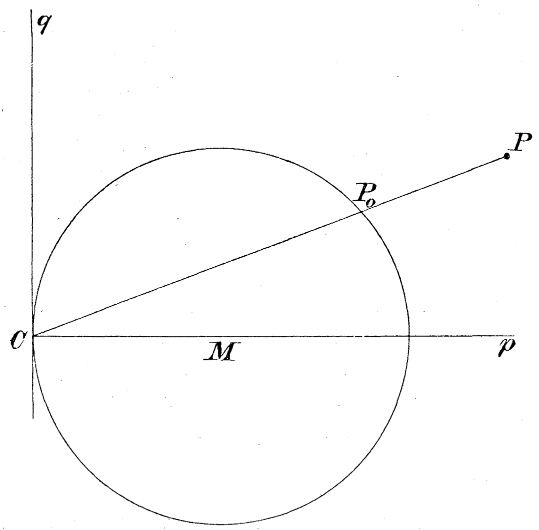

Fig. 24.

Hierbei sind p_0, q_0 die Koordinaten des Kreispunktes P_0, welchen der Radiusvektor vom Mittelpunkte C der Bildebene nach dem Bildpunkte P der Schraubung ausschneidet.

Die Klammergröße in dem Ausdrucke (5c) ist eine lineare Funktion von p_0, q_0, also dem Abstande $\mathfrak{t}$ des Kreispunktes von einer geraden Linie proportional. Die Gleichung dieser geraden Linie finden wir, indem wir die eingeklammerte Größe gleich Null setzen, also lautet sie:

$$(8) \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})p + \mathfrak{B}q + \mathfrak{C}c = 0.$$

Wir bezeichnen diese gerade Linie als die Trägheitsachse t. Schreiben wir nun die kinetische Energie:

$$(9) \qquad T = \frac{\mathfrak{D}}{2c}\mathfrak{t}\omega^2,$$

so hat der noch hinzugefügte Faktor $\mathfrak{D}$ den Wert:

$$(10) \qquad \mathfrak{D} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})^2 + \mathfrak{B}^2}.$$

In der Tat wird die in der Formel (5c) eingeklammerte lineare Funktion dem Abstande des Kreispunktes von der Trägheitsachse gleich, wenn man sie durch diese Größe $\mathfrak{D}$ teilt, weil die Gleichung (8) der Trägheitsachse durch $\mathfrak{D}$ geteilt in die Normalform übergeht, die wir schreiben wollen:

$$(8\text{a}) \qquad \cos 2\sigma \cdot p + \sin 2\sigma \cdot q - d = 0.$$

Dabei wird:

$$(8\text{b}) \qquad \cos 2\sigma = \frac{\frac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})}{\mathfrak{D}}, \quad \sin 2\sigma = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}},$$

mithin:

$$(8\text{c}) \qquad \operatorname{tang} 2\sigma = \frac{\mathfrak{B}}{\frac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})}.$$

Die Bedeutung des so eingeführten Winkels σ erhellt, wenn wir die Trägheitsellipsen auf ihre Hauptachsen transformieren. Die Lösung dieser Aufgabe wird in den ersten Elementen der analytischen Geometrie gegeben. Definieren wir zwei Größen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ durch die Gleichungen:

$$(11) \qquad \mathfrak{G} + \mathfrak{H} = \mathfrak{A} + \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{G} - \mathfrak{H} = 2\mathfrak{D}$$

und setzen:

$$(12) \qquad p' = \cos\sigma\, p + \sin\sigma\, q, \quad q' = -\sin\sigma\, p + \cos\sigma\, q,$$

so wird identisch:

$$(13) \qquad \mathfrak{G}p'^2 + \mathfrak{H}q'^2 = \mathfrak{A}p^2 + 2\mathfrak{B}pq + \mathfrak{C}r^2,$$

wie man durch Ausrechnung leicht bestätigen kann, wenn man auf der linken Seite cos und sin des doppelten Winkels 2σ einführt und dafür die obenstehenden Werte substituiert. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind beide positiv, denn die beiden Seiten der Gleichung (13) sind gleich der doppelten kinetischen Energie, also immer positiv.

In der Gleichung (8a) ist:

$$d = -\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}c = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}}{2\mathfrak{D}}c - \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}}{2\mathfrak{D}}c = \cos 2\sigma \cdot c - \frac{\mathfrak{G} + \mathfrak{H}}{\mathfrak{G} - \mathfrak{H}}c$$

oder:

$$(14) \qquad d = \cos 2\sigma \cdot c - e,$$

wenn wir:

$$(14\text{a}) \qquad e = \frac{\mathfrak{G} + \mathfrak{H}}{\mathfrak{G} - \mathfrak{H}}c = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}}{2\mathfrak{D}}c$$

setzen. Es ist dann e der Abstand der Trägheitsachse vom Zentrum des gezeichneten Kreises, denn der Ausdruck

$$\cos 2\sigma\, p + \sin 2\sigma\, q - d,$$

der den Abstand eines Punktes (p, q) von der Trägheitsachse liefert, wird nach (14) gleich e, wenn man $p = c$, $q = 0$ macht. Wenn wir mit G und H die Punkte bezeichnen, in denen die Hauptachsen der Trägheitsellipsen den Kreis außer in dem Mittelpunkte C noch schneiden, so wird von den Winkeln, welche die Radienvektoren CG und CH mit der p-Achse bilden, der eine gleich σ, der andere ϱ gleich $90^0 + \sigma$, denn nach (12) gehen diese Hauptachsen durch Drehung um den Winkel σ aus den Koordinatenachsen hervor. GH aber ist ein Durchmesser des Kreises, und mithin sind die Winkel, welche diese Linie mit der p-Achse (als einem weiteren Durchmesser) bildet, Zentriwinkel des Kreises und gleich den doppelten zugehörigen Peripheriewinkeln, also gleich 2σ und $2\varrho = 180^0 + 2\sigma$. Das heißt aber gemäß der Gleichung (8a), daß diese Linie GH senkrecht zur Trägheitsachse t ist. Die Abstände der letzteren von G und H sind $g = e + c$ und $h = e - c$ oder:

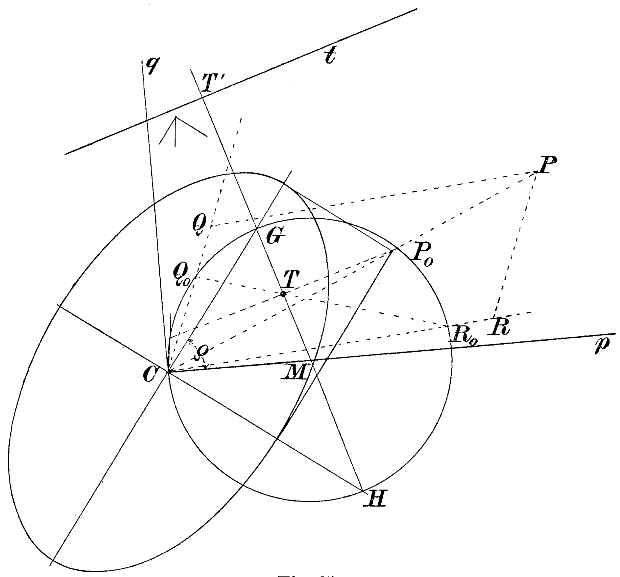

Fig. 25.

(15) $$g = \frac{2\mathfrak{G}}{\mathfrak{G} - \mathfrak{H}}\, c, \quad h = \frac{2\mathfrak{H}}{\mathfrak{G} - \mathfrak{H}}\, c,$$

woraus:

(15a) $$g : h = \mathfrak{G} : \mathfrak{H}$$

folgt. Da $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ beide positiv und die Abstände g und h somit immer nach derselben Seite gerichtet sind, schneidet die Trägheitsachse den Kreis nie.

Wir suchen nun von der Trägheitsachse den Pol bezüglich des Kreises. Dieser Pol T muß auf dem Durchmesser GH liegen und nennen wir f seinen Abstand vom Kreismittelpunkte M, so wird:

$$e \cdot f = c^2,$$

also nach (14a):

$$f = \frac{\mathfrak{G} - \mathfrak{H}}{\mathfrak{G} + \mathfrak{H}} \cdot c = \frac{2\mathfrak{D}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}} c. \tag{16}$$

Der Winkel, den die Linie MT mit der positiven Richtung der p-Achse bildet, ist $2\varrho = 180^0 + 2\sigma$, und damit werden die Koordinaten des Punktes T, den wir als den **Trägheitspol** bezeichnen:

$$p_t = c - f \cos 2\sigma, \quad q_t = -f \sin 2\sigma,$$

also nach (16) und (8b):

$$p_t = c - \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}} c, \qquad q_t = -\frac{2\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}} c$$

oder:

$$p_t = \frac{2\mathfrak{C}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}} c, \qquad q_t = -\frac{2\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}} c. \tag{17}$$

Mit Hilfe dieses Trägheitspoles läßt sich eine zweite geometrische Darstellung der kinetischen Energie geben. Zu derselben gelangen wir wie folgt.

Wir bezeichnen mit p_1, q_1 und p_2, q_2 die Koordinaten irgend zweier Punkte Q und R der Bildebene, dann haben die geraden Linien CQ und CR, welche diese Punkte mit dem Koordinatenursprunge verbinden, die Gleichungen:

$$q_1 p - p_1 q = 0, \quad q_2 p - p_2 q = 0.$$

Durch Multiplikation derselben entsteht die Gleichung für das Paar der Verbindungslinien:

$$q_1 q_2 p^2 - (p_1 q_2 + p_2 q_1) p q + p_1 p_2 q^2 = 0.$$

Dieses Linienpaar bringen wir nun zum Schnitt mit dem Kreise $\varkappa$, dessen Gleichung lautet:

$$p^2 + q^2 = 2cp.$$

Wenn wir diese Gleichung mit $p_1 p_2$ multiplizieren, von ihr die vorige abziehen und die Differenz durch p teilen, so erhalten wir eine lineare Gleichung:

$$(p_1 p_2 - q_1 q_2) p + (p_1 q_2 + p_2 q_1) q - 2 p_1 p_2 c = 0. \tag{18}$$

Auf der durch diese Gleichung dargestellten geraden Linie müssen die beiden Punkte Q_0, R_0 liegen, welche die beiden Strahlen CQ, CR durch den Mittelpunkt C der Bildebene außer C mit dem Kreise gemein haben.

Der Abstand $\mathfrak{u}$ irgendeines Punktes von der gefundenen geraden Linie wird erhalten, indem wir für die Koordinaten dieses Punktes die linke Seite der vorstehenden Gleichung bilden und sie noch durch:

$$\sqrt{(p_1 p_2 - q_1 q_2)^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1)^2} = \sqrt{(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)}$$

dividieren. Dabei wollen wir diese Wurzel mit dem negativen Vorzeichen nehmen. Für den Punkt wählen wir nun den Trägheitspol, entnehmen also die Punktkoordinaten aus (17) und können dann schreiben:

$$\mathfrak{u} = \frac{(q_1 q_2 - p_1 p_2)\, 2\,\mathfrak{C} c + (p_1 q_2 + p_2 q_1)\, 2\,\mathfrak{B} c + 2\, p_1 p_2\, (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})\, c}{(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cdot \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2}}$$

oder:

$$\mathfrak{u} = 2c \frac{\mathfrak{A} p_1 p_2 + \mathfrak{B}(p_1 q_2 + p_2 q_1) + \mathfrak{C} q_1 q_2}{(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \sqrt{p_1^2 + q_1^2}\, \sqrt{p_2^2 + q_2^2}}. \tag{19}$$

Wir lassen jetzt die beiden Kreispunkte Q_0, R_0, welche durch die Verhältnisse p_1/q_1 und p_2/q_2 charakterisiert sind, einander unendlich nahe rücken, dann wird die Verbindungslinie derselben zur Kreistangente. Machen wir aber in der vorstehenden Formel $p_1 = p_2 = p$, $q_1 = q_2 = q$ und setzen noch $\sqrt{p^2 + q^2} = \omega$, so wird sie:

$$\mathfrak{u} = 2c \frac{\mathfrak{A} p^2 + 2\mathfrak{B} p q + \mathfrak{C} q^2}{(\mathfrak{A} + \mathfrak{C})\, \omega^2}. \tag{20^0}$$

Der Zähler des Bruches ist jetzt die doppelte kinetische Energie $2T$ und so finden wir:

$$T = \frac{1}{4c} (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})\, \mathfrak{u}\, \omega^2. \tag{20}$$

Um die Bedeutung dieser Formel richtig zu erfassen, sehen wir die Punkte des Kreises als die Bilder der Schrauben an, in denen die Schraubungen erfolgen. In der Tat entsprechen Schraubungen in derselben Schraube Punkten eines Strahles durch den Mittelpunkt der Bildebene, und dieser Strahl schneidet aus dem Kreise einen bestimmten Punkt aus, den wir als den Bildpunkt der Schraube ansehen. So kommen wir wieder zu der früheren Darstellung der Schrauben einer Schraubenreihe durch die Punkte eines Kreises zurück.[1]) Den Kreis wollen wir auch wieder einfach als Bildkreis bezeichnen. Es ist eine dem Körper mögliche Schraubung charakterisiert durch die zugehörige Schraube, die wir durch den Bildpunkt auf dem Bildkreise festlegen, und die Winkelgeschwindigkeit ω. Die Formel (20) zeigt dann, daß die kinetische Energie der Schraubung außer dem

1) Man vergleiche Ball, Proceedings of the R. Irish Acad. (2) IV, 1883, p. 29, Cunningham Memoirs (R. Irish Acad.) Nr. 4, 1886 und Theory of Screws, Chap. XII.

Quadrate der Winkelgeschwindigkeit ω dem Abstande des Trägheitspoles von der Tangente des Bildkreises in dem Bildpunkte der zugehörigen Schraube proportional ist.

Der allgemeine Ausdruck (19) für $\mathfrak{u}$ verschwindet, d. h. die Verbindungslinie der beiden Kreispunkte geht durch den Trägheitspol T, wenn:

$$\mathfrak{A}p_1p_2 + \mathfrak{B}(p_1q_2 + p_2q_1) + \mathfrak{C}q_1q_2 = 0 \tag{21}$$

wird. Dann aber liegen die Punkte Q, R mit den Koordinaten p_1, q_1 und p_2, q_2 auf zwei konjugierten Durchmessern der Trägheitsellipsen. Nehmen wir noch den Punkt P mit den Koordinaten:

$$p = p_1 + p_2, \quad q = q_1 + q_2 \tag{22}$$

hinzu, so bilden die vier Punkte C, Q, P, R (Fig. 25) die Ecken eines Parallelogramms, von dem zwei Seiten konjugierte Durchmesser der Trägheitsellipsen darstellen. Dann folgt aus den Gleichungen (22) und (21) unmittelbar, daß:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}p^2 + 2\mathfrak{B}pq + \mathfrak{C}r^2 \\ &= (\mathfrak{A}p_1^2 + 2\mathfrak{B}p_1q_1 + \mathfrak{C}q_1^2) + (\mathfrak{A}p_2^2 + 2\mathfrak{B}p_2q_2 + \mathfrak{C}q_2^2), \end{aligned} \tag{23}$$

d. h. die kinetische Energie der durch den Punkt P abgebildeten Schraubung gleich der Summe der kinetischen Energien der durch die beiden Punkte Q, R gegebenen Schraubungen wird. Diese letzteren Schraubungen können wir als die Komponenten der ersten Schraubung nach zwei bestimmten Schrauben, deren Bildpunkte durch konjugierte Durchmesser der Trägheitsellipsen aus dem Bildkreise ausgeschnitten werden, ansehen. Solche zwei Schrauben bezeichnen wir mit Ball als **konjugierte Trägheitsschrauben**. Wie wir sahen, sind die Bildpunkte Q_0, R_0 derselben immer die Endpunkte einer durch den Trägheitspol gehenden Sehne des Bildkreises.

Ein sehr spezieller Fall, der aber besonderes Interesse besitzt, ist der, wo in der Gleichung (2) alle $z_\varrho = 0$ und außerdem α und $\beta = 0$ werden, d. h. wo sich alle dem Massensystem mögliche Schraubungen auf Drehungen um die in der xy-Ebene liegenden und durch den Koordinatenursprung gehenden Achsen reduzieren. Dann ist das Massensystem ein ebenes, alle Massenpunkte liegen in der xy-Ebene, und es wird:

$$2T = \Sigma m_\varrho (y_\varrho p - x_\varrho q)^2.$$

Machen wir hierin:

$$p = \omega \cdot \cos\varphi, \quad q = \omega \cdot \sin\varphi,$$

so wird:

$$2T = \omega^2 \cdot \Sigma m_\varrho (y_\varrho \cos\varphi - x_\varrho \sin\varphi)^2.$$

Dieser Ausdruck gestattet aber eine einfache Interpretation. Ziehen wir in der xy-Ebene durch den Koordinatenursprung die Linie $\mathfrak{l}$, welche mit der x-Achse den Winkel φ bildet und nennen s_ϱ den Abstand des ϱ^{ten} Massenpunktes von dieser Linie $\mathfrak{l}$, so wird:

$$2\,T = \omega^2 \cdot \Sigma m_\varrho s_\varrho^2.$$

Der Summenausdruck $J = \Sigma m_\varrho s_\varrho^2$ heißt das Trägheitsmoment J des ebenen Massensystems für die Achse $\mathfrak{l}$. Es wird:

$$J = \mathfrak{A} \cos\varphi^2 + 2\,\mathfrak{B} \cos\varphi \sin\varphi + \mathfrak{C} \sin\varphi^2,$$

wenn jetzt:

$$\mathfrak{A} = \Sigma m_\varrho y_\varrho^2, \quad \mathfrak{B} = -\,\Sigma m_\varrho x_\varrho y_\varrho, \quad \mathfrak{C} = \Sigma m_\varrho x_\varrho^2$$

gesetzt wird. Ist $\mathfrak{l}'$ eine zweite Linie, die in der xy-Ebene durch den Koordinatenursprung geht, φ' der Winkel, den sie mit der x-Achse bildet, s_ϱ' der Abstand des ϱ^{ten} Massenpunktes von ihr, so heißt der Ausdruck:

$$D = \Sigma m_\varrho s_\varrho s_\varrho'$$

das Deviationsmoment des ebenen Massensystems für das Achsenpaar $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$. Es wird dann:

$$D = \mathfrak{A} \cos\varphi \cos\varphi' + \mathfrak{B}\,(\cos\varphi \sin\varphi' + \sin\varphi \cos\varphi') + \mathfrak{C} \sin\varphi \sin\varphi'.$$

Den Bildkreis konstruieren wir direkt in der xy-Ebene, jeder der vorkommenden Rotationsachsen ($\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$), die den Bildkreis alle in dem Koordinatenursprung schneiden, wird ihr zweiter Schnittpunkt mit dem Bildkreis als Bildpunkt zugeordnet, dann liefert die Formel (19):

$$D = \frac{J_0}{4\,c}\,\mathfrak{u},$$

wenn wir $J_0 = \mathfrak{A} + \mathfrak{C} = \Sigma m_\varrho (x_\varrho^2 + y_\varrho^2)$ setzen und mit $\mathfrak{u}$ den Abstand des Trägheitspoles von der Verbindungslinie der Bildpunkte auf $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ bezeichnen. Wenn $\mathfrak{l}'$ mit $\mathfrak{l}$ zusammenfällt, wird diese Verbindungslinie die Tangente des Bildkreises in dem Bildpunkte von $\mathfrak{l}$ und gleichzeitig geht D in das Trägheitsmoment J für die Achse $\mathfrak{l}$ über. So finden wir die einfache graphische Interpretation der Deviations- und Trägheitsmomente ebener Massensysteme, die von Mohr angegeben ist.[1])

Wir wollen nun, zu dem allgemeinen Fall der Bewegungsfreiheit zweiter Stufe zurückkehrend, hierfür die Bewegungsgleichungen nach den Vorschriften des 19. Kapitels ableiten. Zu dem Zwecke haben wir auszugehen von dem Ausdrucke (2) für die kinetische Energie. In diesem Ausdrucke haben wir die Koordinaten der Massenpunkte zu variieren, so daß wir erhalten:

$$\delta T = \Sigma m_\varrho \{(\alpha p + z_\varrho q)\, q\, \delta z_\varrho - (\beta q - z_\varrho p)\, p\, \delta z_\varrho \\ + (y_\varrho p - x_\varrho q)\,(p\,\delta y_\varrho - q\,\delta x_\varrho)\}.$$

1) Zivilingenieur 1887, p. 43, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, 1906, p. 82.

Die Variationen δx_ϱ, δy_ϱ, δz_ϱ sollen hierbei herrühren von einer virtuellen, d. h. dem Körper bei der augenblicklichen Beschränkung seiner Bewegungsfreiheit möglichen Schraubung, deren unabhängige Koordinaten wir mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ bezeichnen, es wird dann:

$$\delta x_\varrho = (\alpha \mathfrak{p} + z_\varrho \mathfrak{q})\,\delta t, \quad \delta y_\varrho = (\beta \mathfrak{q} - z_\varrho \mathfrak{p})\,\delta t, \quad \delta z_\varrho = (y_\varrho \mathfrak{p} - x_\varrho \mathfrak{q})\,\delta t.$$

Setzen wir diese Werte in den Ausdruck für δT ein, so wird er von der Form:

$$\delta T = (T_p' \cdot \mathfrak{p} + T_q' \cdot \mathfrak{q})\,\delta t$$

und wir finden:

$$\begin{aligned} T_p' &= \Sigma m_\varrho \{(\alpha p + z_\varrho q)\cdot y_\varrho q - (\beta q - z_\varrho p)\cdot y_\varrho p - (y_\varrho p - x_\varrho q)(z_\varrho p + \alpha q)\} \\ &= \Sigma m_\varrho \{-(\beta y_\varrho - x_\varrho z_\varrho) p + (\alpha x_\varrho + y_\varrho z_\varrho) q\} q, \end{aligned}$$

ebenso:

$$T_q' = \Sigma m_\varrho \{(\beta y_\varrho - x_\varrho z_\varrho) p - (\alpha x_\varrho + y_\varrho z_\varrho) q\} p,$$

so daß wir annehmen können:

$$T_p' = -(\mathfrak{Q} p - \mathfrak{P} q)\, q, \quad T_q' = (\mathfrak{Q} p - \mathfrak{P} q)\, p,$$

indem wir setzen:

$$(24) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = \Sigma m_\varrho (\alpha x_\varrho + y_\varrho z_\varrho), \\ \mathfrak{Q} = \Sigma m_\varrho (\beta y_\varrho - x_\varrho z_\varrho). \end{cases}$$

Außerdem sind noch die Derivierten der kinetischen Energie nach p und q zu bilden. Diese knüpfen wir sofort an die Form (2a) der Funktion T an und finden:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \mathfrak{A} p + \mathfrak{B} q, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \mathfrak{B} p + \mathfrak{C} q.$$

Die der Formel (30) des 19. Kapitels entsprechenden Gleichungen sollen jetzt aber lauten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) - T_p' = P, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) - T_q' = Q,$$

und setzen wir hierin die gefundenen Werte ein, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$(25) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathfrak{A} p + \mathfrak{B} q) = P - (\mathfrak{Q} p - \mathfrak{P} q) q, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathfrak{B} p + \mathfrak{C} q) = Q + (\mathfrak{Q} p - \mathfrak{P} q) p. \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern, indem man sie mit p, q multipliziert und addiert:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = Pp + Qq$$

und da $dT = dW$ ist, auch:

$$(26) \qquad Pq + Qq = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t},$$

wie es notwendig ist, da die Arbeitsleistung der Reaktionskräfte verschwindet.

Statt p und q kann man auch irgend zwei lineare Funktionen von ihnen, p' und q', als unabhängige Parameter in den Bewegungsgleichungen wählen. Nehmen wir an, es sei:

$$p = a_1 p' + a_2 q', \quad q = b_1 p' + b_2 q', \tag{27}$$

und setzen wir:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta,$$

dann wird umgekehrt:

$$\Delta \cdot p' = b_2 p - a_2 q, \quad \Delta \cdot q' = - b_1 p + a_1 q. \tag{27a}$$

Wird bei Einsetzung dieser Werte:

$$\mathfrak{A} p^2 + 2 \mathfrak{B} p q + \mathfrak{C} q^2 = \mathfrak{A}' p'^2 + 2 \mathfrak{B}' p' q' + \mathfrak{C}' q'^2, \tag{28}$$

so folgt:

$$\begin{cases} \mathfrak{A}' p' + \mathfrak{B}' q' = a_1 (\mathfrak{A} p + \mathfrak{B} q) + b_1 (\mathfrak{B} p + \mathfrak{C} q), \\ \mathfrak{B}' p' + \mathfrak{C}' q' = a_2 (\mathfrak{A} p + \mathfrak{B} q) + b_2 (\mathfrak{B} p + \mathfrak{C} q). \end{cases} \tag{29}$$

In der Tat ergeben sich diese Gleichungen, wenn man die Identität (28) nach p' und q' differenziert, mit Rücksicht auf die Beziehungen (27).

Nehmen wir noch an, daß:

$$\mathfrak{Q} p - \mathfrak{P} q = \frac{1}{\Delta} (\mathfrak{Q}' p' - \mathfrak{P}' q') \tag{30}$$

werde, so ergibt sich, indem man auf der linken Seite dieser Gleichung die Werte für p und q aus (27) einsetzt:

$$\frac{1}{\Delta} \mathfrak{P}' = b_2 \mathfrak{P} - a_2 \mathfrak{Q}, \quad \frac{1}{\Delta} \mathfrak{Q}' = - b_1 \mathfrak{P} + a_1 \mathfrak{Q}, \tag{31}$$

woraus:

$$\Delta^2 \cdot \mathfrak{P} = a_1 \mathfrak{P}' + a_2 \mathfrak{Q}', \quad \Delta^2 \cdot \mathfrak{Q} = b_1 \mathfrak{P}' + b_2 \mathfrak{Q}' \tag{31a}$$

folgt. Wir setzen endlich noch:

$$a_1 P + b_1 Q = P', \quad a_2 P + b_2 Q = Q', \tag{32}$$

dann erhält man die neuen Bewegungsgleichungen, indem man die Gleichungen (25) erst mit a_1, b_1, dann mit a_2, b_2 multipliziert und jedesmal addiert, sodann durch die Gleichungen (29), (32), (30) und (27a) die gestrichenen Buchstaben einführt. So ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathfrak{A}' p' + \mathfrak{B}' q') = P' - (\mathfrak{Q}' p' - \mathfrak{P}' q') q', \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathfrak{B}' p' + \mathfrak{C}' q') = Q' + (\mathfrak{Q}' p' - \mathfrak{P}' q') p'. \end{cases} \tag{33}$$

Diese sind von derselben Form wie die ursprünglichen Gleichungen. Es wird hierbei nach (32) und (27a):

$$(34)\quad P'p'+Q'q'=\frac{1}{\varDelta}\{(a_1P+b_1Q)(b_2p-a_2q)+(a_2P+b_2Q)(-b_1p+a_1q)\}$$
$$=Pp+Qq.$$

Deuten wir nun p, q wieder als Koordinaten eines Punktes in der Bildebene, so liegt es nahe, die Größen P, Q, welche eine Beschleunigungsdyname festlegen, als Koordinaten einer geraden Linie, nämlich der durch die Gleichung:

$$(35)\qquad Pp+Qq=1$$

gegebenen Linie, zu interpretieren.

Durch die Gleichungen (27) gehen wir von den ursprünglichen Koordinaten p, q der Bildpunkte zu anderen, allgemeinen schiefwinkligen Koordinaten p', q' über. Der Koordinatenursprung bleibt hierbei der Mittelpunkt der Bildebene. Gleichzeitig transformieren sich die Linienkoordinaten P, Q in P', Q' durch die Substitutionen (32). Diese sind kontragredient zu (27), denn sie sind nach (34) so geartet, daß die Linie, die vor der Transformation durch die Gleichung:

$$(35)\qquad Pp+Qq=1$$

gegeben ist, nach der Transformation durch die genau ebenso gebildete Gleichung:

$$(35\text{a})\qquad P'p'+Q'q'=1$$

dargestellt wird.

Wir wollen nun die Koeffizienten in den Transformationsgleichungen so bestimmen, daß die Bewegungsgleichungen eine möglichst einfache Form annehmen. Dies geschieht, wenn wir die folgenden Substitutionsgleichungen wählen:

$$(36)\qquad \begin{cases} p=\mathfrak{P}p'-(\mathfrak{B}\mathfrak{P}+\mathfrak{C}\mathfrak{Q})q', \\ q=\mathfrak{Q}p'+(\mathfrak{A}\mathfrak{P}+\mathfrak{B}\mathfrak{Q})q'. \end{cases}$$

Dann wird die Substitutionsdeterminante:

$$(37)\qquad \varDelta=\mathfrak{A}\mathfrak{P}^2+2\mathfrak{B}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{C}\mathfrak{Q}^2,$$

und wir erhalten:

$$(38)\qquad \mathfrak{A}p^2+2\mathfrak{B}pq+\mathfrak{C}q^2=\varDelta(p'^2+\delta q'^2),$$

wenn wir:

$$(39)\qquad \delta=\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{B}^2$$

setzen. Dies ist die Diskriminante der quadratischen Form:

$$2T=\mathfrak{A}p^2+2\mathfrak{B}pq+\mathfrak{C}q^2$$

und stets positiv, weil diese Form stets positiv ist und nur für $p=0$, $q=0$ verschwindet. Aus diesem Grunde ist auch $\varDelta$ notwendig positiv und, wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nicht beide Null sind, selbst von Null verschieden. Die Achsen des neu eingeführten Koordinatensystems bilden konjugierte Durchmesser der Trägheitsellipsen. In der Tat wird die Gleichung (21) durch die Wertesysteme p_1, q_1 und p_2, q_2, die sich aus (36) für $p'=0$ und $q'=0$ ergeben, befriedigt. Von den durch (31) eingeführten Größen $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ wird jetzt:

$$\mathfrak{P}'=\varDelta^2, \quad \mathfrak{Q}'=0,$$

und somit erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

$$(40) \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varDelta p')=P'+\varDelta^2 q'^2, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Eq')=Q'-\varDelta^2 p'q', \end{cases}$$

wenn wir noch $E=\varDelta\delta$ setzen.

Wir knüpfen an diese Gleichungsform die Betrachtung einiger speziellen Fälle an, die von besonderem Interesse sind.

Der erste Fall ist der, wo der Körper in sehr kurzer Zeit τ aus der Ruhe in eine Bewegung mit endlicher Geschwindigkeit übergeht. Dann haben wir die Gleichungen (40) mit dt zu multiplizieren und über die sehr kurze Zeit τ zu integrieren, während welcher p', q' von 0 ausgehend bis zu endlichen Werten wachsen. Auf der linken Seite entsteht dann einfach $\varDelta p'$ und Eq', auf der rechten Seite setzen wir für die auftretenden Integrale

$$\int P'dt, \quad \int Q'dt$$

wieder P', Q' und vernachlässigen die zweiten Glieder, die gegen die linke Seite verschwindend gering sind, da sie dem absoluten Betrage nach kleiner sind als $\varDelta^2 q'^2\cdot\tau$ und $-\varDelta^2 p'q'\cdot\tau$, wobei τ eine sehr kleine Größe ist. So erhalten wir einfach:

$$(41) \qquad \varDelta p'=P', \quad Eq'=Q'.$$

In dem jetzt vorliegenden Koordinatensystem wird die Gleichung [vgl. (35a)] der Linie, deren Koeffizienten P', Q' aus (41) folgen:

$$\varDelta p'p''+Eq'q''=1,$$

wenn p'', q'' laufende Punktkoordinaten bezeichnen. Diese Gleichung aber stellt die Polare des Punktes (p', q') bezüglich der durch die Gleichung:

$$(42) \qquad \varDelta p'^2+Eq'^2=1$$

gegebenen Ellipse dar. Die Gleichung dieser Ellipse in den ursprünglichen Koordinaten lautet wegen (38):

$$\mathfrak{A}p^2 + 2\mathfrak{B}pq + \mathfrak{C}q^2 = 1, \tag{42a}$$

es ist eine der Trägheitsellipsen, die wir schlechthin so bezeichnen können, und wir finden so: Die gerade Linie, welche eine instantane Beschleunigungsdyname oder kurz gesagt einen Stoß darstellt, und der Bildpunkt der Schraubung, welche dieser Stoß hervorruft, sind einander als Polare und Pol bezüglich der Trägheitsellipse zugeordnet.

Der zweite Fall, den wir betrachten, ist der, wo $q' = 0$ und außerdem $Q' = 0$ wird. Dann nehmen die Bewegungsgleichungen die Form an:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varDelta p') = P', \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Eq') = 0. \tag{43}$$

Wir setzen aber voraus, daß die Bewegungsfreiheit des Körpers dauernd derselben Beschränkung unterworfen ist, es sind also $\varDelta$ und E als konstant anzusehen, und die zweite der vorstehenden Gleichungen zeigt, daß q' sich im Verlaufe der Bewegung nicht ändert, also dauernd $= 0$ ist. Diese Bewegung ist demnach während ihrer ganzen Dauer eine Schraubung in derselben Schraube, die durch $q' = 0$ charakterisiert ist, und diese Schraube ist die einzige existierende permanente Schraube des Systems.[1]) Die Gleichungen (36) zeigen sofort, daß für $q' = 0$ $p : q = \mathfrak{P} : \mathfrak{Q}$ wird und so ist der Bildpunkt R_0 der permanenten Schraube auf dem Bildkreis leicht festzulegen.

Der dritte Fall, den wir untersuchen, ist der, wo $P' = 0$ und $Q' = 0$ ist für die ganze Dauer der Bewegung. Dann werden die Bewegungsgleichungen, indem wir $\varDelta$ und $E = \varDelta\delta$ als Konstante nicht mit in die Differentiation einschließen:

$$\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}t} = \varDelta q'^2, \quad \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varDelta}{\delta}p'q'. \tag{44}$$

Die beiden Gleichungen sind aber leicht zu integrieren, und diese Integration wollen wir durchführen. Multiplizieren wir zunächst die Gleichungen mit p', $\delta \cdot q'$ und addieren sie, so ergibt sich:

$$p'\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}t} + \delta \cdot q'\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t} = 0$$

und daraus durch Integration:

$$p'^2 + \delta q'^2 = \varepsilon^2, \tag{45}$$

1) S. Ball, Transactions of the R. Irish Acad. XXIX, 1890, p. 613, Theory of Screws, Chap. XXV.

wenn ε eine Konstante bedeutet. Diese Gleichung sagt aus, daß die kinetische Energie T konstant (und zwar gemäß (38) gleich $\frac{1}{2}\varDelta\varepsilon^2$) bleibt. Setzen wir den hieraus folgenden Wert für p' in die zweite der Gleichungen ein, so wird sie:

$$\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varDelta}{\delta} q' \sqrt{\varepsilon^2 - \delta q'^2}.$$

Machen wir nun:

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}\cdot q'} = z, \quad \text{also} \quad -\frac{\varepsilon\, dq'}{\sqrt{\delta}\, q'^2} = dz \quad \text{und} \quad \frac{\varDelta}{\delta}\varepsilon = \mu,$$

so wird die letzte Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mu\sqrt{z^2 - 1}.$$

Das Integral dieser Gleichung lautet:

$$z = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda+\mu t} + e^{-\lambda-\mu t}\right),$$

wobei λ eine Konstante bedeutet, die aus dem Anfangszustand der Bewegung zu bestimmen ist. In der Tat folgt aus diesem Werte von z:

$$\sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda+\mu t} - e^{-\lambda-\mu t}\right)$$

und weiter:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu}{2}\left(e^{\lambda+\mu t} - e^{-\lambda-\mu t}\right) = \mu\sqrt{z^2 - 1}.$$

Die hier erscheinenden Funktionen von $\lambda + \mu t$ sind sogenannte **hyperbolische Funktionen**. Wir führen für dieselben die Gudermannschen Bezeichnungen ein:

$$\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) = \mathfrak{Cos}\, v, \quad \tfrac{1}{2}(e^v - e^{-v}) = \mathfrak{Sin}\, v$$

und weiter:

$$\frac{1}{\mathfrak{Cos}\, v} = \mathfrak{Sec}\, v, \quad \frac{\mathfrak{Sin}\, v}{\mathfrak{Cos}\, v} = \mathfrak{Tang}\, v,$$

dann wird:

$$q' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}}\cdot\frac{1}{z} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}}\,\frac{1}{\mathfrak{Cos}(\lambda+\mu t)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}}\,\mathfrak{Sec}\,(\lambda + \mu t) \tag{46}$$

und:

$$p' = \sqrt{\delta}\, q' \sqrt{z^2 - 1} = \varepsilon\,\frac{\mathfrak{Sin}(\lambda+\mu t)}{\mathfrak{Cos}(\lambda+\mu t)} = \varepsilon\,\mathfrak{Tang}\,(\lambda + \mu t). \tag{46a}$$

Dies sind die gesuchten Integrale der vorliegenden Bewegungsgleichungen. Mit unbegrenzt wachsendem t wächst auch $\mathfrak{Cos}\,(\lambda + \mu t)$ über alle Grenzen, $\mathfrak{Sec}\,(\lambda + \mu t)$ nähert sich also der Null, q' wird kleiner und kleiner, während $\mathfrak{Tang}\,(\lambda + \mu t)$ sich dem Grenzwert 1, also p' dem Wert ε nähert, und so sieht man, daß die Bewegung sich asymptotisch einer Schraubung in der permanenten Schraube nähert.

Anschaulicher noch ist eine Art geometrischer Interpretation der Bewegungsgleichungen. Von diesen ist die Gleichung (45) eine erste Folge. Dieselbe sagt aus, daß der Bildpunkt der Schraubung im Verlaufe der Bewegung auf einer Ellipse fortrückt. Diese Ellipse ist eine Trägheitsellipse und die kinetische Energie bleibt im Verlaufe der ganzen Bewegung konstant. Durch ein zweites Integral wollen wir die Bewegung des Radiusvektor nach dem Bildpunkte, d. h. die Veränderung, welche die Schraube der jeweiligen Schraubung während des Fortganges der betrachteten Bewegung erfährt, festlegen. Wir bilden zu dem Zweck nach (44) und (45):

$$p' \frac{dq'}{dt} - q' \frac{dp'}{dt} = -\frac{\varDelta}{\delta} q' (p'^2 + \delta q'^2) = -\frac{\varDelta}{\delta} \varepsilon^2 \cdot q'.$$

Nach den Gleichungen (36) und (37) wird aber:

$$\varDelta\left(p' \frac{dq'}{dt} - q' \frac{dp'}{dt}\right) = p \frac{dq}{dt} - q \frac{dp}{dt}, \quad \varDelta \cdot q' = \mathfrak{P} q - \mathfrak{Q} p,$$

und somit erhalten wir in dem ursprünglichen Koordinatensystem (p, q) die Gleichung:

$$p \frac{dq}{dt} - q \frac{dp}{dt} = \eta \frac{\mathfrak{Q} p - \mathfrak{P} q}{\sqrt{\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2}},$$

wenn wir noch:

$$\eta = \frac{\varDelta}{\delta} \varepsilon^2 \sqrt{\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2}$$

setzen. Wir machen nun wieder:

$$p = \omega \cos \varphi, \quad q = \omega \sin \varphi,$$

dann wird:

$$p \frac{dq}{dt} - q \frac{dp}{dt} = \omega^2 \frac{d\varphi}{dt},$$

und nehmen wir noch:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \cos \psi, \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} \sin \psi, \quad \text{also} \quad \mathfrak{R} = \sqrt{\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2}$$

an, so erhalten wir:

$$\omega \frac{d\varphi}{dt} = \eta \sin (\psi - \varphi).$$

Ist nun P_0 der Bildpunkt der Schraube, in welcher der Körper sich gerade bewegt, R_0 der Bildpunkt der permanenten Schraube, so wird:

$$\overline{P_0 R_0} = 2c \sin (\psi - \varphi),$$

und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, mit der sich der Bildpunkt P_0 auf dem Bildkreise bewegt, wird:

$$\mathfrak{v} = 2c \frac{d\varphi}{dt}.$$

Somit ergibt sich:

$$(47) \qquad \mathfrak{v} = \eta \cdot \frac{\overline{P_0 R_0}}{\omega},$$

und der Sinn der Bewegung ist immer nach dem Punkte R_0 hin gerichtet. Da die kinetische Energie der Schraubung immer $= \frac{1}{2} \varDelta \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \delta \eta / \mathfrak{R}$ sein soll, ergibt sich nach Formel (20):

$$\omega = \frac{\eta}{\theta \sqrt{\mathfrak{u}}} \quad \text{für } \theta^2 = \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \mathfrak{R}^2 \varepsilon^2}{2 c \delta^2} \varDelta$$

und somit:

$$(47\text{a}) \qquad \mathfrak{v} = \theta \cdot \overline{P_0 R_0} \cdot \sqrt{\mathfrak{u}},$$

wenn $\mathfrak{u}$ den Abstand des Trägheitspoles von der Tangente des Bildkreises im Punkte P_0 bedeutet. Nach dieser Gleichung ist die Bewegung des Bildpunktes auf dem Bildkreise leicht zu verfolgen.

Die Transformationsgleichungen (36) versagen, wenn $\mathfrak{P} = 0$ und $\mathfrak{Q} = 0$ wird. Dann wollen wir das System ausbalanciert nennen. Die ursprünglichen Bewegungsgleichungen lauten in diesem Falle:

$$(48) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q) = P, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathfrak{B}p + \mathfrak{C}q) = Q.$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort, daß für $P = 0$, $Q = 0$:

$$p = \text{const.}, \quad q = \text{const.}$$

wird. Der Körper setzt also dieselbe Schraubung unbegrenzt fort, mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit.

Soll der Körper sich fortgesetzt in derselben Schraube, aber mit wechselnder Winkelgeschwindigkeit bewegen, so muß:

$$(49) \qquad P = \varrho (\mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q), \quad Q = \varrho (\mathfrak{B}p + \mathfrak{C}q)$$

werden, wobei ϱ einen beliebig bleibenden Proportionalitätsfaktor bedeutet. Dann werden die Bewegungsgleichungen einfach:

$$(49\text{a}) \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \varrho p, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \varrho q,$$

und daraus folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q^2}\left(q \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - p \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right) = 0,$$

so daß das Verhältnis $p : q$ in der Tat ungeändert bleibt. Wir erhalten aus den Gleichungen (49a):

$$\omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + q \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \varrho (p^2 + q^2) = \varrho \omega^2$$

und somit:

$$(50) \qquad \varrho = \frac{\mathrm{d} \log \omega}{\mathrm{d}t}.$$

Die Beschleunigungsdynamen sind bis jetzt nur charakterisiert worden durch zwei Größen P und Q, zu denen die Bewegungsgleichungen unmittelbar hinleiten. Wir wollen nun die wirklichen Koordinaten der Beschleunigungsdyname einführen, indem wir voraussetzen, daß die Schrauben derselben zu dem nämlichen linearen Schraubensystem gehören wie die Schrauben der dem Körper möglichen Schrauben. Die Koordinaten der Dyname sind also von der Form:

$$\text{(51)} \qquad \mathrm{X}, \quad \mathrm{Y}, \quad \mathrm{Z} = 0, \quad \mathrm{L} = \alpha\mathrm{X}, \quad \mathrm{M} = \beta\mathrm{Y}, \quad \mathrm{N} = 0,$$

und bilden wir nun den Arbeitsausdruck gemäß der Formel:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathrm{Xu} + \mathrm{Yv} + \mathrm{Zw} + \mathrm{Lp} + \mathrm{Mq} + \mathrm{Nr},$$

so wird hier in Rücksicht auf (1a) und (51):

$$\text{(52)} \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 2\alpha\mathrm{X}p + 2\beta\mathrm{Y}q.$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit (26), so erkennt man sofort, daß man:

$$\text{(53)} \qquad P = 2\alpha\mathrm{X}, \quad Q = 2\beta\mathrm{Y}$$

zu setzen hat.

Wir deuten die Beschleunigungsdyname wieder als einen Stoß, der augenblicklich eine bestimmte Schraubung hervorruft. So finden wir in eindeutiger Weise jeder Schraube der Schraubenreihe als Träger der Stoßdyname eine andere Schraube als Träger der durch den Stoß hervorgerufenen Schraubung zugeordnet, und diese Zuordnung wollen wir näher untersuchen. Die erste Schraube nennen wir die Impulsschraube, die zweite Schraube die Instantanschraube. Die bestimmenden Größen P, Q des Stoßes waren mit den unabhängigen Koordinaten p, q der zugehörigen Schraubung durch die Gleichungen verknüpft:

$$\text{(54)} \qquad P = \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q, \quad Q = \mathfrak{B}p + \mathfrak{C}q.$$

In diese Gleichungen haben wir jetzt für P, Q die Ausdrücke (53) einzusetzen. Wir ziehen es vor, noch eine Hilfsschraubung einzuführen, deren unabhängige Koordinaten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ wir definieren durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{p} = -Q, \quad \mathfrak{q} = P.$$

Dann wird $P\mathfrak{p} + Q\mathfrak{q} = 0$ oder:

$$\text{(55)} \qquad \alpha\mathrm{X}\mathfrak{p} + \beta\mathrm{Y}\mathfrak{q} = 0.$$

Diese Gleichung besagt aber, daß die Schraube der Hilfsschraubung zu der Impulsschraube korreziprok ist. Wir denken uns die Bildpunkte H_0 und J_0 dieser beiden Schrauben durch eine gerade Linie verbunden. Die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte des Bildkreises ist in (18) gegeben. Diese Gleichung liefert hier:

$$(\mathrm{X}\mathfrak{p} - \mathrm{Y}\mathfrak{q})\,p + (\mathrm{X}\mathfrak{q} + \mathrm{Y}\mathfrak{p})\,q - 2c\mathrm{X}\mathfrak{p} = 0$$

oder mit Rücksicht auf (55) nach Multiplikation mit β:

$$(\alpha + \beta)\,\mathrm{X}\mathfrak{p}\,p + \beta\,(\mathrm{X}\mathfrak{q} + \mathrm{Y}\mathfrak{p})\,q - 2c\beta\mathrm{X}\mathfrak{p} = 0.$$

Für $q = 0$ folgt daraus, wenn wir dann $p = p_0$ setzen:

$$p_0 = \frac{2c\beta}{\alpha + \beta}. \tag{56}$$

Die hier vorliegenden Verbindungslinien gehen also alle durch einen bestimmten Punkt B der p-Achse, dessen Abszisse p_0 ist und der von dem früher (im 12. Kapitel) eingeführten Parameterpol nicht wesentlich verschieden ist, nur daß dort der Durchmesser $2c$ des Bildkreises, der hier beliebig bleibt, gleich $\beta - \alpha$ genommen war.

Führen wir in die Gleichungen (54) $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ein, so folgt daraus unmittelbar, daß:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}p + \mathfrak{B}(\mathfrak{q}p + \mathfrak{p}q) + \mathfrak{C}\mathfrak{q}q = 0 \tag{57}$$

wird. Das heißt aber nach (21), daß die Hilfsschraube und die Instantanschraube zwei konjugierte Trägheitsschrauben bilden und die Verbindungslinie ihrer Bildpunkte H_0, K_0 auf dem Bildkreise durch den Trägheitspol T hindurchgeht. Man findet also, wenn der Bildpunkt J_0 der Impulsschraube gegeben ist, den Bildpunkt K_0 der zugehörigen Instantanschraube, indem man J_0 mit dem Parameterpol B verbindet und aus dem zweiten Schnittpunkte H_0 dieser Verbindungslinie mit dem Bildkreis wieder die Linie nach dem Trägheitspol T zieht. Der zweite Schnittpunkt dieser Linie mit dem Bildkreis ist der gesuchte Bildpunkt K_0.

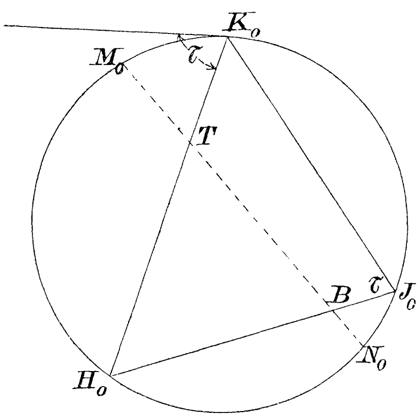

Fig. 26.

Aus dieser Konstruktion ergibt sich sofort, daß die Endpunkte M_0, N_0 der Sehne des Bildkreises, die den Parameterpol B mit dem Trägheitspol T verbindet, die Bildpunkte zweier Schrauben sind, in denen eine Impulsschraube mit ihrer zugehörigen Instantanschraube zusammenfällt, und diese beiden Hauptträgheitsschrauben, wie wir sie mit Ball[1]) nennen, sind stets reell, weil der Trägheitspol T immer im Innern des Bildkreises liegt und jede durch ihn hindurchgehende Linie diesen Kreis somit in zwei reellen Punkten trifft.

Die Schraubung, die durch einen gegebenen Impuls erfolgt, ist durch die Angabe der Zuordnung von Impuls- und Instantanschrauben nicht völlig bestimmt. Es fehlt noch die Festlegung ihrer Winkelgeschwindigkeit. Bevor wir an die allgemeine Erledigung dieser Frage gehen, wollen wir sie für einen besonderen Fall beantworten. Wir nehmen an, daß der Bildpunkt der Schraubung in den Trägheitspol falle und suchen den Impuls, der diese Schraubung hervorruft. Um denselben zu finden, haben wir in die durch Kombination von (53) und (54) entstehenden Gleichungen:

$$(58) \qquad 2\alpha \mathrm{X} = \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q, \quad 2\beta \mathrm{Y} = \mathfrak{B}p + \mathfrak{C}q$$

für p, q die Koordinaten (17) des Trägheitspols einzusetzen und erhalten dann die folgenden Werte von X und Y, die wir hier mit $\mathrm{X}_t, \mathrm{Y}_t$ bezeichnen:

$$(59) \qquad \mathrm{X}_t = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}} \cdot \frac{c}{\alpha}, \quad \mathrm{Y}_t = 0.$$

Wir denken uns nun die Bildpunkte J_0 und K_0 der Impuls- und Instantanschraube durch eine gerade Linie verbunden, deren Gleichung gemäß der Formel (18) zu bilden ist. Wir wollen den Abstand $\mathfrak{s}$ des Parameterpols von dieser Verbindungslinie berechnen. Dann müssen wir in die linke Seite der Liniengleichung die Koordinaten $p = p_0$, $q = 0$ des Parameterpols einsetzen, nachdem wir die Gleichung durch Division mit $\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2}$ auf die Normalform gebracht haben. Wir erhalten so:

$$\mathfrak{s} = -\frac{(\mathrm{X}p - \mathrm{Y}q)p_0 - 2c\mathrm{X}p}{\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Setzen wir hierin den Wert (56) von p_0 ein, so wird:

$$(60) \qquad \mathfrak{s} = \frac{c}{\alpha + \beta} \cdot \frac{2\alpha \mathrm{X}p + 2\beta \mathrm{Y}q}{\mathrm{R} \cdot \omega},$$

wenn wir $\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}$, $\omega = \sqrt{p^2 + q^2}$ machen. Aus den Gleichungen (58) folgt aber:

$$2\alpha \mathrm{X}p + 2\beta \mathrm{Y}q = \mathfrak{A}p^2 + 2\mathfrak{B}pq + \mathfrak{C}q^2 = 2T.$$

Für die kinetische Energie nehmen wir den Ausdruck (20) und erhalten so mit Hinzuziehung von (60):

$$(\alpha + \beta)\mathrm{R} \cdot \mathfrak{s} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{C})\,\omega \cdot \mathfrak{u}$$

oder:

$$(61) \qquad \frac{\mathrm{R}}{\omega} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}}{2(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{s}}.$$

1) Zuerst untersuchte sie Ball in der Abhandlung Philosophical Transactions, Vol. 164, 1874, p. 27.

Den Quotienten $\mathfrak{u}/\mathfrak{s}$ unterziehen wir in dieser Gleichung noch einer weiteren Umformung. Wir bezeichnen (Fig. 26) mit τ den Winkel, welchen die Tangente des Bildkreises in K_0 mit der Linie $K_0 T$ bildet, dann wird der Abstand des Trägheitspols T von der Tangente:

$$\mathfrak{u} = \overline{K_0 T} \cdot \sin \tau.$$

Es ist aber auch der Peripheriewinkel $K_0 J_0 H_0 = \tau$ und demnach der Abstand des Parameterpols B, der auf $J_0 H_0$ liegt, von der Sehne $K_0 J_0$:

$$\mathfrak{s} = \overline{J_0 B} \cdot \sin \tau,$$

mithin ist:

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{s}} = \frac{\overline{K_0 T}}{\overline{J_0 B}},$$

und wir erhalten:

$$\frac{\mathrm{R}}{\omega} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}}{2(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\overline{K_0 T}}{\overline{J_0 B}}. \tag{62}$$

Nun haben nach einem bekannten Satz die Produkte der Sehnenabschnitte $\overline{K_0 T} \cdot \overline{H_0 T}$ und $\overline{J_0 B} \cdot \overline{H_0 B}$ denselben Wert, wie auch die Punkte auf dem Kreis gewählt seien. Wir können also in der vorigen Formel $\overline{K_0 T}$ und $\overline{J_0 B}$ auch durch die ihnen proportionalen umgekehrten Werte von $\overline{H_0 T}$ und $\overline{H_0 B}$ ersetzen und erhalten eine Formel:

$$\frac{\mathrm{R}}{\omega} = m \frac{\overline{H_0 B}}{\overline{H_0 T}}, \tag{63}$$

in der m eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet. Diese Bestimmung gelingt am einfachsten, wenn wir H_0 in den Mittelpunkt C der Bildebene, d. h. den Koordinatenursprung rücken lassen und $\omega = \overline{CT}$ nehmen. Dann gelangen wir zu dem vorweg erledigten Fall. Es wird:

$$\mathrm{R} = \mathrm{X}_t, \quad \overline{H_0 B} = \overline{CB} = p_0, \quad \overline{H_0 T} = \overline{CT} = \omega$$

und somit:

$$\mathrm{X}_t = m \cdot p_0,$$

oder wenn wir für X_t und p_0 die Werte (59) und (56) einsetzen:

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}} \cdot \frac{c}{\alpha} = m \cdot \frac{2 c \beta}{\alpha + \beta},$$

also:

$$m = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A} + \mathfrak{C}} \cdot \frac{\alpha + \beta}{2 \alpha \beta}. \tag{64}$$

Die Formeln (62) und (63) bringen die Resultante R der Impulsdyname und die Winkelgeschwindigkeit ω der zugehörigen instantanen Schraubung in einfachen geometrischen Zusammenhang, und damit ist die Bestimmung der instantanen Schraubung aus der Impulsdyname oder umgekehrt vollendet.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Bewegungsfreiheit dritter Stufe.

Wir nehmen jetzt an, der starre Körper habe drei Grade der Freiheit. Wir beschränken uns wieder auf den Fall, wo das zugehörige lineare Schraubensystem dritter Stufe ein zentrisches System ist, und legen die Koordinatenachsen in die Hauptachsen desselben. Dann sind von den sechs Koordinaten einer möglichen Schraubung des Körpers drei, p, q, r, als unabhängige Koordinaten anzusehen und durch diese drücken sich die übrigen drei in der folgenden einfachen Weise aus:

$$\mathrm{u} = \alpha \mathrm{p}, \quad \mathrm{v} = \beta \mathrm{q}, \quad \mathrm{w} = \gamma \mathrm{r}. \tag{1}$$

Die kinetische Energie des starren Massensystems ist dann gemäß der Formel (4) im 19. Kapitel durch den Ausdruck gegeben:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_\varrho \Big\{ (\alpha \mathrm{p} - \mathrm{r} y_\varrho + \mathrm{q} z_\varrho)^2 + (\beta \mathrm{q} - \mathrm{p} z_\varrho + \mathrm{r} x_\varrho)^2 + (\gamma \mathrm{r} - \mathrm{q} x_\varrho + \mathrm{p} y_\varrho)^2 \Big\}, \tag{2}$$

der, ausgerechnet, von der Form wird:

$$T = \tfrac{1}{2} \{ A_{11} \mathrm{p}^2 + A_{22} \mathrm{q}^2 + A_{33} \mathrm{r}^2 + 2 A_{23} \mathrm{q}\mathrm{r} + 2 A_{31} \mathrm{r}\mathrm{p} + 2 A_{12} \mathrm{p}\mathrm{q} \}, \tag{2a}$$

wobei zu setzen ist:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_{11} = \sum m_\varrho \{\alpha^2 + y_\varrho^2 + z_\varrho^2\}, & A_{23} = \sum m_\varrho \{(\beta - \gamma) x_\varrho - y_\varrho z_\varrho\}, \\ A_{22} = \sum m_\varrho \{\beta^2 + z_\varrho^2 + x_\varrho^2\}, & A_{31} = \sum m_\varrho \{(\gamma - \alpha) y_\varrho - z_\varrho x_\varrho\}, \\ A_{33} = \sum m_\varrho \{\gamma^2 + x_\varrho^2 + y_\varrho^2\}, & A_{12} = \sum m_\varrho \{(\alpha - \beta) z_\varrho - x_\varrho y_\varrho\}. \end{array} \right. \tag{3}$$

Diese Koeffizienten sind, indem wir wie immer voraussetzen, daß die momentane Beschränkung der Bewegungsfreiheit dieselbe bleibt, in der Zeit unveränderlich und somit wie Konstante zu behandeln. Aus (2a) ergibt sich sofort:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{p}} = A_{11} \mathrm{p} + A_{12} \mathrm{q} + A_{13} \mathrm{r}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{q}} = A_{21} \mathrm{p} + A_{22} \mathrm{q} + A_{23} \mathrm{r}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{r}} = A_{31} \mathrm{p} + A_{32} \mathrm{q} + A_{33} \mathrm{r}, \end{array} \right. \tag{4}$$

indem wir $A_{32} = A_{23}$, $A_{13} = A_{31}$, $A_{21} = A_{12}$ annehmen.

Wir gehen nun an die Aufstellung der Bewegungsgleichungen auf Grund der Formel (30) im 19. Kapitel. Wir haben zu dem Zweck in dem Ausdruck (2) die Koordinaten x_ϱ, y_ϱ, z_ϱ der einzelnen Massenpunkte zu variieren und für die Variationen δx_ϱ, δy_ϱ, δz_ϱ dieser Koordinaten, die durch eine dem Körper mögliche Schraubung herbeigeführt werden sollen, Werte von folgender Form anzunehmen:

$$\delta x_\varrho = (\alpha \mathfrak{p} + z_\varrho \mathfrak{q} - y_\varrho \mathfrak{r})\delta t,$$
$$\delta y_\varrho = (\beta \mathfrak{q} + x_\varrho \mathfrak{r} - z_\varrho \mathfrak{p})\delta t,$$
$$\delta z_\varrho = (\gamma \mathfrak{r} + y_\varrho \mathfrak{p} - x_\varrho \mathfrak{q})\delta t.$$

Setzt man nun in dem Variationsausdruck:

$$\delta T = \sum m_\varrho \left\{(\alpha \mathrm{p} - \mathrm{r} y_\varrho + \mathrm{q} z_\varrho)(\mathrm{q}\,\delta z_\varrho - \mathrm{r}\,\delta y_\varrho) + \cdots\right\}$$

die vorstehenden Werte für δx_ϱ, δy_ϱ, δz_ϱ ein, so ergibt sich ein Ausdruck von folgender Form:

$$(5^0) \qquad \delta T = (F\mathfrak{p} + G\mathfrak{q} + H\mathfrak{r})\delta t.$$

Die Ausrechnung ist etwas umständlich, unterliegt aber keiner prinzipiellen Schwierigkeit.[1]) Das Resultat ist das folgende. Es wird:

$$(5) \qquad F = \mathfrak{R}\mathrm{q} - \mathfrak{Q}\mathrm{r}, \quad G = \mathfrak{P}\mathrm{r} - \mathfrak{R}\mathrm{p}, \quad H = \mathfrak{Q}\mathrm{p} - \mathfrak{P}\mathrm{q},$$

wenn $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ gewisse lineare Funktionen von p, q, r bezeichnen, und zwar wollen wir setzen:

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = a_{11}\mathrm{p} + a_{12}\mathrm{q} + a_{13}\mathrm{r}, \\ \mathfrak{Q} = a_{21}\mathrm{p} + a_{22}\mathrm{q} + a_{23}\mathrm{r}, \\ \mathfrak{R} = a_{31}\mathrm{p} + a_{32}\mathrm{q} + a_{33}\mathrm{r}. \end{cases}$$

Dabei werden die Koeffizienten:

$$(7) \quad \begin{cases} a_{11} = \sum m_\varrho(x_\varrho^2 + \beta\gamma), & a_{12} = \sum m_\varrho(x_\varrho y_\varrho - \gamma z_\varrho), & a_{13} = \sum m_\varrho(z_\varrho x_\varrho + \beta y_\varrho), \\ a_{21} = \sum m_\varrho(x_\varrho y_\varrho + \gamma z_\varrho), & a_{22} = \sum m_\varrho(y_\varrho^2 + \gamma\alpha), & a_{23} = \sum m_\varrho(y_\varrho z_\varrho - \alpha x_\varrho), \\ a_{31} = \sum m_\varrho(z_\varrho x_\varrho - \beta y_\varrho), & a_{32} = \sum m_\varrho(y_\varrho z_\varrho + \alpha x_\varrho), & a_{33} = \sum m_\varrho(z_\varrho^2 + \alpha\beta). \end{cases}$$

Aus der Formel (5) ergibt sich unmittelbar:

$$(8) \qquad F\mathrm{p} + G\mathrm{q} + H\mathrm{r} = 0.$$

Wir wollen sofort bemerken, daß $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ nicht völlig bestimmt sind. Man kann vielmehr statt der angesetzten Werte (6) auch $\mathfrak{P} + \lambda\mathrm{p}$, $\mathfrak{Q} + \lambda\mathrm{q}$, $\mathfrak{R} + \lambda\mathrm{r}$ nehmen, ohne daß hierbei, was auch λ sei, die

1) Vgl. Ball, Theory of Screws, p. 430.

Größen $F, G, H,$ auf die es allein ankommt, eine Änderung erfahren. Wir deuten F, G, H als die Komponenten eines Vektormomentes, das wir als Zentrifugalmoment bezeichnen. Nach der Formel (5) erscheint dies Vektormoment als das äußere Produkt der beiden Vektoren mit den Komponenten p, q, r und $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$.

Wir können jetzt die Bewegungsgleichungen sofort hinschreiben. Wir geben ihnen die Gestalt:

$$(9)\qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_{11}\mathrm{p} + A_{12}\mathrm{q} + A_{13}\mathrm{r}) = P + F, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_{21}\mathrm{p} + A_{22}\mathrm{q} + A_{23}\mathrm{r}) = Q + G, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_{31}\mathrm{p} + A_{32}\mathrm{q} + A_{33}\mathrm{r}) = R + H. \end{cases}$$

Die P, Q, R entsprechen den Größen Ω_i und F, G, H gemäß (5^0) den Größen T'_{ω_i} in der Formel (30) des 19. Kapitels.

Durch P, Q, R wird wieder die Beschleunigungsdyname festgelegt, und wieder verlangen wir, daß die Schraube dieser Dyname dem linearen Schraubensystem, das die Beschränkung der Bewegungsfreiheit ausdrückt, angehören soll. Dann müssen die gewöhnlichen Koordinaten der Dyname von der Form sein:

$$(10)\qquad \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z},\quad \mathrm{L} = \alpha\mathrm{X},\quad \mathrm{M} = \beta\mathrm{Y},\quad \mathrm{N} = \gamma\mathrm{Z},$$

und damit wird die Arbeitsleistung bei einer Schraubung, deren Koordinaten den Gleichungen (1) genügen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{Xu} + \mathrm{Yv} + \mathrm{Zw} + \mathrm{Lp} + \mathrm{Mq} + \mathrm{Nr} \\ &= 2\alpha\mathrm{Xp} + 2\beta\mathrm{Yq} + 2\gamma\mathrm{Zr}. \end{aligned}$$

Anderseits aber folgt aus den Gleichungen (9), wenn wir sie mit p, q, r multiplizieren und addieren, mit Rücksicht auf (8):

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P\mathrm{p} + Q\mathrm{q} + R\mathrm{r}$$

und da $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$, wird auch:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = P\mathrm{p} + Q\mathrm{q} + R\mathrm{r}.$$

Durch Vergleichung dieser Formel mit der oben gefundenen ergibt sich, daß:

$$(11)\qquad P = 2\alpha\mathrm{X},\quad Q = 2\beta\mathrm{Y},\quad R = 2\gamma\mathrm{Z}$$

zu setzen ist.

Wir behandeln nun zuerst den Fall, wo die Beschleunigungsdyname einen Impuls darstellt, der den starren Körper instantan aus der Ruhelage in die durch die unabhängigen Koordinaten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ charakterisierte Schraubung versetzt. Multiplizieren wir dann die Gleichungen (9) wieder mit dt und integrieren über die sehr kurze Wirkungszeit τ des Stoßes, so erhalten wir auf der linken Seite jedesmal einfach den eingeklammerten Ausdruck, auf der rechten Seite können wir wieder die zweiten Glieder vernachlässigen, da sie kleiner als $F \cdot \tau$, $G \cdot \tau$, $H \cdot \tau$ ausfallen, also kleiner als gewisse quadratische Funktionen der endlichen Schraubungskoordinaten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, multipliziert mit der sehr kleinen Zeit τ, sind. Die Integrale

$$\int P dt, \quad \int Q dt, \quad \int R dt$$

müssen endliche Werte annehmen, indem hier P, Q, R als ungeheuer groß gegenüber den Koordinaten einer Dyname, die in endlicher Zeit eine mäßige Bewegungsänderung hervorbringt, anzusehen sind. Wir schreiben für die Integrale wieder einfach P, Q, R und gelangen damit zu den Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{cases} A_{11}\mathfrak{p} + A_{12}\mathfrak{q} + A_{13}\mathfrak{r} = P, \\ A_{21}\mathfrak{p} + A_{22}\mathfrak{q} + A_{23}\mathfrak{r} = Q, \\ A_{31}\mathfrak{p} + A_{32}\mathfrak{q} + A_{33}\mathfrak{r} = R. \end{cases}$$

Wir deuten nun $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ als Koordinaten eines Punktes in einem Bildraum und erhalten so eine Abbildung der dem Körper möglichen Schraubungen durch die Punkte dieses Bildraumes. Hierbei erfüllen die Bildpunkte der Schraubungen, denen dieselbe kinetische Energie zukommt, jedesmal ein Ellipsoid, und alle die Ellipsoide, die wir so erhalten, sind konzentrisch, ähnlich und in ähnlicher Lage. Sie stimmen also in der Lage der Hauptachsen überein. Ihr gemeinsamer Mittelpunkt C ist der Punkt ($\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{q} = 0$, $\mathfrak{r} = 0$), welcher der Ruhelage des Körpers zugeordnet ist.

Die Größen P, Q, R deuten wir als die Koordinaten einer Ebene im Bildraume, nämlich der Ebene, welche durch die Gleichung:

$$P\mathfrak{y} + Q\mathfrak{q} + R\mathfrak{x} = 1$$

festgelegt ist, wenn $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{x}$ laufende Punktkoordinaten bezeichnen. Die Gleichungen (12) vermitteln dann eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten und Ebenen des Bildraumes, bei welcher der Bildebene eines Impulses der Bildpunkt der durch den Impuls hervorgerufenen instantanen Schraubung zugeordnet wird, und sie zeigen, daß Punkt und Ebene einander als Pol und Polare bezüglich des Ellipsoides zugeordnet sind, dessen Gleichung lautet:

$$(13) \qquad A_{11}\mathfrak{p}^2 + A_{22}\mathfrak{q}^2 + A_{33}\mathfrak{r}^2 + 2A_{23}\mathfrak{q}\mathfrak{r} + 2A_{31}\mathfrak{r}\mathfrak{p} + 2A_{12}\mathfrak{p}\mathfrak{q} = 1.$$

Es ist das Ellipsoid, dessen Punkte die Bilder der Schraubungen von der kinetischen Energie $^1/_2$ sind und das wir kurz als das Trägheitsellipsoid bezeichnen wollen.

Wir suchen insbesondere die Fälle, wo die Schraube des Impulses mit der Schraube der zugehörigen instantanen Schraubung zusammenfällt. Dann muß gemäß den Gleichungen (11):

$$P : Q : R = 2\alpha \mathfrak{p} : 2\beta \mathfrak{q} : 2\gamma \mathfrak{r} \tag{14}$$

sein. Wenn $\alpha, \beta, \gamma > 0$, führen wir durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = \sqrt{\alpha} \cdot \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{y} = \sqrt{\beta} \cdot \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{z} = \sqrt{\gamma} \cdot \mathfrak{r}$$

$\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als neue Parameter der Schraubung ein und schreiben dementsprechend die Gleichung (13):

$$B_{11}\mathfrak{x}^2 + B_{22}\mathfrak{y}^2 + B_{33}\mathfrak{z}^2 + 2B_{23}\mathfrak{y}\mathfrak{z} + 2B_{31}\mathfrak{z}\mathfrak{x} + 2B_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 1, \tag{13a}$$

indem wir:

$$B_{11} = \frac{A_{11}}{\alpha}, \quad B_{22} = \frac{A_{22}}{\beta}, \quad B_{33} = \frac{A_{33}}{\gamma}, \quad B_{23} = \frac{A_{23}}{\sqrt{\beta\gamma}} \quad \text{usw.}$$

setzen. Dann werden die zu erfüllenden Gleichungen:

$$\begin{cases} B_{11}\mathfrak{x} + B_{12}\mathfrak{y} + B_{13}\mathfrak{z} = \lambda\,\mathfrak{x}, \\ B_{21}\mathfrak{x} + B_{22}\mathfrak{y} + B_{23}\mathfrak{z} = \lambda\,\mathfrak{y}, \\ B_{31}\mathfrak{x} + B_{32}\mathfrak{y} + B_{33}\mathfrak{z} = \lambda\,\mathfrak{z}, \end{cases} \tag{15}$$

wenn λ einen noch unbestimmten Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Das Problem ist jetzt formal genau dasselbe, als wenn unter der Voraussetzung, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ seien rechtwinklige Punktkoordinaten, die Hauptachsen der durch die Gleichung (13a) dargestellten Fläche zweiter Ordnung zu ermitteln wären. Für den Faktor λ ergibt sich die Gleichung dritten Grades:

$$\begin{vmatrix} B_{11} - \lambda & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - \lambda & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{16}$$

und wie die Hauptachsen der Fläche sind auch die Wurzeln dieser Gleichung stets reell. Den drei Hauptachsen entsprechend ergeben sich drei Lösungssysteme $\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z}$ und demnach auch drei Lösungssysteme $\mathfrak{p} : \mathfrak{q} : \mathfrak{r}$, d. h. drei Schrauben, welche gleichzeitig Träger eines Impulses und der durch diesen Impuls hervorgerufenen Schraubung sind und welche wir wieder als Hauptträgheitsschrauben bezeichnen. Diese sind auch, wenn unter den Größen α, β, γ negative sind, reell. Denn sie werden bestimmt als die Durchmesser der konzentrischen Flächen 2. Ordnung:

$$A_{11}\mathrm{p}^2 + 2A_{12}\mathrm{p}\,\mathrm{q} + \cdots + A_{33}\mathrm{r}^2 = 1, \quad \alpha\mathrm{p}^2 + \beta\mathrm{q}^2 + \gamma\mathrm{r}^2 = 1,$$

für deren Punkte die Polarebenen bez. dieser Flächen parallel ausfallen. Diese drei Durchmesser sind aber nach dem vorstehenden reell, wenn eine der Flächen ein Ellipsoid ist. Eine dieser Flächen ist aber wirklich immer ein Ellipsoid, nämlich die erste, das Trägheitsellipsoid. Unter besonderen Umständen gibt es außer einer alleinstehenden noch unendlich viele Hauptträgheitsschrauben, die ein lineares Schraubensystem zweiter Stufe bilden, oder auch alle Schrauben des Schraubennetzes sind Hauptträgheitsschrauben.

Wir wollen jetzt statt p, q, r in dem Bildraume neue Koordinaten p, q, r einführen, die sich auf die Hauptachsen des durch die Gleichung (13) dargestellten Trägheitsellipsoides beziehen. Gleichzeitig führen wir statt der Ebenenkoordinaten P, Q, R neue Ebenenkoordinaten P', Q', R' ein, die sich auf dasselbe Koordinatensystem beziehen und dadurch definiert sind, daß identisch:

$$P'p + Q'q + R'r = P\mathrm{p} + Q\mathrm{q} + R\mathrm{r} \tag{17}$$

werden soll. Lautet dann die Gleichung des Trägheitsellipsoides in diesen neuen Koordinaten:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 1, \tag{18}$$

so wird die Beziehung zwischen den Impulsen und den zugehörigen Schraubungen durch die einfachen Beziehungen vermittelt:

$$P' = Ap, \quad Q' = Bq, \quad R' = Cr. \tag{19}$$

Der Ausdruck für die kinetische Energie wird, wenn wir die Schraubungen uns durch diese neuen Parameter p, q, r festgelegt denken:

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \tag{20}$$

Da bei dem Übergange zu dem neuen Koordinatensystem im Bildraume noch identisch:

$$\begin{cases} p^2 + q^2 + r^2 = \mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2 \\ P'^2 + Q'^2 + R'^2 = P^2 + Q^2 + R^2 \end{cases} \tag{21}$$

wird, so wird, wenn $\omega = \sqrt{\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2}$ die Winkelgeschwindigkeit der Schraubung bezeichnet, auch in dem neuen Koordinatensystem:

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2. \tag{22}$$

Setzen wir ferner:

$$\Omega = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2},$$

so erhalten wir noch:

$$\Omega^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2$$

oder, wenn wir nach (19) die Parameter P', Q', R' des Impulses durch die Parameter p, q, r der zugehörigen Schraubung ersetzen:

$$\Omega^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2. \tag{23}$$

Aus den Gleichungen (20), (22), (23) leiten wir mit Leichtigkeit die folgenden ab:

$$\begin{cases} \Omega^2 - 2(B+C)T + BC\omega^2 = (A-B)(A-C)p^2, \\ \Omega^2 - 2(C+A)T + CA\omega^2 = (B-C)(B-A)q^2, \\ \Omega^2 - 2(A+B)T + AB\omega^2 = (C-A)(C-B)r^2. \end{cases} \tag{24}$$

Wir können nun setzen:

$$2T = \xi\omega^2, \quad \Omega^2 = (\xi^2 + \eta^2)\,\omega^2. \tag{25}$$

In der Tat ist für die Möglichkeit dieser Substitution notwendig und hinreichend, daß die Ungleichung besteht:

$$\Omega^2 > \xi^2\omega^2$$

oder:

$$\Omega^2\omega^2 - 4T^2 > 0.$$

Die linke Seite der letzten Ungleichung aber wird:

$$\begin{aligned}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2)(p^2 + q^2 + r^2) - (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)^2 \\ = (B-C)^2q^2r^2 + (C-A)^2r^2p^2 + (A-B)^2p^2q^2,\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist als Summe von Quadraten notwendig positiv. Wir wollen noch setzen:

$$p = \omega\sin\lambda, \quad q = \omega\sin\mu, \quad r = \omega\sin\nu, \tag{26}$$

indem wir mit λ, μ, ν die Winkel bezeichnen, welche die Richtung der Schraubenachse mit den Hauptebenen des Trägheitsellipsoids bildet. Dann gehen die Gleichungen (24) über in:

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - (B+C)\,\xi + BC = (A-B)(A-C)\sin\lambda^2, \\ \xi^2 + \eta^2 - (C+A)\,\xi + CA = (B-C)(B-A)\sin\mu^2, \\ \xi^2 + \eta^2 - (A+B)\,\xi + AB = (C-A)(C-B)\sin\nu^2. \end{cases} \tag{27}$$

Deutet man ξ, η nun als rechtwinklige Koordinaten in einer Hilfsebene, so sind dies die Gleichungen dreier Kreise, deren Mittelpunkte auf der ξ-Achse liegen und der Reihe nach die Abszissen haben:

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}(B+C), \quad \xi_2 = \tfrac{1}{2}(C+A), \quad \xi_3 = \tfrac{1}{2}(A+B).$$

Die Kreise gehen alle drei durch dieselben zwei Punkte, sie gehören einem Büschel an. Damit dies nämlich der Fall ist, muß sich eine der Kreisgleichungen durch lineare Kombination aus den anderen beiden ergeben, und in der Tat finden wir, wenn wir die Gleichungen

(27) der Reihe nach mit $B - C$, $C - A$, $A - B$ multiplizieren und addieren:

$$BC(B-C) + CA(C-A) + AB(A-B) = (A-B)(A-C)(B-C),$$

also eine Identität. Die beiden Schnittpunkte der drei Kreise liegen auf einer Parallelen zur η-Achse, und wenn ξ ihre gemeinsame Abszisse ist, so wird $T = \frac{1}{2}\xi\omega^2$, die drei Kreise, die, wie ihre Gleichungen (27) zeigen, einzeln von den Richtungswinkeln λ, μ, ν der Schraubenachse abhängen, können also dienen, um die kinetische Energie einer Schraubung in dieser Schraube graphisch zu illustrieren.

Wir nehmen zu den drei Kreisen hinzu die drei mit ihnen einzeln konzentrischen Kreise, deren Gleichungen lauten:

$$(27\text{a}) \qquad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - (B + C)\,\xi + BC = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 - (C + A)\,\xi + CA = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 - (A + B)\,\xi + AB = 0. \end{cases}$$

Diese drei Kreise berühren sich paarweise in einem Punkte der ξ-Achse. In der Tat werden die vorstehenden Gleichungen für $\eta = 0$:

$$(\xi - B)(\xi - C) = 0, \quad (\xi - C)(\xi - A) = 0, \quad (\xi - A)(\xi - B) = 0,$$

die Berührungspunkte haben also die Abszissen:

$$\xi' = A, \quad \xi'' = B, \quad \xi''' = C,$$

die Radien der Kreise sind der Reihe nach, vom Vorzeichen abgesehen:

$$\varrho' = \tfrac{1}{2}(B - C), \quad \varrho'' = \tfrac{1}{2}(C - A), \quad \varrho''' = \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Sucht man die Schnittpunkte des zweiten dieser Kreise mit dem Kreise, der durch die erste der Gleichungen (27) gegeben wird, so erhält man durch einfache Subtraktion der beiden Kreisgleichungen für die gemeinsame Abszisse der zwei Schnittpunkte:

$$\xi = C + (A - C)\sin\lambda^2$$

oder:

$$\xi = A\sin\lambda^2 + C\cos\lambda^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(C + A) + \tfrac{1}{2}(C - A)\cos 2\lambda.$$

Ziehen wir also nach dem einen der Schnittpunkte den Radius des zweiten Grundkreises (27a), dessen Mittelpunkt die Abszisse $\frac{1}{2}(C + A)$ hat, so bildet dieser Radius, der die Länge $\frac{1}{2}(C - A)$ hat, mit der ξ-Achse den Winkel 2λ. Verbindet man den Schnittpunkt aber mit dem Punkte der ξ-Achse, in dem der zweite Grundkreis den dritten berührt, so

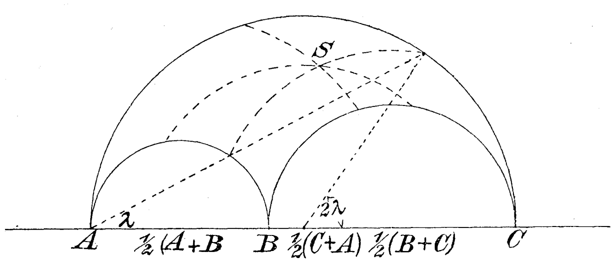

Fig. 27.

ist der Winkel, den diese Verbindungslinie mit der ξ-Achse bildet, als Peripheriewinkel gleich der Hälfte des zuerst gefundenen Winkels als des zugehörigen Zentriwinkels, mithin $= \lambda$. So lassen sich auch die Winkel λ, μ, ν auf einfache Weise in der Figur sichtbar machen und sich, wenn sie gegeben sind, aus den Grundkreisen die konzentrischen Kreise konstruieren, die folgende Eigenschaft haben: Die gemeinsame Abszisse ξ ihrer Schnittpunkte liefert nach (25) den Ausdruck für die doppelte kinetische Energie einer Schraubung von der Winkelgeschwindigkeit 1 in der Schraube, deren Achse die Richtungswinkel λ, μ, ν hat.

Diese Konstruktion ist von besonderer Bedeutung, wenn in den Grundgleichungen (1) $\alpha, \beta, \gamma = 0$ werden. Dann sind alle Schraubungen Rotationen um einen festen Punkt, und die doppelte kinetische Energie einer Drehung von der Winkelgeschwindigkeit 1 ist das Trägheitsmoment des starren Körpers für die Drehachse. So gelangt man zu einer graphischen Darstellung der Trägheitsmomente eines Körpers für alle durch einen festen Punkt gehenden Achsen. Diese Darstellung der Trägheitsmomente ist ebenfalls von Mohr gegeben worden.[1])

Wir kehren jetzt zurück zu den allgemeinen Bewegungsgleichungen und wollen zunächst die Zentrifugalmomente einer näheren Betrachtung unterziehen. Jeder Schraubung, welche der starre Körper ausführen kann, ist ein Zentrifugalmoment zugeordnet und wir fragen, welcher Art diese Zuordnung ist. Wir deuten wieder die unabhängigen Koordinaten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ der Schraubung als rechtwinklige Punktkoordinaten in einem Bildraume. Dann wird durch die Gleichungen (6) jedem Punkte P des Bildraumes ein bestimmter Vektor zugeordnet, dessen Komponenten lineare Funktionen von den Koordinaten des Punktes P sind. Diesen Vektor denken wir uns nun am Punkte P angreifend und lassen vom Koordinatenursprung C den entgegengesetzt gleichen Vektor ausgehen. Deuten wir die Vektoren als Kräfte, so bilden diese beiden Kräfte ein Kräftepaar, welches dem Zentrifugalmoment gleich ist. In der Tat werden die Komponenten des Kräftepaares:

$$\mathfrak{q}\mathfrak{R} - \mathfrak{r}\mathfrak{Q} = F, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{P} - \mathfrak{p}\mathfrak{R} = G, \quad \mathfrak{p}\mathfrak{Q} - \mathfrak{q}\mathfrak{P} = H.$$

Daraus können wir auch schließen, daß wir das Zentrifugalmoment darstellen können durch ein Kräftepaar, dessen Kräfte die Komponenten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ und $-\mathfrak{P}, -\mathfrak{Q}, -\mathfrak{R}$ haben und in zwei Punkten der augenblicklichen Rotationsachse angreifen.

Die Wirkungslinien der beiden Kräfte fallen zusammen und das Zentrifugalmoment verschwindet, wenn der Vektor $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ in die Richtung der Rotationsachse fällt, wenn also:

$$\mathfrak{P} = \lambda\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{Q} = \lambda\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{R} = \lambda\mathfrak{r}$$

1) Zivilingenieur 1896, p. 237, Technische Mechanik p. 93.

wird. Daraus ergeben sich die Gleichungen:

$$(28)\qquad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)\,\mathrm{p} + a_{12}\mathrm{q} + a_{13}\mathrm{r} = 0, \\ a_{21}\mathrm{p} + (a_{22}-\lambda)\,\mathrm{q} + a_{23}\mathrm{r} = 0, \\ a_{31}\mathrm{p} + a_{32}\mathrm{q} + (a_{33}-\lambda)\,\mathrm{r} = 0, \end{cases}$$

und somit ist λ eine Wurzel der Gleichung dritten Grades:

$$(29)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Den drei Wurzeln dieser Gleichung entsprechend sind drei Lösungssysteme $\mathrm{p}:\mathrm{q}:\mathrm{r}$ der vorhergehenden linearen Gleichungen möglich und somit drei Schrauben, für welche das Zentrifugalmoment verschwindet. Wenn dies der Fall ist, reduzieren sich aber die Bewegungsgleichungen auf:

$$(30)\qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_{11}\mathrm{p} + A_{12}\mathrm{q} + A_{13}\mathrm{r}) = P, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_{21}\mathrm{p} + A_{22}\mathrm{q} + A_{23}\mathrm{r}) = Q, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_{31}\mathrm{p} + A_{32}\mathrm{q} + A_{33}\mathrm{r}) = R, \end{cases}$$

und wenn nun noch die Beschleunigungsdyname verschwindet, also $P, Q, R = 0$ ist, so ergibt sich zunächst, daß die eingeklammerten Größen auf der linken Seite der vorstehenden Gleichungen in der Zeit konstant sind. Damit wird aber auch:

$$(31)\qquad \mathrm{p},\ \mathrm{q},\ \mathrm{r} = \mathrm{const.}$$

für die ganze Dauer der Bewegung. Der starre Körper setzt also seine Bewegung in derselben Schraube mit unveränderter Winkelgeschwindigkeit fort. Die vorliegenden Schrauben sind somit wieder als permanente Schrauben zu bezeichnen.

Insbesondere ist der Fall ausgezeichnet, wo:

$$(32)\qquad \Sigma m_\varrho x_\varrho = 0, \quad \Sigma m_\varrho y_\varrho = 0, \quad \Sigma m_\varrho z_\varrho = 0$$

wird, wo also der gewählte Koordinatenursprung der Schwerpunkt des starren Körpers ist. Das heißt, daß wir den Mittelpunkt des zentrischen Schraubennetzes, das die vorliegende Einschränkung der Bewegungsfreiheit charakterisiert, zusammenfallen lassen mit dem Schwerpunkte des starren Körpers. In diesem Falle wird nach den Definitionsgleichungen (7):

$$(33)\qquad a_{23} = a_{32}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{21} = a_{12},$$

und die Gleichungen (28) bedeuten somit, daß man die Hauptachsen der Fläche zweiter Ordnung sucht, die durch die Gleichung dargestellt wird:

$$(34)\quad a_{11}\mathrm{p}^2 + a_{22}\mathrm{q}^2 + a_{33}\mathrm{r}^2 + 2a_{23}\mathrm{q}\,\mathrm{r} + 2a_{31}\mathrm{r}\,\mathrm{p} + 2a_{12}\mathrm{p}\,\mathrm{q} = 1.$$

Man erhält also notwendigerweise drei reelle permanente Schrauben, deren Achsen zueinander rechtwinklig sind.

In dem noch spezielleren Falle, wo auch:

$$(35)\qquad \Sigma m_\varrho y_\varrho z_\varrho = 0,\quad \Sigma m_\varrho z_\varrho x_\varrho = 0,\quad \Sigma m_\varrho x_\varrho y_\varrho = 0$$

wird, wo also die Hauptachsen des Schraubennetzes, die wir für die Koordinatenachsen gewählt haben, mit den Hauptträgheitsachsen des starren Körpers identisch sind, wird gleichzeitig:

$$(36)\qquad A_{23} = 0,\quad A_{31} = 0,\quad A_{12} = 0$$

und:

$$(36\text{a})\qquad a_{23} = 0,\quad a_{31} = 0,\quad a_{12} = 0.$$

Schreiben wir dann einfacher:

$$A_{11} = A,\ A_{22} = B,\ A_{33} = C \quad \text{und} \quad a_{11} = a,\ a_{22} = b,\ a_{33} = c,$$

so erhalten die Bewegungsgleichungen die Gestalt:

$$(37)\qquad \begin{cases} A\,\dfrac{d\mathrm{p}}{dt} = P + (c-b)\,\mathrm{q}\,\mathrm{r}, \\[2mm] B\,\dfrac{d\mathrm{q}}{dt} = Q + (a-c)\,\mathrm{r}\,\mathrm{p}, \\[2mm] C\,\dfrac{d\mathrm{r}}{dt} = R + (b-a)\,\mathrm{p}\,\mathrm{q}. \end{cases}$$

Nimmt man endlich außer (35):

$$\alpha = 0,\quad \beta = 0,\quad \gamma = 0$$

an, so daß alle Schraubungen des Schraubennetzes zu Drehungen um einen festen Punkt werden, so ist:

$$(38)\qquad A = b + c,\quad B = c + a,\quad C = a + b,$$

mithin:

$$(38\text{a})\quad B - C = c - b,\quad C - A = a - c,\quad A - B = b - a,$$

und die vorigen Bewegungsgleichungen gehen über in:

$$(39)\qquad \begin{cases} A\,\dfrac{d\mathrm{p}}{dt} = P + (B-C)\,\mathrm{q}\,\mathrm{r}, \\[2mm] B\,\dfrac{d\mathrm{q}}{dt} = Q + (C-A)\,\mathrm{r}\,\mathrm{p}, \\[2mm] C\,\dfrac{d\mathrm{r}}{dt} = R + (A-B)\,\mathrm{p}\,\mathrm{q}. \end{cases}$$

Dies sind die Eulerschen Gleichungen für die Drehung um einen festen Punkt.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Spannungen.

Wir haben bisher Kräftesysteme nur in Verbindung mit starren Massensystemen betrachtet, d. h. wir haben angenommen, die Angriffspunkte der Kräfte seien starr miteinander verbunden, womit gesagt sein soll, daß bei allen Veränderungen, welche diese Angriffspunkte erleiden können, ihre Abstände voneinander sich nicht ändern. Diese Voraussetzung wollen wir jetzt aufgeben, wir wollen vielmehr annehmen, daß das System der Angriffspunkte einer Deformation in dem Sinne, wie wir das Wort gebraucht haben, unterworfen werde.[1])

Wir bezeichnen nunmehr mit X_ϱ, Y_ϱ, Z_ϱ die Komponenten der ϱ^{ten} Kraft des Systems, mit x_ϱ, y_ϱ, z_ϱ die Koordinaten ihres Angriffspunktes und bilden sofort den Ausdruck für die Arbeit:

$$(1) \qquad \delta W = \sum_\varrho \{X_\varrho \, \delta x_\varrho + Y_\varrho \, \delta y_\varrho + Z_\varrho \, \delta z_\varrho\},$$

wobei die Veränderungen δx_ϱ, δy_ϱ, δz_ϱ der Koordinaten von einer Deformation des Systems der Angriffspunkte herrühren sollen. Es sind deswegen diese Änderungen von der Form:

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta x_\varrho = (\alpha_0 + \alpha_1 x_\varrho + \alpha_2 y_\varrho + \alpha_3 z_\varrho)\tau, \\ \delta y_\varrho = (\beta_0 + \beta_1 x_\varrho + \beta_2 y_\varrho + \beta_3 z_\varrho)\tau, \\ \delta z_\varrho = (\gamma_0 + \gamma_1 x_\varrho + \gamma_2 y_\varrho + \gamma_3 z_\varrho)\tau. \end{cases}$$

Wir zerlegen jetzt die allgemeine Deformation in eine reine Deformation und eine Schraubung. Wir bezeichnen die Koordinatenänderungen, welche die erstere bewirkt, mit $\delta' x_\varrho$, $\delta' y_\varrho$, $\delta' z_\varrho$ und die von der letzteren herrührenden mit $\delta'' x_\varrho$, $\delta'' y_\varrho$, $\delta'' z_\varrho$, dann wird:

$$(3) \quad \delta x_\varrho = \delta' x_\varrho + \delta'' x_\varrho, \quad \delta y_\varrho = \delta' y_\varrho + \delta'' y_\varrho, \quad \delta z_\varrho = \delta' z_\varrho + \delta'' z_\varrho$$

1) Zum folgenden vgl. man Cauchy, Exercices de Math. Vol. 2 (1827) p. 42, Green (1837) Mathem. Papers, p. 243, Mc' Cullagh (1839) Works, p. 145, W. Thomson (Lord Kelvin) (1856) Mathem. and phys. Papers III, p. 84, Stokes (1862) Mathem. and physical Papers IV, p. 157 und die Darstellung in nachstehenden Lehrbüchern: Thomson u. Tait, Treatise on natural philosophy Vol. 2 (Art. 658—674), Kirchhoff, Mechanik, Helmholtz, Vorlesungen über mathematische Physik Bd. 2, Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. 2.

und:

$$\delta W = \delta' W + \delta'' W, \tag{4}$$

wenn wir:

$$\begin{cases} \delta' W = \sum \{ X_\varrho \, \delta' x_\varrho + Y_\varrho \, \delta' y_\varrho + Z_\varrho \, \delta' z_\varrho \}, \\ \delta'' W = \sum \{ X_\varrho \, \delta'' x_\varrho + Y_\varrho \, \delta'' y_\varrho + Z_\varrho \, \delta'' z_\varrho \} \end{cases} \tag{5}$$

setzen. Wir legen hierbei die Variationen $\delta' x_\varrho$, $\delta' y_\varrho$, $\delta' z_\varrho$ durch die folgenden Gleichungen fest:

$$\begin{cases} \delta' x_\varrho = (p_{11} x_\varrho + p_{12} y_\varrho + p_{13} z_\varrho) \tau, \\ \delta' y_\varrho = (p_{21} x_\varrho + p_{22} y_\varrho + p_{23} z_\varrho) \tau, \\ \delta' z_\varrho = (p_{31} x_\varrho + p_{32} y_\varrho + p_{33} z_\varrho) \tau, \end{cases} \tag{6}$$

in denen:

$$p_{12} = p_{21}, \quad p_{13} = p_{31}, \quad p_{23} = p_{32} \tag{7}$$

anzunehmen ist.

Der aufgestellte Arbeitsausdruck $\delta' W$ hat aber nur dann Sinn, wenn die Kräftekomponenten X_ϱ, Y_ϱ, Z_ϱ sich bei der Deformation nur unmerklich ändern. Erfahren aber diese Komponenten, während sich die Koordinaten x_ϱ, y_ϱ, z_ϱ um $\delta' x_\varrho$, $\delta' y_\varrho$, $\delta' z_\varrho$ vermehren, eine bedeutende Änderung, wie wir es jetzt annehmen wollen, so sind diese Variationen $\delta' x_\varrho$, $\delta' y_\varrho$, $\delta' z_\varrho$ in so kleine Elemente $d\,\delta' x_\varrho$, $d\,\delta' y_\varrho$, $d\,\delta' z_\varrho$ zu zerlegen, daß für diese sehr kleinen Elemente der Koordinatenänderungen die zugehörigen Änderungen der Kraftkomponenten vernachlässigt werden können und man demgemäß das zugehörige Inkrement des Arbeitsausdruckes setzen kann:

$$d\,\delta' W = \sum (X_\varrho \, d\,\delta' x_\varrho + Y_\varrho \, d\,\delta' y_\varrho + Z_\varrho \, d\,\delta' z_\varrho).$$

Wir können nun nach (6) annehmen:

$$\begin{cases} d\,\delta' x_\varrho = d(p_{11}\tau) x_\varrho + d(p_{12}\tau) y_\varrho + d(p_{13}\tau) z_\varrho, \\ d\,\delta' y_\varrho = d(p_{21}\tau) x_\varrho + d(p_{22}\tau) y_\varrho + d(p_{23}\tau) z_\varrho, \\ d\,\delta' z_\varrho = d(p_{31}\tau) x_\varrho + d(p_{32}\tau) y_\varrho + d(p_{33}\tau) z_\varrho \end{cases} \tag{8}$$

und erhalten demnach:

$$\begin{aligned} d\,\delta' W = {} & P_{11} \, d(p_{11}\tau) + P_{22} \, d(p_{22}\tau) + P_{33} \, d(p_{33}\tau) \\ & + P_{23} \, d(p_{23}\tau) + P_{31} \, d(p_{31}\tau) + P_{12} \, d(p_{12}\tau), \end{aligned} \tag{9}$$

wenn wir setzen:

$$\begin{cases} P_{11} = \Sigma X_\varrho x_\varrho, & P_{23} = P_{32} = \Sigma (Z_\varrho y_\varrho + Y_\varrho z_\varrho), \\ P_{22} = \Sigma Y_\varrho y_\varrho, & P_{31} = P_{13} = \Sigma (X_\varrho z_\varrho + Z_\varrho x_\varrho), \\ P_{33} = \Sigma Z_\varrho z_\varrho, & P_{12} = P_{21} = \Sigma (Y_\varrho x_\varrho + X_\varrho y_\varrho). \end{cases} \tag{10}$$

Das Kräftesystem, das wir hier betrachten, soll nun aber nicht von der Deformation, für welche seine Arbeit berechnet wird, unabhängig sein, es soll vielmehr in einer funktionalen Abhängigkeit von dieser Deformation stehen, und zwar soll es, wenn das Massensystem, an dem die Kräfte angreifen sollen, gegeben vorliegt, durch die Deformation in eindeutiger Weise bestimmt sein. Die durch die vorstehenden Formeln (10) eingeführten Größen P_{ij} sind dann Funktionen der Größen $p_{ij}\tau$, und der durch die Gleichung (9) definierte Differentialausdruck ist außer von der Struktur des Massensystems nur von den Größen $p_{ij}\tau$ und ihren Differentialen abhängig.

Es ist aber keineswegs von vornherein ausgemacht, daß $d\,\delta' W$ selbst ein vollständiges Differential ist. Wenn wir dies trotzdem annehmen, so liegt darin eine willkürliche, obschon zweckmäßige Festsetzung. Wir wollen zusehen, was aus dieser Annahme folgt. Wenn wir die schließliche Deformation allmählich herbeiführen, indem wir die schließlichen Änderungen der Koordinaten $\delta' x_\varrho$, $\delta' y_\varrho$, $\delta' z_\varrho$ aus Differentialen $d\,\delta' x_\varrho$, $d\,\delta' y_\varrho$, $d\,\delta' z_\varrho$ zusammensetzen, so erhalten wir den zugehörigen Arbeitsausdruck als ein Integral

$$\int d\,\delta' W. \tag{11}$$

Wenn nun unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential steht, so hängt der Wert des Integrals nur von den Anfangs- und Endwerten der veränderlichen Größen ab, in unserem Falle also von dem undeformierten oder, wie wir sagen, natürlichen Zustande des Massensystems, den wir als fest gegeben ansehen, und dem schließlichen Deformationszustande. Es hängt die Deformationsarbeit aber nicht davon ab, auf welche Weise das System aus seinem natürlichen in den deformierten Zustand gebracht wird. Die Deformationsarbeit ist lediglich eine Funktion des erreichten Endzustandes.

Wir denken uns jetzt die Größen P_{ij} als Funktionen von $p_{11}\tau$, $p_{12}\tau$ .. nach Potenzen dieser Größen, d. h. nach Potenzen von τ entwickelt. Wir haben nun immer vorausgesetzt und tun es auch hier, daß τ eine sehr kleine Größe bedeutet. Wir können deshalb in der Reihenentwicklung alle höheren Potenzen gegen die niedrigste vorkommende Potenz von τ vernachlässigen. Würde die Reihenentwicklung ein konstantes Glied enthalten, so würden gegen dieses alle Glieder, die τ enthalten, zu vernachlässigen, die P_{ij} also überhaupt Konstante sein. Da wir dies nicht annehmen wollten, so werden wir uns auf die erste Potenz von τ und damit auch auf die ersten Potenzen von $p_{11}\tau$, $p_{12}\tau$ ... beschränken können und setzen demgemäß die folgenden Gleichungen für die P_{ij} an:

$$(12)\begin{cases}P_{11} = -(\alpha_{11}p_{11} + \alpha_{12}p_{22} + \alpha_{13}p_{33} + \alpha_{14}p_{23} + \alpha_{15}p_{31} + \alpha_{16}p_{12})\tau,\\ P_{22} = -(\alpha_{21}p_{11} + \alpha_{22}p_{22} + \alpha_{23}p_{33} + \alpha_{24}p_{23} + \alpha_{25}p_{31} + \alpha_{26}p_{12})\tau,\\ P_{33} = -(\alpha_{31}p_{11} + \alpha_{32}p_{22} + \alpha_{33}p_{33} + \alpha_{34}p_{23} + \alpha_{35}p_{31} + \alpha_{36}p_{12})\tau,\\ P_{23} = -(\alpha_{41}p_{11} + \alpha_{42}p_{22} + \alpha_{43}p_{33} + \alpha_{44}p_{23} + \alpha_{45}p_{31} + \alpha_{46}p_{12})\tau,\\ P_{31} = -(\alpha_{51}p_{11} + \alpha_{52}p_{22} + \alpha_{53}p_{33} + \alpha_{54}p_{23} + \alpha_{55}p_{31} + \alpha_{56}p_{12})\tau,\\ P_{12} = -(\alpha_{61}p_{11} + \alpha_{62}p_{22} + \alpha_{63}p_{33} + \alpha_{64}p_{23} + \alpha_{65}p_{31} + \alpha_{66}p_{12})\tau,\end{cases}$$

wo die Minuszeichen in Rücksicht auf das Folgende vorgesetzt sind.

Es muß an dieser Stelle bemerkt werden, daß die Gründe, die uns zu dem vorstehenden Ansatze für die Größen P_{ij} geführt haben, keineswegs zwingend sind. In der Tat wäre es ja möglich, daß die benutzte Entwicklung nach Potenzen von τ mit einer höheren als der ersten Potenz begänne, und der Ansatz, den wir gemacht haben, läßt sich sonach nur dadurch rechtfertigen, daß er unter den verschiedenen sich eröffnenden Möglichkeiten den nächstliegenden und einfachsten Fall darstellt. Es ist angebracht, das Willkürliche, das in der von uns gemachten Annahme liegt, dadurch zum Ausdruck zu bringen, daß wir sie auf eine bestimmt formulierte Voraussetzung gründen. Diese Voraussetzung ist die, daß, wenn die Deformationsgrößen p_{ij} alle in demselben Verhältnisse vergrößert werden, die Spannungsgrößen P_{ij} sich in dem gleichen Verhältnisse vergrößern. Dies ist sonach die zweite Voraussetzung, die wir machen. Sie ist unter dem Namen des Hookeschen Gesetzes bekannt.

Aus den Gleichungen (12) leiten wir gemäß (9) das Differential $d\,\delta' W$ des Arbeitsausdruckes ab, indem wir die Gleichungen der Reihe nach mit $d(p_{11}\tau)$, $d(p_{22}\tau)$ ... multiplizieren und addieren. Es muß dann der die rechte Seite der entstehenden Gleichung bildende Ausdruck das totale Differential einer quadratischen Form der $p_{ij}\tau$ sein. Z. B. ist das erste Glied $-\alpha_{11}p_{11}\tau\, d(p_{11}\tau)$ das Differential von $-\frac{1}{2}\alpha_{11}(p_{11}\tau)^2$. Die zwei Glieder

$$-\{\alpha_{12}p_{22}\tau\, d(p_{11}\tau) + \alpha_{21}p_{11}\tau\, d(p_{22}\tau)\}$$

müssen sich aber, damit sie zu dem vollständigen Differential einer quadratischen Form gehören, vereinigen lassen zu:

$$-\alpha_{12}\, d(p_{11}\tau\cdot p_{22}\tau).$$

Es ergibt sich also $\alpha_{21} = \alpha_{12}$ und allgemein:

$$(13)\qquad \alpha_{ji} = \alpha_{ij} \qquad (i, j = 1, 2 \ldots 6).$$

Diese fünfzehn Relationen treten noch zu dem Ansatze (12) hinzu.

Wir wollen jetzt die Integration ausführen. Dies ist sofort geschehen, denn führen wir für die quadratische Form, deren

Differential auf der rechten Seite der erörterten Gleichung entsteht, eine einfache Bezeichnung ein, indem wir setzen:

$$(14)\quad \Phi = \alpha_{11} p_{11}^2 + 2\alpha_{12} p_{11} p_{22} + \cdots + 2\alpha_{56} p_{12} p_{13} + \alpha_{66} p_{12}^2,$$

so wird nach (9):

$$d\,\delta' W = -\tfrac{1}{2} d(\Phi \tau^2),$$

und da mit der Deformation, also für $\tau = 0$, auch die Deformationsarbeit verschwinden muß, ergibt sich weiter:

$$(15)\qquad \delta' W = -\tfrac{1}{2} \Phi \tau^2.$$

Wir fügen nun die dritte Voraussetzung hinzu, daß die Deformationsarbeit immer negativ ist. Dann muß der Wert von Φ immer positiv ausfallen, welches auch die Werte der Variabeln, p_{ij}, sind, und kann nur verschwinden, wenn alle Variabeln verschwinden, d. h. Φ muß eine vollständige positive Form sein. Wir bezeichnen den entgegengesetzten Wert F von $\delta' W$, also den Ausdruck:

$$(16)\qquad F = \tfrac{1}{2} \Phi \tau^2,$$

als die potentielle Energie des Massensystems, dann ist auch diese potentielle Energie eine stets positive Größe, die nur für den natürlichen, undeformierten Zustand des Massensystems verschwindet.

Wir hatten den sehr kleinen Faktor τ den Größen p_{ij} beigefügt, weil die durch die Gleichungen (6) definierten Koordinatenänderungen sehr klein sein sollten und wir die Koeffizienten in diesen Gleichungen auf endliche Dimensionen bringen wollten. Wir nehmen nun weiterhin an, daß die Koordinatenänderungen klein seien gegen die Dimensionen des Massensystems, aber von einer Größenordnung, die der Messung noch zugänglich ist. In der Tat sind die zuletzt abgeleiteten Formeln nicht davon abhängig, daß nur unendlich kleine Koordinatenänderungen in Betracht gezogen werden. Wenn nun die Größen $p_{ij}\tau$ meßbare Werte haben, so wollen wir die bisherige Bezeichnung ändern und setzen:

$$(17)\quad \begin{cases} p_{11}\tau = x_x, \quad p_{22}\tau = y_y, \quad p_{33}\tau = z_z, \\ 2p_{23}\tau = y_z = z_y, \quad 2p_{31}\tau = z_x = x_z, \quad 2p_{12}\tau = x_y = y_x. \end{cases}$$

Dann läßt sich die potentielle Energie schreiben wie folgt:

$$(18)\quad F = \tfrac{1}{2}\{\alpha_{11} x_x^2 + 2\alpha_{12} x_x y_y + \cdots + \tfrac{1}{2}\alpha_{56} x_y x_z + \tfrac{1}{4}\alpha_{66} x_y^2\}.$$

Den Gleichungen (12) zufolge wird:

$$(19)\quad P_{11} = -\frac{\partial F}{\partial x_x}, \quad P_{22} = -\frac{\partial F}{\partial y_y}, \cdots P_{31} = -2\frac{\partial F}{\partial z_x}, \quad P_{12} = -2\frac{\partial F}{\partial x_y},$$

und wir finden ferner, indem wir in die Gleichungen (12) uns $x_x, y_y \ldots$ eingeführt denken, sie dann mit $x_x, y_y \ldots x_y$ multiplizieren und addieren:

$$(20)\qquad P_{11} x_x + P_{22} y_y + \cdots + \tfrac{1}{2} P_{31} z_x + \tfrac{1}{2} P_{12} x_y = -2F.$$

Kehren wir nun zu dem ursprünglichen Ausgangspunkt zurück, der durch die Formeln (4) und (5) bezeichnet ist. Wir hatten den Ausdruck für die Arbeit eines Kräftesystems bei einer Deformation in zwei Teile zerlegt, von denen der erste von der reinen Deformation herrühren, der zweite aber sich auf eine mit der reinen Deformation verbundene Schraubung beziehen soll. Wir mußten dann den ersten Teil umformen, weil die Kräfte des Kräftesystems nicht bei der Deformation als unverändert angesehen werden, vielmehr erst durch die Deformation entstehen sollten. Das Resultat der Umformung faßt sich nach den hinzugenommenen Voraussetzungen in die einfache Formel zusammen:

$$\delta' W = -F. \tag{21}$$

Wir müßten nun aus denselben Gründen auch den zweiten Teil des Arbeitsausdruckes umformen. Hier schneiden wir aber die Frage ab, indem wir die vierte Voraussetzung machen, daß die Arbeit, welche die Deformationskräfte bei irgendwelcher mit der Deformation verbundenen Schraubung leisten, verschwindet, daß also stets:

$$\delta'' W = 0 \tag{22}$$

wird. Dies erreichen wir, wenn wir für die bei irgendeinem Deformationszustande vorhandenen Kräfte die Voraussetzungen machen:

$$\tag{23}\left\{\begin{array}{lll} \sum X_\varrho = 0, & \sum Y_\varrho = 0, & \sum Z_\varrho = 0, \\ \sum (Z_\varrho y_\varrho - Y_\varrho z_\varrho) = 0, & \sum (X_\varrho z_\varrho - Z_\varrho x_\varrho) = 0, & \sum (Y_\varrho x_\varrho - Y_\varrho y_\varrho) = 0. \end{array}\right.$$

Diese Kräfte sollen also stets im statischen Gleichgewichte sein. Wir wollen ein Kräftesystem, wie es hier vorliegt, als ein Spannungssystem bezeichnen. Wir können dann die Bedingungen, denen ein solches Spannungssystem zu genügen hat, indem wir die vorstehenden Gleichungen mit (10) und (19) zusammenhalten, folgendermaßen formulieren:

$$\tag{24}\left\{\begin{array}{lll} \sum X_\varrho = 0, & \sum X_\varrho x_\varrho = -\frac{\partial F}{\partial x_x}, & \sum Z_\varrho y_\varrho = \sum Y_\varrho z_\varrho = -\frac{\partial F}{\partial y_z}, \\ \sum Y_\varrho = 0, & \sum Y_\varrho y_\varrho = -\frac{\partial F}{\partial y_y}, & \sum X_\varrho z_\varrho = \sum Z_\varrho x_\varrho = -\frac{\partial F}{\partial z_x}, \\ \sum Z_\varrho = 0, & \sum Z_\varrho z_\varrho = -\frac{\partial F}{\partial z_z}, & \sum Y_\varrho x_\varrho = \sum X_\varrho y_\varrho = -\frac{\partial F}{\partial x_y}. \end{array}\right.$$

So wird das Spannungssystem, wenn man es sich durch seine astatischen Koordinaten festgelegt denkt, auf die Kenntnis einer quadratischen Form der Deformationskoordinaten, nämlich der potentiellen Energie F, zurückgeführt.

Wir wollen jetzt auch die Bezeichnung der Koordinaten des Spannungssystems ändern, indem wir:

$$(25)\quad \begin{cases} P_{11} = X_x, & P_{22} = Y_y, & P_{33} = Z_z, \\ \frac{1}{2} P_{23} = Z_y = Y_z, & \frac{1}{2} P_{31} = X_z = Z_x, & \frac{1}{2} P_{12} = Y_x = X_y \end{cases}$$

machen, so daß wir zu einer Bezeichnung gelangen, die der früheren Bezeichnung der astatischen Koordinaten nahe verwandt ist. Die Gleichung (20) wird dann:

$$X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z + Y_z y_z + Z_x z_x + X_y x_y = -2F.$$

Als die Komponente des Spannungssystems nach einer bestimmten Richtung bezeichnen wir entsprechend dem, was wir in der Astatik festgesetzt haben, das System der nach dieser Richtung genommenen Komponenten aller Spannungskräfte. Wird die Richtung durch die Winkel α, β, γ, die sie mit den positiven Koordinatenrichtungen einschließt, festgelegt, so wird der Ausdruck für die nach ihr genommene Komponente R_ϱ der ϱ^{ten} Spannungskraft, deren Angriffspunkt die Koordinaten $x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho$ hat:

$$R_\varrho = X_\varrho \cos\alpha + Y_\varrho \cos\beta + Z_\varrho \cos\gamma.$$

Die Komponenten hiervon nach den Koordinatenrichtungen sind dann

$$R_\varrho \cos\alpha, \quad R_\varrho \cos\beta, \quad R_\varrho \cos\gamma.$$

Das System der Komponenten R_ϱ ist, weil nach den drei ersten Gleichungen (23) $\Sigma R_\varrho = 0$ wird, einem Kräftepaar astatisch äquivalent. Wir bezeichnen mit X, Y, Z die Komponenten der einen Kraft dieses Paares, mit a, b, c die Projektionen seines Armes auf die Koordinatenachsen, dann ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$(26)\begin{cases} Xa = \sum R_\varrho \cos\alpha \cdot x_\varrho, & Xb = \sum R_\varrho \cos\alpha \cdot y_\varrho, & Xc = \sum R_\varrho \cos\alpha \cdot z_\varrho \\ Ya = \sum R_\varrho \cos\beta \cdot x_\varrho, & Yb = \sum R_\varrho \cos\beta \cdot y_\varrho, & Yc = \sum R_\varrho \cos\beta \cdot z_\varrho \\ Za = \sum R_\varrho \cos\gamma \cdot x_\varrho, & Zb = \sum R_\varrho \cos\gamma \cdot y_\varrho, & Zc = \sum R_\varrho \cos\gamma \cdot z_\varrho \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort:

$$X : Y : Z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma,$$

d. h. die Kräfte des Paares sind der Richtung, nach der die Komponenten genommen sind, parallel. Macht man nun:

$$(27)\qquad X = R\cos\alpha, \quad Y = R\cos\beta, \quad Z = R\cos\gamma,$$

so ergeben die Gleichungen (26):

$$(28)\qquad Ra = \sum R_\varrho x_\varrho, \quad Rb = \sum R_\varrho y_\varrho, \quad Rc = \sum R_\varrho z_\varrho.$$

Es wird aber nach (24), (19) und (25):

$$(29)\quad \begin{cases} \sum R_\varrho x_\varrho = X_x \cos\alpha + Y_x \cos\beta + Z_x \cos\gamma, \\ \sum R_\varrho y_\varrho = X_y \cos\alpha + Y_y \cos\beta + Z_y \cos\gamma, \\ \sum R_\varrho z_\varrho = X_z \cos\alpha + Y_z \cos\beta + Z_z \cos\gamma. \end{cases}$$

Wir führen nun das astatische Moment des Kräftepaares ein:

$$(30)\qquad P = R \cdot r,$$

indem wir mit r die Länge seines Armes bezeichnen. Nennen wir noch λ, μ, ν die Winkel, welche die Richtung des Armes mit den Koordinatenachsen bildet, so wird:

$$(31)\qquad a = r\cos\lambda, \quad b = r\cos\mu, \quad c = r\cos\nu$$

und somit können die Gleichungen (28) mit Rücksicht auf (29) geschrieben werden:

$$(32)\quad \begin{cases} P\cos\lambda = X_x \cos\alpha + Y_x \cos\beta + Z_x \cos\gamma, \\ P\cos\mu = X_y \cos\alpha + Y_y \cos\beta + Z_y \cos\gamma, \\ P\cos\nu = X_z \cos\alpha + Y_z \cos\beta + Z_z \cos\gamma. \end{cases}$$

Wir wollen diese Gleichungen geometrisch zu interpretieren suchen. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$(33)\qquad \cos\alpha = \mathfrak{x}, \quad \cos\beta = \mathfrak{y}, \quad \cos\gamma = \mathfrak{z},$$

woraus:

$$(33\text{a})\qquad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1$$

folgt, und machen ferner:

$$(34)\qquad U = P\cos\lambda, \quad V = P\cos\mu, \quad W = P\cos\nu,$$

dann werden die Gleichungen (32):

$$(32\text{a})\quad \begin{cases} U = X_x \mathfrak{x} + Y_x \mathfrak{y} + Z_x \mathfrak{z}, \\ V = X_y \mathfrak{x} + Y_y \mathfrak{y} + Z_y \mathfrak{z}, \\ W = X_z \mathfrak{x} + Y_z \mathfrak{y} + Z_z \mathfrak{z}. \end{cases}$$

Deuten wir hierin $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als Punktkoordinaten, U, V, W aber als Koordinaten der Ebene, die durch die Gleichung:

$$(35)\qquad Ux + Vy + Wz = 1$$

festgelegt wird, dann haben die vorstehenden Gleichungen, da:

$$Y_x = X_y, \quad Z_x = X_z, \quad Z_y = Y_z$$

ist, die einfache Bedeutung, daß die Ebene π mit den Koordinaten U, V, W die Polarebene des Punktes S mit den Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ist bezüglich der Fläche zweiter Ordnung, die durch die Gleichung:

$$(36) \qquad X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2 Y_z yz + 2 Z_x zx + 2 X_y xy = 1$$

gegeben wird und die wir als die Spannungsfläche bezeichnen.

Bringen wir aber die Ebenengleichung (35) auf die Normalform, so ergibt sich mit Rücksicht auf (34):

$$(35\text{a}) \qquad \cos\lambda x + \cos\mu y + \cos\nu z = p,$$

wenn wir noch:

$$(35\text{b}) \qquad p = \frac{1}{P}$$

setzen. So finden wir, wenn wir U, V, W als die Komponenten eines von dem Mittelpunkte der Spannungsfläche ausgehenden Vektors deuten, daß dieser Vektor auf der Polarebene des zugehörigen Punktes S bezüglich der Spannungsfläche senkrecht steht und seine Länge dem Abstande des Mittelpunktes von der Polarebene umgekehrt proportional ist. Den Punkt S nehmen wir hierbei auf der mit der Spannungsfläche konzentrischen Kugel mit den Radius 1, die durch (33a) gegeben wird, an.

Die Länge des Vektors geht noch aus einer anderen Fläche zweiter Ordnung hervor, zu der wir auf folgende Art gelangen. Wir quadrieren und addieren die Gleichungen (32), so erhalten wir mit Rücksicht auf (33):

$$(37) \qquad P^2 = (X_x\mathfrak{x} + Y_x\mathfrak{y} + Z_x\mathfrak{z})^2 + (X_y\mathfrak{x} + Y_y\mathfrak{y} + Z_y\mathfrak{z})^2 + (X_z\mathfrak{x} + Y_z\mathfrak{y} + Z_z\mathfrak{z})^2.$$

Machen wir hierin:

$$(38) \qquad \mathfrak{x} = Px, \quad \mathfrak{y} = Py, \quad \mathfrak{z} = Pz,$$

so geht die Gleichung über in:

$$(39) \qquad (X_x x + Y_x y + Z_x z)^2 + (X_y x + Y_y y + Z_y z)^2 + (X_z x + Y_z y + Z_z z)^2 = 1.$$

Das durch diese Gleichung dargestellte Ellipsoid wollen wir als Elastizitätsellipsoid bezeichnen. Aus den Gleichungen (38) folgt nun mit Rücksicht auf (33a):

$$(40) \qquad \frac{1}{P^2} = x^2 + y^2 + z^2$$

und da nach (38) und (33) ferner:

$$(40\text{a}) \qquad x : y : z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

wird, finden wir: Die zu einer bestimmten Richtung gehörende Größe P ist gleich dem reziproken Werte von dem in diese Richtung fallenden Radiusvektor des Elastizitätsellipsoids. Denn in den Formeln (40) und (40a) sind x, y, z die Koordinaten eines Punktes auf dem Elastizitätsellipsoide, $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ also die Länge des Radiusvektor, der aus dem Mittelpunkte nach diesem Flächenpunkte hinführt, und α, β, γ die Winkel, die er mit den Koordinatenachsen bildet.

Die Gleichung (39) geht aus der Gleichung:

$$U^2+V^2+W^2=1,$$

d. h. der Tangentialgleichung der Einheitskugel, die in Punktkoordinaten durch die Gleichung (33a) gegeben wird, hervor durch die Substitution (32a). Das Elastizitätsellipsoid ist also der Einheitskugel reziprok zugeordnet bezüglich der Spannungsfläche, indem es von den Polen der die Einheitskugel umhüllenden Ebenen erfüllt wird.

Wir können jetzt leicht die Richtungen bestimmen, für welche wir ein gestrecktes Kräftepaar bekommen, d. h. für welche die Kräfte des Kräftepaares in die Richtung des Armes fallen, und welche wir als die Hauptrichtungen des Spannungssystems bezeichnen. In diesem Falle muß:

$$\lambda=\alpha, \quad \mu=\beta, \quad \nu=\gamma$$

werden, und wenn wir der Einfachheit wegen die Bezeichnungen (33) beibehalten, so erhalten wir aus (32) die Gleichungen:

$$(41) \qquad \begin{cases} (X_x-P)\,\mathfrak{x}+Y_x\mathfrak{y}+Z_x\mathfrak{z}=0, \\ X_y\mathfrak{x}+(Y_y-P)\,\mathfrak{y}+Z_y\mathfrak{z}=0, \\ X_z\mathfrak{x}+Y_z\mathfrak{y}+(Z_z-P)\,\mathfrak{z}=0, \end{cases}$$

aus denen zur Bestimmung von P die Gleichung dritten Grades folgt:

$$(41\text{a}) \qquad \begin{vmatrix} X_x-P & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y-P & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z-P \end{vmatrix}=0.$$

Diese Gleichungen sind aber dieselben, die sich zur Bestimmung der Hauptachsen für die Spannungsfläche (36) ergeben. Es fallen also die Hauptrichtungen des Spannungssystems mit den Hauptachsen der Spannungsfläche zusammen.

Nennen wir die Wurzeln der Gleichung (41) P_1, P_2, P_3, so wird die Gleichung der Spannungsfläche, auf die Hauptachsen bezogen:

$$(42) \qquad P_1x^2+P_2y^2+P_3z^2=1,$$

die Gleichung des Elastizitätsellipsoides aber wird in demselben Koordinatensystem:

$$(43) \qquad P_1^2 x^2 + P_2^2 y^2 + P_3^2 z^2 = 1.$$

Die Größen P_1, P_2, P_3, die wir als die Hauptspannungen bezeichnen, sind die reziproken Werte von den Halbachsen dieses Ellipsoides. Vergleichen wir die Gleichung (42) mit (36), so sehen wir, daß in diesem neuen Koordinatensystem die Koordinaten des Spannungssystems folgende sind:

$$(44) \quad X_x = P_1,\ Y_y = P_2,\ Z_z = P_3,\ Y_z = Z_y = 0,\ Z_x = X_z = 0,\ X_y = Y_x = 0.$$

Die drei gestreckten Kräftepaare, welche die Komponenten des Spannungssystems nach seinen Hauptrichtungen darstellen, ersetzen aber zusammengenommen das Spannungssystem. Denn wenn wir das neue Koordinatensystem zugrunde legen, so sind für diese Kräftepaare die in den Formeln (26) vorkommenden 9 Größen alle bis auf eine Null. Die von Null verschiedene Koordinate ist zuerst $Xa = P_1$, dann $Yb = P_2$, endlich $Zc = P_3$. Nimmt man die drei Kräftepaare zusammen, addiert also nach den Regeln, die für die Vereinigung astatischer Kräftesysteme gelten, ihre homologen Koordinaten, so erhält man genau die vorstehenden Koordinaten des Spannungssystems, womit der Satz bewiesen ist.

Wir wollen noch bemerken, daß die Kräfte eines der gestreckten Kräftepaare voneinander weggerichtet sind, wenn die zugehörige Hauptspannung P positiv ist. Wir sprechen dann von einer Zugspannung. Dagegen sind die Kräfte aufeinander zugerichtet, wenn die zugehörige Hauptspannung negativ ist. Wir reden dann von einer Druckspannung. Den Armen der Kräftepaare geben wir der Einfachheit wegen die Länge Eins, dann werden die Hauptspannungen den Kräften der zugehörigen Kräftepaare gleich, und wir können sagen: Jedes Spannungssystem läßt sich ersetzen durch sechs Kräfte, die einander paarweise entgegengesetzt gleich sind und in die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte fallen. Die Länge dieser drei Verbindungsstrecken soll Eins betragen und ihre Richtungen sollen zueinander normal sein. Dann stellen die Kräfte paarweise die Hauptspannungen des Spannungssystems dar, und diese Hauptspannungen sind Zugspannungen, wenn die Kräfte des Paares voneinander weg-, sie sind Druckspannungen, wenn die Kräfte aufeinander zugerichtet sind.

Wir können die Komponenten des Spannungssystems, statt auf eine Linienrichtung, auch auf eine Ebenenstellung beziehen, die senkrecht zu der Linienrichtung steht, und definieren dann als die Spannungskraft für eine Ebene von der betreffenden Stellung den Vektor, dessen Länge P und Richtungswinkel λ, μ, ν durch die Gleichungen (32) festgelegt werden, wenn α, β, γ die Richtungswinkel der Ebenennormalen sind. Um genauer zu sprechen, wird durch die Kosinus der Richtungswinkel α, β, γ eine bestimmte Seite der Ebene charakterisiert (nämlich die Seite, nach welcher hin die durch diese Richtungswinkel gegebene Normale weist), und die Spannungskraft bezieht sich auf diese Seite der Ebene, während sich für die andere Seite der Ebene der entgegengesetzte Vektor ergibt. Für jede Ebene resultieren so zwei einander entgegengesetzte Vektoren, die zusammen die Spannung für die Ebene und für jede Ebene von derselben Stellung repräsentieren.

Die Ausdrücke für die Komponenten U, V, W des Spannungsvektors wollen wir noch unter der Voraussetzung geben, daß das Spannungssystem durch seine Hauptspannungen und entsprechend die Ebenenstellung, zu der der Spannungsvektor gehört, durch die Winkel $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, welche die Ebenennormale mit den Hauptrichtungen des Spannungssystems bildet, festgelegt wird. Dann nämlich ergibt sich gemäß (44) aus (32) für die nach diesen Hauptrichtungen genommenen Komponenten S_1, S_2, S_3 des Spannungsvektors:

$$(45) \qquad S_1 = P_1 \cos\sigma_1, \quad S_2 = P_2 \cos\sigma_2, \quad S_3 = P_3 \cos\sigma_3.$$

Wenn nun die Hauptrichtungen mit den Achsen des beliebigen Koordinatensystems, auf das sich die Komponenten U, V, W des Spannungsvektors beziehen, der Reihe nach die Winkel bilden:

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \quad \lambda_2, \mu_2, \nu_2; \quad \lambda_3, \mu_3, \nu_3,$$

wobei sich z. B. λ_1, μ_1, ν_1 auf die erste Hauptrichtung beziehen, dann finden wir:

$$(46) \qquad \begin{cases} U = P_1 \cos\sigma_1 \cos\lambda_1 + P_2 \cos\sigma_2 \cos\lambda_2 + P_3 \cos\sigma_3 \cos\lambda_3, \\ V = P_1 \cos\sigma_1 \cos\mu_1 + P_2 \cos\sigma_2 \cos\mu_2 + P_3 \cos\sigma_3 \cos\mu_3, \\ W = P_1 \cos\sigma_1 \cos\nu_1 + P_2 \cos\sigma_2 \cos\nu_2 + P_3 \cos\sigma_3 \cos\nu_3. \end{cases}$$

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Tensoren.

Die reinen Deformationen zeigen eine gewisse Analogie zu den Schraubungen. Bei beiden handelt es sich um sehr kleine Verschiebungen der Punkte des Raumes, und hier wie dort sind die Komponenten dieser Verschiebung lineare Funktionen von den Koordinaten des betreffenden Punktes. Den Deformationen und Schraubungen als kinematischen Größen stehen die Spannungen und Dynamen als dynamische Größen gegenüber, und auch diese erweisen sich in gewissem Sinne als analog. Zur Festlegung aller der genannten Größenarten sind sechs Koordinaten erforderlich. Die kinematischen und dynamischen Größen stehen in der Beziehung kontragredienter Größen zueinander und werden beidemal durch einen bilinearen Ausdruck miteinander verknüpft, der das eine Mal lautet:

$$(1) \qquad \mathrm{Xu} + \mathrm{Yv} + \mathrm{Zw} + \mathrm{Lp} + \mathrm{Mq} + \mathrm{Nr},$$

das andere Mal:

$$(2) \qquad X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z + Y_z y_z + Z_x z_x + X_y x_y.$$

Wie nun die Schraubungen und Dynamen auf einen gemeinsamen Träger, die Schrauben, bezogen werden, so kann man auch den Deformationen und Spannungen einen gemeinsamen Begriff zugrunde legen, der von der kinematischen oder dynamischen Färbung befreit ist und eine rein geometrische Bedeutung hat. Diesen Begriff bezeichnen wir mit dem Worte Tensor.[1]) Auf Grund desselben läßt sich eine Disziplin entwickeln, welche der oben ausgeführten Schraubentheorie analog ist, aber eine erschöpfende Darstellung dieser Disziplin würde den Rahmen dieses Buches weit überschreiten. Wir müssen uns daher mit einigen kurzen Andeutungen begnügen, die hinreichen, um das Charakteristische einer solchen Geometrie der Tensoren hervortreten zu lassen.

---

1) Das Wort ist in einer etwas abweichenden Bedeutung durch Abraham, Enzyklopädie der math. Wiss., Bd. IV 2, p. 1, in Anlehnung an Gibbs' „Right Tensor" (Vector analysis, New-Haven, 1884), eingebürgert worden, während Voigt für denselben Begriff das Wort „Tensortripel" gebraucht (vgl. Göttinger Nachrichten 1900, p. 117, ebenda 1904, p. 495).

Der Tensor wird wie die Schraube analytisch festgelegt durch die Verhältnisse von sechs Größen, d. h. durch sechs Koordinaten, die nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind. Wir wollen dieselben bezeichnen mit

$$\mathfrak{a}_{11},\quad \mathfrak{a}_{22},\quad \mathfrak{a}_{33},\quad \mathfrak{a}_{23}=\mathfrak{a}_{32},\quad \mathfrak{a}_{31}=\mathfrak{a}_{13},\quad \mathfrak{a}_{12}=\mathfrak{a}_{21}$$

und ihnen noch den Ausdruck:

$$(3)\qquad \mathfrak{a}=\sqrt{\mathfrak{a}_{11}^{\,2}+\mathfrak{a}_{22}^{\,2}+\mathfrak{a}_{33}^{\,2}+2\mathfrak{a}_{23}^{\,2}+2\mathfrak{a}_{31}^{\,2}+2\mathfrak{a}_{12}^{\,2}}$$

hinzufügen. Dann sind die Koordinaten einer Deformation, die zu dem durch diese Koordinaten festgelegten Tensor gehört, von der Form:

$$(4)\qquad x_x=\tau\cdot\frac{\mathfrak{a}_{11}}{\mathfrak{a}},\quad y_y=\tau\cdot\frac{\mathfrak{a}_{22}}{\mathfrak{a}}\cdots x_y=2\tau\cdot\frac{\mathfrak{a}_{12}}{\mathfrak{a}}.$$

Hierbei wird:

$$(5)\qquad \tau^2=x_x^{\,2}+y_y^{\,2}+\cdots+\tfrac{1}{2}x_y^{\,2}.$$

Wir wollen diese Größe τ in Analogie zu früherem die Amplitude der Deformation nennen. Dann ist der folgende Satz leicht zu beweisen: Bei Deformationen, die zu demselben Tensor gehören, sind die Verschiebungen aller Punkte gleichgerichtet und stehen der Größe nach alle in demselben Verhältnisse. Dieses Verhältnis wird durch das Verhältnis der Amplituden gegeben.

Man sieht so auch, daß der Tensor durch den Komplex der Verschiebungslinien einer zugehörigen Deformation vollkommen festgelegt ist. Einem Tensor wird also ebenso ein Reyescher Achsenkomplex beigeordnet wie einer Schraube ein linearer Strahlenkomplex, aber zu jedem Achsenkomplex gehören unendlich viele Tensoren, während zu jedem linearen Komplex nur eine Schraube gehört.

Die Koordinaten einer Spannung, welche zu dem Tensor mit den angeschriebenen Koordinaten gehört, sind von der Form:

$$(6)\qquad X_x=\mathsf{T}\frac{\mathfrak{a}_{11}}{\mathfrak{a}},\quad Y_y=\mathsf{T}\frac{\mathfrak{a}_{22}}{\mathfrak{a}},\cdots X_y=\mathsf{T}\frac{\mathfrak{a}_{12}}{\mathfrak{a}}.$$

Hierbei wird:

$$(7)\qquad \mathsf{T}^2=X_x^{\,2}+Y_y^{\,2}+\cdots+2X_y^{\,2}.$$

Die Größe T soll die Intensität der Spannung heißen und wir haben dann den Satz: Bei Spannungen, die zu demselben Tensor gehören, ist für jede Ebene die Richtung der Spannungskraft dieselbe, während deren Größe der Intensität der Spannung proportional ist.

Wir wollen noch die drei Ausdrücke einführen:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{d} &= \mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{22} + \mathfrak{a}_{33}, \\ \mathfrak{e} &= \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33} - \mathfrak{a}_{23}{}^2 + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}_{31}{}^2 + \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22} - \mathfrak{a}_{12}{}^2, \\ \mathfrak{D} &= \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke entsprechen den Invarianten der zugehörigen Deformationen. Durch sie können wir die oben benutzte Größe $\mathfrak{a}$ darstellen wie folgt:

$$(9)\qquad \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{d}^2 - 2\mathfrak{e}}.$$

Aus ihnen können wir ferner leicht Invarianten des Tensors ableiten, indem wir sie zu solchen rationalen Funktionen der Tensorkoordinaten zusammensetzen, die in Zähler und Nenner vom gleichen Grade sind. Die einfachste derartige Kombination ist:

$$(10)\qquad \mathfrak{l} = \frac{2\mathfrak{e}}{\mathfrak{d}^2}.$$

Sie ist dem Parameter der Schraube in gewissem Sinne analog und soll auch als Parameter des Tensors bezeichnet werden. Wenn $\mathfrak{e} = 0$, wird $\mathfrak{l} = 0$, wenn $\mathfrak{d} = 0$, wird $\mathfrak{l} = \infty$. Da $\mathfrak{d}^2 - 2\mathfrak{e} = \mathfrak{a}^2$ immer positiv, ist $\mathfrak{d}^2 > 2\mathfrak{e}$, also stets:

$$(10\text{a})\qquad \mathfrak{l} < 1.$$

Wir suchen nun eine geometrische Deutung der Tensoren. Eine solche finden wir, wenn wir die sechs Tensorkoordinaten als die Koeffizienten in einer homogenen, quadratischen Gleichung mit drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 ansetzen, also die Gleichung anschreiben:

$$(11)\qquad \mathfrak{a}_{11}x_1{}^2 + \mathfrak{a}_{22}x_2{}^2 + \mathfrak{a}_{33}x_3{}^2 + 2\mathfrak{a}_{23}x_2x_3 + 2\mathfrak{a}_{31}x_3x_1 + 2\mathfrak{a}_{12}x_1x_2 = 0.$$

Sehen wir in derselben x_1, x_2, x_3 als die cartesischen Koordinaten eines Punktes im Raume an, so stellt sie einen Kegel zweiter Ordnung dar, dessen Spitze im Koordinatenursprunge O liegt. Dieser Kegel soll der Tensorkegel heißen. Er ist nicht notwendig reell, wenn auch die Koordinaten des Tensors reell sind. Wohl aber ist das Polarsystem stets reell, das er in dem Bündel der Strahlen durch seine Spitze O begründet. Jedem Strahl durch O ist in diesem Polarsystem eine Ebene durch O als Polarebene zugeordnet und deren Gleichung lautet, wenn ein beliebiger Punkt auf dem Strahl die Koordinaten y_1, y_2, y_3 hat:

$$(12)\qquad \begin{aligned} &(\mathfrak{a}_{11}y_1 + \mathfrak{a}_{12}y_2 + \mathfrak{a}_{13}y_3)x_1 \\ &+ (\mathfrak{a}_{21}y_1 + \mathfrak{a}_{22}y_2 + \mathfrak{a}_{23}y_3)x_2 \\ &+ (\mathfrak{a}_{31}y_1 + \mathfrak{a}_{32}y_2 + \mathfrak{a}_{33}y_3)x_3 = 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathfrak{a}_{32} = \mathfrak{a}_{23}$, $\mathfrak{a}_{13} = \mathfrak{a}_{31}$, $\mathfrak{a}_{21} = \mathfrak{a}_{12}$ vorausgesetzt.

Zu einer Deformation fanden wir eine sie geometrisch illustrierende Deformationsfläche und ebenso zu einer Spannung eine Spannungsfläche. Die gegenseitige Zuordnung der Durchmesser und Durchmesserebenen dieser Deformations- oder Spannungsfläche ist keine andere als die des soeben gefundenen Polarsystems, das zu dem entsprechenden Tensor gehört. Von der Fläche selbst ist der Tensorkegel der Asymptotenkegel.

Die vorstehende Gleichung der Polarebene eines Strahles durch O wird zur Gleichung einer Tangentialebene des Tensorkegels, wenn der Strahl selbst diesem Kegel angehört. Schreiben wir die Ebenengleichung dann in der Form:

$$z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3 = 0, \tag{13}$$

indem wir mit Benutzung eines Proportionalitätsfaktors ϱ setzen:

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_{11} y_1 + \mathfrak{a}_{12} y_2 + \mathfrak{a}_{13} y_3 = \varrho z_1, \\ \mathfrak{a}_{21} y_1 + \mathfrak{a}_{22} y_2 + \mathfrak{a}_{23} y_3 = \varrho z_2, \\ \mathfrak{a}_{31} y_1 + \mathfrak{a}_{32} y_2 + \mathfrak{a}_{33} y_3 = \varrho z_3, \end{cases} \tag{14}$$

dann sind z_1, z_2, z_3 die Koordinaten eines Punktes auf dem Strahl durch O, der auf der Tangentialebene senkrecht steht. Multiplizieren wir aber die letzten Gleichungen der Reihe nach mit y_1, y_2, y_3 und addieren sie, so verschwindet die linke Seite der entstehenden Gleichung, weil der Punkt mit den Koordinaten y_1, y_2, y_3 nach der Voraussetzung auf dem Tensorkegel liegt. Es ergibt sich also:

$$z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3 = 0. \tag{15}$$

Fassen wir diese Gleichung mit den vorigen (14) zusammen und eliminieren aus diesen vier Gleichungen die Größen y_1, y_2, y_3, ϱ, so finden wir:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} & \mathfrak{a}_{13} & z_1 \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & \mathfrak{a}_{23} & z_2 \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} & z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

als Gleichung des zu dem Tensorkegel polaren Kegels. Die gefundene Gleichung schreiben wir, nach den z geordnet:

$$\mathfrak{a}'_{11} z_1^2 + \mathfrak{a}'_{22} z_2^2 + \mathfrak{a}'_{33} z_3^2 + 2\mathfrak{a}'_{23} z_2 z_3 + 2\mathfrak{a}'_{31} z_3 z_1 + 2\mathfrak{a}'_{12} z_1 z_2 = 0. \tag{17}$$

Es wird dann, von einem gemeinsamen Faktor abgesehen:

$$\begin{cases} \mathfrak{a}'_{11} = \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33} - \mathfrak{a}_{23}^2, \quad \mathfrak{a}'_{22} = \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}_{31}^2, \quad \mathfrak{a}'_{33} = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22} - \mathfrak{a}_{12}^2, \\ \mathfrak{a}'_{23} = \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{31} - \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{32}, \quad \mathfrak{a}'_{31} = \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{23} - \mathfrak{a}_{13}\mathfrak{a}_{22}, \quad \mathfrak{a}'_{12} = \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{a}_{31} - \mathfrak{a}_{21}\mathfrak{a}_{33}. \end{cases} \tag{18}$$

Zu dem neuen Kegel gehört ein neuer Tensor, den wir den polaren Tensor des ursprünglichen nennen wollen. Bilden wir aus dessen Koordinaten $\mathfrak{a}'_{ij}$ die den Größen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{D}$ entsprechenden Ausdrücke $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{D}'$, so lassen sich die letzteren in einfacher Weise durch die ersteren ausdrücken. Es wird nämlich:

$$\mathfrak{d}' = \mathfrak{e}, \quad \mathfrak{e}' = \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}^2. \tag{19}$$

Hieraus folgt für den Parameter des polaren Tensors, der wieder stets < 1 ist:

$$\mathfrak{l}' = \frac{2\,\mathfrak{e}'}{\mathfrak{d}'^2} = \frac{2\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}}{\mathfrak{e}^2}. \tag{20}$$

Dieser Parameter ist wieder eine Invariante des ursprünglichen Tensors und $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$ können wir als dessen Grundinvarianten ansehen, aus denen sich alle seine Invarianten rational zusammensetzen lassen. Ein Tensor besitzt sonach im Gegensatz zu der Schraube zwei unabhängige Invarianten.

Ein singulärer Tensor ergibt sich, wenn $\mathfrak{D} = 0$ wird. Dies geschieht, wenn $\mathfrak{l}' = 0$ und $\mathfrak{l} \neq \infty$ ist. Der zugehörige Tensorkegel zerfällt dann in zwei Ebenen η und η', und der Kegel des polaren Tensors reduziert sich auf eine doppelt gezählte Ebene σ. Diese Ebene σ ist zu den beiden Ebenen η und η' normal.

Zwei Tensoren können in einer besonderen invarianten Beziehung zueinander stehen, die durch die folgende Gleichung ausgedrückt wird:

$$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{11}^{(1)} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{22}^{(1)} + \cdots + 2\,\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{12}^{(1)} = 0. \tag{21}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist die, daß, wenn der eine Tensor, etwa der mit den Koordinaten $\mathfrak{a}_{ij}$, als Träger einer Deformation angesehen wird, und der andere Tensor, dessen Koordinaten $\mathfrak{a}_{ij}^{(1)}$ sind, als Träger einer Spannung, der Arbeitsausdruck für diese Spannung und Deformation verschwindet. Von den beiden Tensoren sagen wir dann, sie seien zueinander korreziprok.

Aus dieser invarianten Beziehung können wir eine andere ableiten, indem wir den einen der beiden Tensoren durch seinen polaren Tensor ersetzen. Wir haben dann die Koordinaten dieses letzteren durch die Proportion einzuführen:

$$\mathfrak{b}_{11} : \mathfrak{b}_{22} : \cdots : \mathfrak{b}_{12} = \mathfrak{a}_{22}^{(1)}\mathfrak{a}_{33}^{(1)} - \mathfrak{a}_{23}^{(1)\,2} : \mathfrak{a}_{33}^{(1)}\mathfrak{a}_{11}^{(1)} - \mathfrak{a}_{31}^{(1)\,2} : \cdots : \mathfrak{a}_{23}^{(1)}\mathfrak{a}_{31}^{(1)} - \mathfrak{a}_{21}^{(1)}\mathfrak{a}_{33}^{(1)}. \tag{22}$$

Setzen wir wie oben $\mathfrak{D}$ gleich der Determinante aus den $\mathfrak{a}_{ij}$, so können wir die entstehende Gleichung schreiben:

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \mathfrak{a}_{ij}} \mathfrak{b}_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{23}$$

Diese Gleichung ist aber in einem höheren Sinne invariant, sie ändert nämlich ihre Form nicht, wenn die Veränderlichen x_1, x_2, x_3 durch irgendwelche homogene lineare Substitution transformiert werden. Eine solche Transformation bedeutet, daß wir von den ursprünglichen rechtwinkligen Koordinaten zu irgendwelchen anderen, i. a. schiefwinkligen Koordinaten übergehen.

Auf Grund dieser Bemerkung wollen wir nun die geometrische Bedeutung der aufgestellten Beziehungsgleichung zu ermitteln suchen. Wir benutzen zu dem Zweck den Begriff des Poldreikants eines Kegels. Dasselbe ist dadurch definiert, daß jede seiner Seitenflächen die Polarebene der gegenüberliegenden Kante bezüglich des Kegels ist. Es ist dann leicht nachzuweisen, daß von einem solchen Poldreikant des einen Tensorkegels auf unendlich viele Arten zwei Kanten auf dem anderen Tensorkegel, unabhängig von der zwischen den beiden Kegeln bestehenden Beziehung, angenommen werden können. Wenn wir nun auf das Poldreikant schiefwinklige Koordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ beziehen, so hat in demselben der erste Tensorkegel, zu dem dies Poldreikant gehört, eine Gleichung von folgender Form:

$$\mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{x}_1^{\,2} + \mathfrak{a}_{22}\,\mathfrak{x}_2^{\,2} + \mathfrak{a}_{33}\,\mathfrak{x}_3^{\,2} = 0.$$

Es wird also einfach:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{a}_{22}\,\mathfrak{a}_{33}$$

zu setzen sein. Der zweite Tensorkegel aber hat, da zwei Kanten des Fundamentaldreikants auf ihm liegen, eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{b}_{33}\,\mathfrak{x}_3^{\,2} + 2\,\mathfrak{b}_{23}\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3 + 2\,\mathfrak{b}_{31}\,\mathfrak{x}_3\,\mathfrak{x}_1 + 2\,\mathfrak{b}_{12}\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2 = 0.$$

Die in Rede stehende Beziehungsgleichung reduziert sich also auf:

$$\mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{a}_{22}\,\mathfrak{b}_{33} = 0,$$

d. h. weil $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22} \neq 0$ angenommen werden sollen, auf:

$$\mathfrak{b}_{33} = 0.$$

Es liegt mithin auch die dritte Kante des Poldreikants auf dem Kegel und wir finden, daß unendlich viele Poldreikante des ersten Tensorkegels dem zweiten Tensorkegel einbeschrieben sind.

Wenn wir statt des ersten Tensorkegels seinen polaren Kegel nehmen, so erhalten wir zwei Kegel, die zu korreziproken Tensoren gehören. Nehmen wir auch statt des zweiten dieser Kegel den polaren Kegel, so müssen wir, da die Beziehung korreziproker Tensoren durchaus wechselseitig ist, zwei Kegel bekommen, die in derselben Beziehung zueinander stehen wie die oben betrachteten, nur haben sie ihre Rollen vertauscht: dem ersten sind jetzt unendlich viele Poldreikanten des zweiten einbeschrieben. Diese Kegel sind aber die polaren der oben betrachteten, und daraus folgt, daß von den letzteren Kegeln selbst dem ersten unendlich viele Poldreikante des zweiten umschrieben sind, denn die Polarfigur des Poldreikants eines Kegels ist ein Poldreikant des polaren Kegels; ist aber ein Dreikant einem

Kegel einbeschrieben, so ist das polare Dreikant dem polaren Kegel umschrieben.

Die volle Analyse der in Rede stehenden Beziehung besteht also darin, daß nicht bloß dem zweiten Kegel unendlich viele Poldreikante des ersten Kegels einbeschrieben, sondern auch dem ersten unendlich viele Poldreikante des zweiten Kegels umschrieben sind. Wir sagen dann mit Reye, der erste Kegel ruhe auf dem zweiten und der zweite Kegel stütze den ersten.[1])

Wir wollen nun beachten, daß unter den Tensoren einer besonders ausgezeichnet ist. Dies ist der, welcher den einfachen Dilatationen entspricht. Der zugehörige (imaginäre) Tensorkegel hat die Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{24}$$

Das durch ihn begründete Polarsystem wird durch die bilineare Gleichung gegeben:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0. \tag{25}$$

Es ordnet jedem Strahl durch O die zu ihm senkrechte Ebene zu, die durch O geht. Wir wollen es das Grundpolarsystem nennen und seinen Ordnungskegel den Grundkegel. (Derselbe projiziert den unendlich fernen imaginären Kugelkreis aus dem Punkte O.)

Wir suchen jetzt die Bedingung dafür, daß ein Kegel den Grundkegel stützt. Ist:

$$\sum \mathfrak{b}_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{26}$$

die Gleichung des Kegels, so ergibt die Gleichung (23) sofort die gesuchte Bedingung:

$$\mathfrak{b}_{11} + \mathfrak{b}_{22} + \mathfrak{b}_{33} = 0, \tag{27}$$

es muß also für den Kegel der früher mit $\mathfrak{d}$ bezeichnete Ausdruck verschwinden. Die geometrische Bedeutung der Gleichung $\mathfrak{d} = 0$ ist mithin die, daß dem zugehörigen Tensorkegel unendlich viele rechtwinklige Dreikante einbeschrieben werden können. Dann ist $\mathfrak{l} = \infty$, $\mathfrak{l}' = 0$.

Wir suchen zweitens die Bedingung dafür, daß ein Kegel auf dem Grundkegel ruht. Wir haben dafür in der Gleichung (23):

$$\mathfrak{b}_{11} = \mathfrak{b}_{22} = \mathfrak{b}_{33}, \quad \mathfrak{b}_{23} = 0, \quad \mathfrak{b}_{31} = 0, \quad \mathfrak{b}_{12} = 0$$

vorauszusetzen. Dann ergibt sich die gesuchte Beziehung in der Form:

$$\mathfrak{a}_{22}\,\mathfrak{a}_{33} - \mathfrak{a}_{23}^2 + \mathfrak{a}_{33}\,\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}_{31}^2 + \mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{a}_{22} - \mathfrak{a}_{12}^2 = 0, \tag{28}$$

d. h. es verschwindet der früher mit $\mathfrak{e}$ bezeichnete Ausdruck. Die geometrische Bedeutung der Gleichung $\mathfrak{e} = 0$ ist also die, daß dem

1) Reye, Geometrie d. Lage, 1. Abt., 4. Aufl. 1899, p. 266.

zugehörigen Tensorkegel unendlich viele rechtwinklige Dreikante umschrieben werden können. Dann ist $\mathfrak{l} = 0$, $\mathfrak{l}' = \infty$.

Die Tensorkegel, deren zugehörige Tensoren denselben Achsenkomplex liefern, sind konfokal. Ihre polaren Kegel bilden ein Büschel, zu dem der Grundkegel gehört. Das gemeinsame Poldreikant der Kegel dieses Büschels, das notwendig reell ist, liefert die gemeinsamen Hauptachsen der durch die konfokalen Kegel repräsentierten Tensoren, die mit den Hauptachsen der zugehörigen Deformationen oder Spannungen identisch sind. Auf diese Hauptachsen bezogen nimmt die Gleichung des Tensorkegels die einfache Gestalt an:

$$\mathfrak{A}_1 x_1^2 + \mathfrak{A}_2 x_2^2 + \mathfrak{A}_3 x_3^2 = 0. \tag{29}$$

$\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ sind hierbei die Wurzeln der Gleichung dritten Grades für λ:

$$\lambda^3 - \mathfrak{d}\lambda^2 + \mathfrak{e}\lambda - \mathfrak{D} = 0. \tag{30}$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\mathfrak{d}^3$ und setzt:

$$\frac{\lambda}{\mathfrak{d}} = u, \tag{31}$$

so kann man $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, da es nur auf ihre Verhältnisse ankommt, auch als die Wurzeln der folgenden Gleichung für u definieren:

$$u^3 - u^2 + \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{d}^2} u - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{d}^3} = 0. \tag{32^0}$$

Diese Gleichung aber kann man schreiben:

$$u^3 - u^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{l} u - \tfrac{1}{8}\mathfrak{l}^2\mathfrak{l}' = 0. \tag{32}$$

So tritt die Abhängigkeit der Koeffizienten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ von den Invarianten des Tensors hervor.

In mancher Hinsicht ist es bequemer, eine ebene Darstellung der Tensoren zu haben. Eine solche finden wir, wenn wir die Tensorkegel mit irgendeiner festen Ebene als Bildebene zum Schnitt bringen und diese Schnittkurven als Darstellung der Tensoren ansehen. So bringen wir die Gesamtheit der Tensoren in Beziehung zu der Gesamtheit der Kegelschnitte in einer Ebene.[1]) Die Koordinaten x_1, x_2, x_3 und ihre linearen Transformationen lassen sich hierbei als homogene Dreieckskoordinaten in der Bildebene deuten. Einem singulären Tensor, für den $\mathfrak{D} = 0$ wird, entspricht in der Bildebene ein zerfallender Kegelschnitt. Den zweifach singulären

1) Die hier berührte Kegelschnittgeometrie ist namentlich durch die folgenden Arbeiten begründet worden: Hesse, Journ. f. Math. Bd. 45, 1852, p. 83, Werke p. 298, St. Smith, Lond. Math. Soc. Proceed. Vol. 2, 1868, p. 85, Coll. Papers I, p. 524, Rosanes, Math. Ann. Bd. 6, 1872, p. 264, Picquet, Étude géométrique des systêmes . . . de sections coniques, Paris 1872.

Tensoren, die zu einfachen Dehnungen gehören, entsprechen die (doppelt gezählten) geraden Linien der Bildebene.

Die metrischen Eigenschaften der Tensoren, insbesondere die Bestimmung ihrer Hauptachsen, erfordern das Heranziehen einer bestimmten imaginären Kurve zweiter Ordnung, nämlich der Kurve, in welcher die Bildebene von dem Grundkegel geschnitten wird und welche wir als die Grundkurve bezeichnen wollen. Diese Grundkurve kann man ersetzen durch das Polarsystem, das sie in der Bildebene begründet. Um dies Polarsystem direkt abzuleiten, denken wir uns aus dem Punkte O das Lot OM auf die Bildebene gefällt, dessen Länge mit p bezeichnet sei. Wird dann die Bildebene von irgendeinem Strahl durch O in einem Punkte S und von der zu dem Strahl senkrechten Ebene durch O in einer Linie s geschnitten, so steht die Verbindungslinie der Punkte S und M auf s senkrecht in einem Punkte, den wir S' nennen wollen, und es wird dann:

$$MS \cdot MS' = -p^2,$$

indem wir die Verschiedenheit des Sinns von MS und MS' durch das negative Vorzeichen ausdrücken. Die Zuordnung des Punktes S und der Linie s läßt sich als die eines Antipolarsystems deuten, dessen Grundkurve der mit dem Radius p um M beschriebene Kreis ist.

Zwei Kegelschnitte entsprechen polaren Tensoren, wenn sie als reziproke Kurven in dem gefundenen Antipolarsystem einander zugeordnet sind, d. h. der eine von den Antipolaren des anderen umhüllt wird. Zwei solche Kurven lassen sich aber auch als verschiedene Abbildungen desselben Tensors auffassen. Um diese zwei Abbildungen zu scheiden, wollen wir den bei der ursprünglichen Abbildungsart sich ergebenden Kegelschnitt als Kurve zweiter Ordnung, d. h. als Punktort auffassen, dagegen den reziproken Kegelschnitt als Kurve zweiter Klasse, d. h. als Umhüllungsgebilde seiner Tangenten. Dann ergibt sich, daß, wenn zwei Tensoren korreziprok sind, die dem einen entsprechende Kurve zweiter Klasse auf der dem anderen entsprechenden Kurve zweiter Ordnung ruht.

Zwei Deformationen werden zu einer einzigen zusammengesetzt, indem man ihre homologen Koordinaten addiert. Legen wir von den Deformationen zunächst nur die zugehörigen Tensoren fest, so sind ihre Koordinaten von der Form:

$$\lambda \mathfrak{a}_{11},\ \lambda \mathfrak{a}_{22} \ldots \lambda \mathfrak{a}_{12} \text{ und } \mu \mathfrak{b}_{11},\ \mu \mathfrak{b}_{22} \ldots \mu \mathfrak{b}_{12},$$

also werden die Koordinaten der aus ihnen resultierenden Deformation:

$$\lambda \mathfrak{a}_{11} + \mu \mathfrak{b}_{11},\ \lambda \mathfrak{a}_{22} + \mu \mathfrak{b}_{22} \ldots \lambda \mathfrak{a}_{12} + \mu \mathfrak{b}_{12},$$

und die Gleichung der entsprechenden Kurve zweiter Ordnung lautet:

$$(\lambda \mathfrak{a}_{11} + \mu \mathfrak{b}_{11}) x_1^2 + (\lambda \mathfrak{a}_{22} + \mu \mathfrak{b}_{22}) x_2^2 + \cdots + 2 (\lambda \mathfrak{a}_{12} + \mu \mathfrak{b}_{12}) x_1 x_2 = 0.$$

Geben wir hierin λ und μ alle möglichen Werte, so erhalten wir die sämtlichen Kurven eines Kegelschnittbüschels. Von den Deformationen, die sich aus zwei Deformationen in gegebenen Tensoren zusammensetzen, müssen wir nun nach der Bildungsart ihrer Koordinaten sagen, daß sie ein lineares System zweiter Stufe bilden, und gleiches gilt von den zugehörigen Tensoren. Ebenso bilden aber auch die Bildkegelschnitte ein lineares System, nämlich ein Büschel.

Allgemein finden wir zu einem linearen Tensorsystem als Bild ein lineares Kegelschnittsystem, und die Untersuchung der linearen Tensorsysteme reduziert sich somit auf die Untersuchung der linearen Kegelschnittsysteme in einer Ebene. Hierbei ist die Heranziehung der Grundkurve oder ihres Polarsystems überall da nötig, wo es sich um metrische Eigenschaften der Tensoren handelt. Z. B. bestimmt man die Hauptachsen eines Tensors, indem man das gemeinsame Poldreieck der Grundkurve und der Bildkurve des Tensors sucht. Durchläuft der Tensor ein lineares Tensorsystem zweiter Stufe, so bewegen sich die Ecken jenes Poldreiecks auf einer Kurve dritter Ordnung, auf der sie eine bestimmte Schar von Punktetripeln bilden.

Zu den projektiven Eigenschaften gehört die Frage nach den singulären Tensoren, die in einem linearen Tensorsystem enthalten sind. In einem Tensorsystem zweiter Stufe sind es drei, in einem Tensorsystem dritter Stufe unendlich viele. Die Linien der Linienpaare, welche diese Tensoren in der Bildebene darstellen, umhüllen eine Kurve dritter Klasse, und die Punkte, in denen die Linien der einzelnen Linienpaare sich schneiden, erfüllen eine Kurve dritter Ordnung. Zweifach singuläre Tensoren sind i. a. erst in einem Tensorsystem vierter Stufe enthalten und zwar vier an der Zahl. In einem Tensorsystem fünfter Stufe sind unendlich viele enthalten, und die (doppelt gezählten) geraden Linien, welche sie in der Bildebene darstellen, umhüllen einen Kegelschnitt.

Interpretieren wir die Tensoren nicht durch Kurven zweiter Ordnung, sondern durch Kurven zweiter Klasse, so sind die auftretenden linearen Kurvensysteme von anderer Art als die bis jetzt in Betracht gezogenen und stehen diesen dualistisch gegenüber. Z. B. erhalten wir an Stelle des Kegelschnittbüschels die Kegelschnittschar, nämlich nicht die Kegelschnitte, die vier gemeinsame Punkte haben, sondern die Gesamtheit derer, welche vier gemeinsame Tangenten besitzen.

Wie bei den linearen Schraubensystemen gehört zu einem linearen Tensorsystem μ^{ter} Stufe ein solches $(6-\mu)^{\text{ter}}$ Stufe, dessen Tensoren zu allen denen des ersten Systems korreziprok sind. Werden die Tensoren des einen Systems durch Kurven zweiter Ordnung, die des anderen Systems durch Kurven zweiter Klasse abgebildet, so ruht das System der Kurven zweiter Klasse auf dem Systeme der Kurven zweiter Ordnung. Diese Zuordnung der linearen Systeme von Kurven zweiter Ordnung und von Kurven zweiter Klasse ist von fundamentaler Bedeutung für die Kegelschnittgeometrie und tritt auch hier in den Mittelpunkt der Betrachtung.

Derart lassen sich die Tensoren unmittelbar mit geometrisch einfachen Gebilden, nämlich den Kegelschnitten einer Ebene, in eindeutige Beziehung setzen, während bei den Schrauben ein gleiches nicht der Fall ist. Wohl stehen die Schrauben in Zusammenhang mit noch einfacheren geometrischen Gebilden, nämlich den geraden Linien des Raumes, aber dieser Zusammenhang bedeutet keine eindeutige Beziehung. Vielmehr ist unendlich vielen Schrauben dieselbe gerade Linie, als ihre Achse, zugeordnet, und es muß dieser Linie noch ein Parameter beigeschrieben werden, damit sie die Schraube vollständig charakterisiert. So führt die Schraubentheorie wohl zur Liniengeometrie, aber diese Liniengeometrie hat eine ganz besondere Färbung, weil die Linien nicht als selbständige Gebilde unmittelbar auftreten, sondern vielmehr gleichsam als Ausfluß eines Gebildes höherer Art erscheinen. Diese Behandlungsart der Liniengeometrie hat indes einen besonderen Vorzug. Die geraden Linien des Raumes bilden nämlich eine quadratische Mannigfaltigkeit, die Schrauben aber bedeuten eine lineare Mannigfaltigkeit, welche jene einschließt, wie der Raum unserer Anschauung eine Fläche zweiter Ordnung einschließt, und die Geometrie der Gesamtheit aller Linien wird so in ähnlicher Weise der Geometrie der sie umfassenden Gesamtheit aller Schrauben untergeordnet wie die Geometrie einer Fläche zweiter Ordnung aus der gewöhnlichen Raumgeometrie gewonnen wird.

Man kann noch fragen, ob die Liniengeometrie in dieser Fassung nicht mit der Kegelschnittgeometrie in Beziehung gesetzt und so wieder die Schraubengeometrie mit der Tensorgeometrie in Verbindung gebracht werden kann. Eine solche Beziehung ist in der Tat auf mehr oder minder ungezwungene Weise herstellbar und an sich nicht ohne Interesse. Wir müssen es uns aber versagen, hier darauf einzugehen.

Zusätze und Erläuterungen zu den ersten fünf Kapiteln.

S. 1, Zeile 2. Die hier gegebene Definition des Punktes kann als eine Tautologie erscheinen, wenn man ihre Bedeutung mißversteht. Im folgenden wird ein Körper als ein Punkt behandelt, wenn die Unterschiede in der Lage seiner Teile vernachlässigt werden, wenn also die Genauigkeit der zur Verwendung kommenden Längenmessungen nicht so groß ist, daß sie noch die Dimensionen des Körpers festzustellen erlaubt. Der Körper bedeutet dann bei der gerade vorliegenden Genauigkeit eine bestimmt bezeichnete Stelle im Raum. Die Definition ist also nach Kleins Ausdruck im Sinne der Approximations-Mathematik zu verstehen. Sie bedeutet nichts anderes als die schon von Hobbes gegebene Umformung der Euklidischen Definition: punctum non est cujus pars est nulla, sed cujus pars non consideratur.

S. 2, Zeile 4. Wenn das Wort Vektor von Hamilton herrührt, so scheint der Begriff einer nach Größe und Richtung bestimmten Strecke zuerst von Argand scharf ausgeprägt zu sein in der berühmten kleinen Schrift: Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Paris 1806. Man vgl. auch die Abhandlung Annales de Gergonne, t. IV, 1813, p. 133.

S. 3, Zeile 17. Diese Abwägung der Verdienste Hamiltons und Graßmanns ist nur berechtigt, wenn die Aufgabe so gestellt wird, wie es in diesem Buche der Fall ist. Die arithmetische Bedeutung, welche den Quaternionen als höheren komplexen Zahlen zukommt, ist dabei außer acht gelassen. Eine solche Bedeutung kommt der Graßmannschen Ausdehnungslehre nicht zu. Dagegen lassen sich auch aus den Entwicklungen Graßmanns die Hamiltonschen Differentialoperationen herausschälen. Nur ist zweifellos Hamilton der, dem ihre Einführung zu danken ist und der ihnen die handliche Gebrauchsfertigkeit gegeben hat. Sehr merkwürdig ist, daß schon 1819 Gauß die Quaternionen genau in der Form, wie sie hier S. 35 ff. erscheinen, gefunden hat. Er bezeichnet sie als Mutationsskalen, da sie eine „Mutation", d. h. eine Ähnlichkeitstransformation des Raumes bestimmen, und schreibt (a, b, c, d), wo Hamilton den Ausdruck $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ nimmt (S. Gauß' Werke, Bd. VIII, S. 357 ff.).

S. 14, Zeile 9 von unten. Die Ausdehnung auf irrationale Zahlen ist durch die gewöhnliche, schon von Euklid benutzte Methode zu gewinnen. Sie ist im Text nur der Kürze wegen fortgelassen, da sie als allgemein bekannt vorausgesetzt werden kann.

S. 15, Anm. Gibbs' Ideen, die hier nur mit diesem einen Wort gestreift werden, sind tief und originell, aber Gibbs ist durch andere Arbeiten in seinen letzten Lebensjahren verhindert worden, sie zu Ende zu verfolgen und seine Theorie in das Lehrgebäude der traditionellen Analysis einzugliedern. Seine Vorlesungen sind von Wilson als „Vector Analysis" herausgegeben.

S. 16, Formel (9). Den Größen F_x, F_y, F_z kommen bestimmte Vorzeichen zu. Sie sind positiv, wenn der Übergang von der Projektion des ersten Vektors $\mathbf{a}$ zu der Projektion des zweiten Vektors $\mathbf{b}$ eine positive Umkreisung des positiven Sinnes der auf der betreffenden Koordinatenebene senkrechten Achse bedeutet, negativ im entgegengesetzten Falle. F nimmt man zweckmäßig immer positiv an, dann liefert die Formel (10) für die Richtungskosinus die Flächennormale mit dem Sinne, für den der Übergang vom ersten zum zweiten Vektor eine positive Umkreisung bedeutet.

S. 20, Zeile 4 von unten. Der so bestimmte Vektor wird auch wohl das Vektorprodukt der beiden gegebenen Vektoren bezeichnet. Wenn dann in der Statik des starren Körpers von einem Vektormoment die Rede ist, wird direkt dieses Vektorprodukt statt des sich zunächst ergebenden Flächenvektors genommen. Wir ziehen es vor, diese Bezeichnung nicht zu adoptieren. Selbst wo es zur geometrischen Veranschaulichung von Nutzen ist, die Flächenvektoren durch Strecken darzustellen, wollen wir dies nur als eine vorübergehende Verbildlichung ansehen und uns des wahren Charakters der Größenart bewußt bleiben.

S. 22, Zeile 17. Von der konjugierten Quaternion $\bar{q}$ wohl zu unterscheiden ist die reziproke Quaternion q^{-1}. Die letztere ist dadurch definiert, daß:

$$qq^{-1} = 1 \text{ und damit auch } q^{-1}q = 1$$

sein soll, während:

$$q\bar{q} = K^2 + L^2 + M^2 + N^2$$

ist. Daraus folgt, daß:

$$q^{-1} = \frac{K - L\mathbf{i} - M\mathbf{j} - N\mathbf{k}}{K^2 + L^2 + M^2 + N^2}$$

ist.

S. 23, Zeile 17. Der Begriff des Tetraedervolumens wird in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie so erweitert, daß die Bestimmung des Vorzeichens mit in ihn hineingelegt wird. Wir haben es aber für vorsichtiger gehalten, zunächst das Wort in dem gewöhnlichen Sinne als einfachen Raumgehalt zu gebrauchen, trotzdem später immer das Volumen mit einem bestimmten Vorzeichen behaftet auftritt.

S. 25, Zeile 19. Die allgemeine Auffassung von Operatoren als symbolischen Faktoren rührt von englischen Mathematikern, namentlich Boole, her.

S. 30, Zeile 14. Hier steht $\varDelta$ statt V.

S. 34, Zeile 4. Für $\varDelta = 0$ ergibt sich ein singulärer Fall, der dadurch charakterisiert ist, daß die transformierten Vektoren alle einer Ebene angehören. In den Gleichungen (14) auf S. 28 sind dann die linken Seiten $= 0$ und die rechten Seiten proportional, so daß die drei Gleichungen sich auf die eine Gleichung der Ebene, welcher die transformierten Vektoren angehören, reduziert. Verschwinden aber von $\varDelta$ auch die Unterdeterminanten, so sind die Gleichungen (14) identisch erfüllt, in den Gleichungen (10) aber sind die rechten Seiten nur um konstante Faktoren verschieden, die transformierten Vektoren fallen also alle der Lage nach zusammen. In diesen singulären Fällen können wir nicht mehr von eigentlichen Vektorquotienten reden, wenn wir in die Bedeutung der Gleichung $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}\,\mathfrak{a}$ hineinlegen, daß sie zu jedem Vektor $\mathfrak{a}$ einen Vektor $\mathfrak{b}$ und zu jedem Vektor $\mathfrak{b}$ einen Vektor $\mathfrak{a}$ zu finden erlaubt. Deshalb ist auf diese Fälle im Text nicht eingegangen.

S. 34, Zeile 13. Wohl zu beachten ist, daß hier der Begriff Vektorquotient einen anderen Sinn hat als bei Hamilton. Hamilton nimmt den Quotienten zweier Vektoren

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \frac{q}{\mathfrak{a}^2},$$

wenn q die Quaternion $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^2$ (für $\mathfrak{a} = \mathfrak{x}\mathbf{i} + \mathfrak{y}\mathbf{j} + \mathfrak{z}\mathbf{k}$) die Zahlgröße $-(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)$ bezeichnet Er führt also die Division direkt auf die Multiplikation zurück.

S. 38, Zeile 11. Der Ausdruck Drehstreckung ist von F. Klein gebraucht worden. Man vgl. die ganze Darstellung bei Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels. Aus der Drehstreckung ergibt sich eine Wendestreckung, wenn $\omega = \pi/2$ ist. In diesem besonderen Falle ist der geometrische Vektorquotient durch die beiden Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ nicht mehr eindeutig bestimmt.

Denn in den Gleichungen (35) sind die Winkel λ, μ, ν dann nur an die Bedingung gebunden, daß sie sich auf eine zu der gemeinsamen Linie der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ senkrechte Richtung beziehen sollen. Wir wollen noch bemerken, daß wir aus einer beliebigen Quaternion q eine einfache Drehung ableiten können, wenn wir statt der konjugierten Quaternion $\overline{q}$ die reziproke Quaternion q^{-1} nehmen, also die Gleichung (31) schreiben $q^{-1}\mathfrak{p}\,q = \mathfrak{p}'$. Dann geht $\mathfrak{p}'$ aus $\mathfrak{p}$ durch eine einfache Drehung hervor. Über die Beziehungen zwischen Quaternionen und Drehungen ist neuerdings eine Arbeit von Fr. Meyer in der Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 55, 1907, p. 104 erschienen.

S. 39, letzte Zeile. Es braucht kaum gesagt zu werden, daß der Quotient zweier Punktgrößen nach der bei den Vektoren vertretenen Auffassung als eine allgemeine kollineare Transformation erscheint. So wird in einer besonderen Weise das Rechnen mit kollinearen Verwandtschaften, das Reye in seiner Geometrie der Lage nach dem Vorgange von Stephanos entwickelt hat, begründet, und gleichzeitig scheint mir dies in einer dem Gedankengange der Ausdehnungslehre entsprechenden Erweiterung auf n Dimensionen die einfachste und natürlichste Begründungsart der sehr interessanten und fruchtbaren Theorie der Matrizen zu sein.

S. 40, Formel (7). Zum erstenmal sind diese sechs Größen bei d'Alembert aufgetreten, der in seinen Recherches sur la précession des équinoxes 1749 ihre Bedeutung für die Mechanik des starren Körpers erkannt hat.

S. 43, Formel (19). Es ist sofort zu übersehen, was eintritt, wenn die Ebene durch den Koordinatenursprung hindurchgeht. Dann bleibt es der Willkür überlassen, welche Seite als die vom Koordinatenursprung weggewandte angesehen werden soll. Man kann den Sinn der Normalen dann immer so wählen, daß die Reihenfolge ABC eine positive Umkreisung derselben bedeutet. So wird δ positiv, und die Vorzeichen der Richtungskosinus stimmen mit denen von ξ, η, ζ überein, während $\theta = 0$ wird.

S. 44, Zeile 10 v. u. Die Bedeutung dieser Unterscheidung ist von Study hervorgehoben worden. In der Tat ist diese Zweiseitigkeit ein charakteristisches Merkmal der Ebene und es bedingt eine gewisse Unvollkommenheit der herkömmlichen Darstellungsweise, daß sie nicht in ihrer Bedeutung hervortritt.

S. 44, Zeile 12. Wenn $p = 0$, ist π durch die zugehörige Ebene nicht in eindeutiger Weise bestimmt. Doch ist dies kein Übelstand, denn, wie leicht zu sehen, hat die getroffene Festsetzung nur den Zweck, aus dem Koeffizienten von Ω und damit aus dem konstanten Glied der Ebenengleichung in der Normalform die Unbestimmtheit des Vorzeichens zu entfernen, wodurch die Ausdrucksweise erleichtert und die Übereinstimmung mit der herkömmlichen Darstellung erhalten wird. — Wenn $p = \infty$, $\delta = 0$ wird, so daß $p\delta = \theta$ endlich bleibt, bekommen wir eine singuläre Ebenengröße, die dadurch charakterisiert ist, daß ξ, η, $\zeta = 0$ sind. Ist $\theta = 1$, so wird einfach $\Pi = \Omega$. Ω repräsentiert so die „unendlich ferne Ebene", behaftet mit einer verschwindenden Zahlgröße.

S. 46, Zeile 23. Es mag noch hinzugefügt werden, daß man zu Flächenvektor und Ebenengröße als dritte verwandte Größenarten ein Parallelogramm hinzufügen kann, von dem wie bei dem Flächenvektor der Inhalt, der Umlaufsinn und die Stellung seiner Ebene festgehalten wird, außerdem aber noch die Winkel nicht geändert werden sollen. Ein solches Parallelogramm gibt eine einfache und anschauliche geometrische Deutung der Hamiltonschen Quaternionen.

S. 53, Zeile 27. Der Fall, wo die Ebenen der beiden Ebenengrößen zusammenfallen, bedarf kaum einer besonderen Erwähnung. Dann werden in dem Ausdrucke für $\mathfrak{a}$ alle Koeffizienten Null und damit $\mathfrak{a}$ selbst gleich Null.

S. 57, Zeile 6. Diese Festlegung der oberen und unteren Seite einer Ebene ist nur der Bequemlichkeit wegen sozusagen provisorisch gewählt worden. Wenn die Ebene durch den Punkt O hindurchgeht, bleibt es willkürlich, welche Seite als ihre obere und welche als ihre untere angesehen werden soll. Man kann diesen Ausnahmefall auch so beseitigen, daß man sich den Punkt O mit einer unendlich kleinen Kugel umgeben denkt, in welche die Ebene nicht eindringen soll. Wenn dann ein Ebenenpaar mit Beibehaltung des von ihm gebildeten Winkels um seine Schnittlinie gedreht wird, so muß man sich denken, daß es an diese unendlich kleine Kugel wie an einen festen Körper anstößt. So wird vermieden, daß beim Durchgange durch den Punkt O die obere Seite einer der Ebenen in die untere übergeht und umgekehrt.

S. 57, Zeile 30. Der vorgesetzte Strich bedeutet nach Graßmanns Schreibweise die „Ergänzung" der dahinterstehenden Größe. In der Tat ist hier im Graßmannschen Sinne eine translatorische die Ergänzung einer rotatorischen Liniengröße.

S. 60, Zeile 5. Man möge entschuldigen, daß an dieser Stelle das Wort Inversion in einem anderen Sinne auftritt, als in dem es später gebraucht wird. Es schien am einfachsten, hier den Ausdruck beizubehalten, den der Leser in den zitierten Schriften von F. Klein wiederfindet.

S. 61, Zeile 20. Der Flächenvektor ϱ bedeutet seinem analytischen Ausdrucke (24) nach eine (uneigentliche) translatorische Liniengröße und ist der rotatorischen Liniengröße (23) zugeordnet, die sich aus zwei parallelen Ebenen ergibt. Der Flächenvektor kann so gedeutet werden als eine unendlich ferne Liniengröße von verschwindendem Zahlwert.

S. 64, Zeile 10. Diese Verifikation wird zu einem Beweise vervollständigt, wenn noch nachgewiesen wird, daß bei einer affinen Transformation der Figur die Vorzeichenbestimmung nach der gegebenen Regel sich nicht ändert. Doch wäre es zu weitläufig gewesen, dies im Text auszuführen. Der Beweis kann auch so erbracht werden, daß man zuerst durch Multiplikation zweier der Ebenengrößen eine rotatorische Liniengröße ableitet, diese rotatorische Liniengröße dann durch die zugeordnete translatorische Liniengröße ersetzt und die letztere mit der dritten Ebenengröße durch Multiplikation verbindet.

S. 64, Zeile 17. Wird die Ebenengröße als das primitive Raumelement angesehen und die Punktgröße durch die Formel (32) auf S. 62 definiert, so erkennt man aus dem gefundenen Resultat, inwiefern man berechtigt ist, den Vektor als eine uneigentliche Punktgröße aufzufassen.

S. 67, Zeile 10. Der Beweis für die Vorzeichenregel kann auch direkt so geführt werden, daß man zuerst die ersten Ebenengrößen Π_1, Π_2, Π_3 durch Multiplikation verbindet und das Resultat mit Π_4 multipliziert. Der Figur entsprechend sind, wenn O, A, B, C die Ecken des Tetraeders bezeichnen, als die Ebenengrößen die folgenden zu nehmen:

$$\Pi_1 = [\mathbf{OBC}], \quad \Pi_2 = [\mathbf{OCA}], \quad \Pi_3 = [\mathbf{OAB}], \quad \Pi_4 = [\mathbf{CBA}].$$

Nach der vorher gegebenen Regel wird dann

$$[\Pi_1\, \Pi_2\, \Pi_3] = \mathsf{T}^2 \cdot \mathbf{O}\mathfrak{e},$$

wenn T wieder das Tetraedervolumen bedeutet, also $[\mathbf{OABC}] = \mathsf{T}\varepsilon$ ist, und dann wird weiter:

$$[\Pi_1\, \Pi_2\, \Pi_3\, \Pi_4] = \mathsf{T}^2 \cdot [\mathbf{OCBA}]\mathfrak{e} = -\mathsf{T}^3\, \varepsilon\mathfrak{e} = -\mathsf{T}^3\, \eta.$$

S. 68, Zeile 14. Es ist hier vorausgesetzt, daß die Ebene der Ebenengröße Π nicht mit den Ebenen von dreien der Ebenengrößen $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ einem Bündel angehört. Denn dann würde sie sich schon durch diese drei Ebenengrößen linear ausdrücken lassen.

Durchgehende Bezeichnungen.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ Einheiten des Linienvektors,
$\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ Einheiten des Flächenvektors,
$\boldsymbol{\mathfrak{i}}, \boldsymbol{\mathfrak{j}}, \boldsymbol{\mathfrak{k}}, \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ Einheiten der translatorischen Liniengrößen,
$|\boldsymbol{\mathfrak{i}}, |\boldsymbol{\mathfrak{j}}, |\boldsymbol{\mathfrak{k}}, |\mathfrak{i}, |\mathfrak{j}, |\mathfrak{k}$ Einheiten der rotatorischen Liniengrößen,
$\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \boldsymbol{\Omega}$ Einheiten der Ebenengrößen.

O Koordinatenursprung,
x, y, z kartesische Punktkoordinaten,
λ, μ, ν Richtungswinkel,
ξ, η, ζ, θ homogene Ebenenkoordinaten,
u, v, w inhomogene (Hessesche) Ebenenkoordinaten,
$\mathrm{u, v, w, p, q, r}$ Koordinaten einer Schraubung,
$\mathrm{L, M, N, X, Y, Z}$ Koordinaten einer Dyname,
$\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ Linienkoordinaten,
$\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ Schraubenkoordinaten,
$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ Impulskoordinaten,
$\mathfrak{R}$ Resultante eines Kräftesystems,
ω Rotationsgeschwindigkeit,
k Schraubenparameter,
γ Konkurrenz zweier Schrauben,
$\mathsf{\Delta}$ Dyname,
E Schraubung,
$\mathfrak{S}$ Schraube.

m Masse,
t Zeit,
τ sehr kurze Zeit,
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ Geschwindigkeitskomponenten,
$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ Beschleunigungskomponenten,
$\delta x, \delta y, \delta z$ Variationen der Punktkoordinaten,
W Arbeit,
T kinetische Energie,
F potentielle Energie.

Ferner sind bezeichnet
Punkte mit großen lateinischen Buchstaben P, Q usw.
Linien mit kleinen lateinischen Buchstaben p, l usw.
Ebenen mit kleinen griechischen Buchstaben π usw.

Register.

Die Zahlen bezeichnen im allgemeinen die Seiten, auf denen der Ausdruck zuerst auftritt. Ein in Klammern dahintergesetzter Personenname bedeutet den Autor, von dem der Ausdruck stammt.